3.1 A circunferência

1. Em cada caso, obtenha a equação e esboce o gráfico da circunferência.

   (a) Centro $C(-2,1)$ e raio $r=5$.

   (b) Passa pelos pontos $A(5,1)$, $B(4,2)$ e $C(-2,2)$.

   (c) O centro está sobre a reta $y=x-1$ e corta o eixo x nos pontos $A(-1,0)$ e $B(3,0)$.

   (d) Passa pelos pontos $A(1,2)$ e $B(1,-2)$ e tem raio $r=2$.

   (e) Circunscrita ao triângulo formado pelas retas $x+y=8$, $2x+y=14$ e $3x+y=22$.

   (f) Um diâmetro é o segmento que une os pontos $A(0,-1)$ e $B(-2,-3)$.

2. Determine a equação da circunferência de raio 5, tangente à reta $3x+4y=16$ no ponto $A(4,1)$.

3. Determine a equação da circunferência de centro $C(1,2)$ e tangente à reta $r: x-2y+8=0$.

4. Calcule o comprimento da corda da circunferência $x^2+y^2=25$ que jaz sobre a reta $x-7y+25=0$.

5. Considere o triângulo determinado pelas retas $4x-3y=65$, $7x-24y+55=0$ e $3x+4y=5$.

   (a) Determine as equações das bissetrizes do triângulo.

   (b) Encontre o ponto de interseção das bissetrizes. Este ponto leva o nome de *incentro* do triângulo.

   (c) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo. O centro da circunferência é o incentro do triângulo.

6. Uma haste de $30cm$ move-se com seus extremos apoiados em dois fios perpendiculares. Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto médio da haste.

7. Determine o centro e o raio da circunferência descrita por

$$\left|\begin{array}{l} x=2+3\cos t \\ y=-1+3\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0\leq t\leq 2\pi. \end{array}\right.$$

3.2 A Elipse

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos*, *vértices*, *excentricidade*, *centro* e *eixos*) e esboce o gráfico da elipse caracterizada por:

   (a) Focos $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ e soma dos raios focais igual a 12.

   (b) Dois vértices em $B_1(3,-4)$ e $B_2(3,4)$ e distância focal igual a 4.

   (c) Vértices em $A_1(-5,0)$, $A_2(5,0)$, $B_1(0,-4)$ e $B_2(0,4)$.

   (d) Focos sobre o eixo y, distância focal igual a 8 e excentricidade $e = 2/3$.

   (e) Centro $C(2,-1)$ e passa nos pontos $A(-3,-1)$ e $B(2,3)$.

   (f) Focos $F_1(-2,-2)$, $F_2(2,2)$ e soma dos raios focais igual a 12.

2. Determine a equação e a excentricidade da elipse que tem seu centro na origem, um dos vértices no ponto $B_1(0,-7)$ e passa no ponto $A(\sqrt{5}, 14/3)$.

3. Determine as retas tangentes à elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ com declividade $m = 1$.

4. Um arco tem a forma de uma semi-elipse com 48 metros de largura na base e 20 metros de altura. Determine o comprimento de uma viga colocada a 10 metros da base, paralelamente a mesma.

5. O teto de um corredor de 20 m de largura tem a forma de uma semi-elipse e a altura no centro é 18 m. Se a altura das paredes laterais é 12 m, determine a altura do teto a 4 m de uma das paredes.

6. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ cuja soma das distâncias aos pontos $F_1(4,-1)$ e $F_2(4,7)$ é igual a 12.

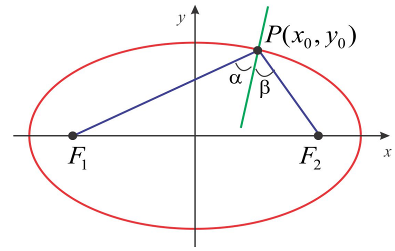
7. Determine a equação da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados e que passa nos pontos $A(-6,4)$, $B(-8,1)$, $C(2,-4)$ e $D(8,-3)$.

8. Determine o centro e os focos da elipse $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$.

9. Determine a interseção entre a elipse de vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 1)$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

10. PROPRIEDADE FOCAL DA ELIPSE

A figura ao lado mostra a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y2}{b^2} = 1$, com focos nos pontos F_1 e F_2. Sabendo que a declividade da reta normal no ponto $P(x_0, y_0)$ vem dada por $m_N = \dfrac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$, mostre que a reta normal à elipse no ponto $P(x_0, y_0)$ é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais do ponto P.



11. Determine os focos e o centro da elipse descrita pelo par de equações paramétricas

$$\left| \begin{array}{l} x = 3\cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0 \le t \le 2\pi. \end{array} \right.$$

12. Determine as retas tangentes traçadas do ponto $A(3, -1)$ à elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y = 5$.

13. Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a < b$, e seja l uma reta tangente à elipse. Mostre que

$$\mathrm{dist}\,(F_1; l) \cdot \mathrm{dist}\,(F_2; l) = a^2.$$

3.3 A Hipérbole

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos*, *vértices*, *excentricidade*, *centro*, *eixos e assíntotas*) e esboce o gráfico da hipérbole caracterizada por:

   (a) Focos $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ e diferença dos raios focais igual a 6.

   (b) Focos $F_1(2, -7)$, $F_2(2, 5)$ e diferença dos raios focais igual a 5.

   (c) Vértices em $A_1(2, -1)$, $A_2(2, 7)$ e excentricidade $e = 3/2$.

   (d) Vértices em $A_1(0, -2)$, $A_2(0, 2)$, não corta o eixo x e tem assíntotas $y = \pm 2x$.

   (e) Focos $F_1(-2, 2)$, $F_2(2, -2)$ e vértices $V_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $V_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. Calcule a área do triângulo determinado pela reta $9x + 2y = 24$ e pelas assíntotas da hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$.

3. Um triângulo tem a base fixa e o produto das inclinações dos lados variáveis é sempre igual a 4. Se a base é o segmento que une os pontos $A(3, 0)$ e $B(-3, 0)$, identifique o lugar geométrico descrito pelo vértice oposto à base.

4. Determine a equação da hipérbole com centro na origem, um vértice no ponto $V_1\,(6,0)$ e tendo a reta $4x-3y=0$ como uma das assíntotas.

5. Ache a excentricidade, o centro, os focos e as assíntotas da hipérbole $4y^2-9x^2+16y+18x=29$.

6. Se e é a excentricidade da hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, mostre que os raios focais de um ponto $P_0\,(x_0,y_0)$ da hipérbole têm comprimento $|ex_0\pm a|$. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P_0\,(6,5)$ sobre a hipérbole $5x^2-4y^2=80$.

7. O centro de uma hipérbole está na origem, seu eixo transverso jaz sobre o eixo y e um dos focos é o ponto $F_1\,(5,0)$. Se a excentricidade da hipérbole é $e=3$, determine sua equação e suas assíntotas.

8. Se α é o ângulo agudo de inclinação de uma assíntota da hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, mostre que a excentricidade da hipérbole é $\sec\alpha$.

9. Esboce no mesmo sistema de coordenadas as curvas $x^2-y^2=k$ para os seguintes valores de $k:-2,\ -1,\ 0,\ 1$ e 2.

3.4 A Parábola

1. Encontre a equação, os elementos principais (*foco*, *vértice*, *excentricidade*, *eixo e diretriz*) e esboce o gráfico da parábola caracterizada por:

   (a) Foco $F\,(3,0)$ e diretriz $r: x+3=0$.

   (b) Foco $F\,(0,-2)$ e diretriz $r: y=2$.

   (c) Foco $F\,(-2,0)$ e diretriz $r: x=4$.

   (d) Foco $F\,(-4,1)$ e diretriz $r: y=3$.

   (e) Vértice $V\,(2,0)$ e foco $F\,(0,0)$.

   (f) Vértice $V\,(4,-1)$, eixo focal $r: y=-1$ e passa no ponto $P\,(3,-3)$.

   (g) Foco $F\,(0,0)$ e diretriz $r: x+y=2$.

   (h) Vértice $V\,(-2,3)$ e foco $F\,(1,3)$.

   (i) Eixo paralelo ao eixo y e passa nos pontos $A\,(4,5)$, $B\,(-2,11)$ e $C\,(-4,21)$.

(j) Vértice na reta $2y - 3x = 0$, eixo paralelo ao eixo x e passa nos pontos $A(3,5)$ e $B(6,-1)$.

2. Mostre que a circunferência com centro no ponto $C(4,-1)$ e que passa no foco da parábola $x^2 + 16y = 0$ é tangente à diretriz da parábola.

3. Identifique a trajetória de uma partícula em movimento, em que a distância da partícula à reta $r : x + 3 = 0$ é sempre duas unidades maior que sua distância ao ponto $(1,1)$.

3.5 Cônicas Gerais

1. Determine os valores de m e q de modo que a equação $x^2 + qy^2 + 2mx = 1$ represente:

(a) uma circunferência	(b) uma elipse	(c) uma parábola	(d) uma hipérbole
(e) uma reta	(f) duas retas	(g) o conjunto vazio	(h) um ponto

2. Seja l a reta de equação $x = 2$ e considere o ponto $F(-1,0)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ tais que $||\overrightarrow{FP}|| = e\,\mathrm{dist}(P;l)$, sendo:

(a) $e = 1$ (b) $e = 1/2$ (c) $e = 2$.

3.6 Equação Geral do 2º Grau em Duas Variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.1}$$

A equação geral do 2º grau (3.1) pode representar qualquer uma das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole ou parábola) mas também pode representar um reta ou um par de retas. Tudo depende dos valores dos coeficientes A, B, C, D, E e F. Para identificar a natureza da cônica podemos usar a rega prática do *identificador* Δ. De fato: suponhamos que uma determinada cônica seja descrita pela equação (3.1) e seja $\Delta = B^2 - 4AC$.

(a) Se $\Delta = 0$, então a cônica é uma parábola;

(b) Se $\Delta < 0$, então a cônica é uma elipse;

(c) Se $\Delta > 0$, então a cônica é uma hipérbole.

A única informação que essa regra nos dá é sobre a natureza da cônica. Uma maneira mais eficiente de identificá-la consiste em efetuar mudanças de coordenadas (translação e/ou rotação) e escrever a equação na forma padrão:

Circunferência:	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	Elipse:	$\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Parábola:	$x^2 = 4py$ ou $y^2 = 4px$	Hipérbole:	$\pm\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

De forma geral, podemos dizer que a translação "elimina"os termos Dx e Ey do 1º grau, enquanto a rotação tem a finalidade de "eliminar"o termo Bxy da equação. A seguir apresentamos de modo sucinto como essas operações atuam na equação da cônica.

Do ponto de vista geométrico, são necessários 5 pontos para se determinar uma cônica e, no caso da parábola, 4 pontos são suficientes, tendo em vista a equação $B^2 - AC = 0$. Se, por exemplo, $A \neq 0$ então a equação (3.1) se reduz a

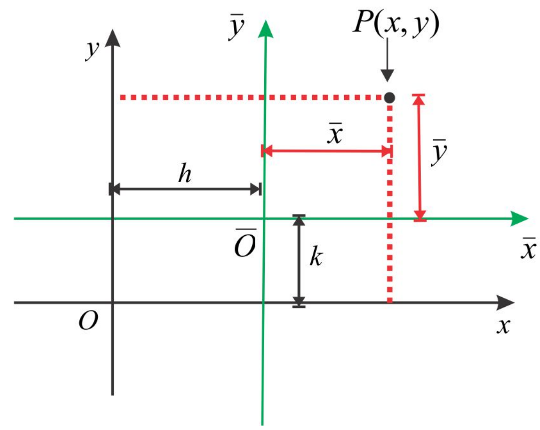
$$x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

onde $B' = B/A,\ C' = C/A$ ...etc, e essa última equação contém 5 coeficientes a determinar.

3.6.1 Translação de Eixos

A figura ao lado mostra as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ em dois sistemas de coordenadas: o sistema original xy e o sistema $\bar{x}\bar{y}$, obtido após a translação. Se $\bar{O}$ é o ponto (h, k), é fácil deduzir que as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do ponto P, no novo sistema de coordenadas, são determinadas pelo sistema:

$$\left|\begin{array}{l} \bar{x} = x - h \\ \bar{y} = y - k \end{array}\right.$$



Exemplo 3.2 (Identificando uma Cônica) *Consideremos a cônica de equação*

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 37 = 0.$$

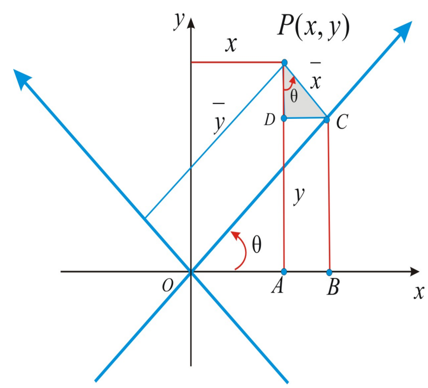
Completando os quadrados, a equação se escreve:

$$\begin{aligned} 9\left(x^2 - 2x + 1\right) - 9 + 4\left(y^2 + 8x + 16\right) - 64 + 37 &= 0 \Longleftrightarrow \\ 9(x-1)^2 + 4(y+4)^2 &= 36 \Longleftrightarrow \\ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação representa a elipse com focos $F(0, \pm\sqrt{5})$ *e centro no ponto* $\overline{O}\,(1, -4)$.

3.6.2 Rotação de Eixos

A figura ao lado mostra as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de um ponto $P(x, y)$ após uma rotação no sentido positivo (*anti-horário*) do sistema de coordenadas xy. Representemos por θ o ângulo de rotação e observando a figura, vamos determinar as relações entre as coordenadas do ponto P nos dois sistemas. Temos:



$$\left| \begin{array}{l} x = \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB} = \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\,\mathrm{sen}\theta \\ y = \overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP} = \bar{x}\,\mathrm{sen}\theta + \bar{y}\cos\theta \end{array} \right.$$

isto é:

$$\left| \begin{array}{l} \overline{x} = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \overline{y} = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{array} \right.$$

e na forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A matriz $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\,\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é denominada *matriz de rotação.*

Exemplo 3.3 *Após uma rotação de* $\theta = \pi/4$, *as coordenadas do ponto* $P\,(1, 1)$ *serão* $\overline{x} = 2$ *e* $\overline{y} = 0$. *De fato:*

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.4 (Uma Hipérbole Equilátera) *Vejamos como atua uma rotação de* $\pi/4$ *sobre a equação* $xy = 1$. *Usando as equações de mudança:*

$$\left| \begin{array}{l} x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \overline{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \overline{y}\cos\theta, \end{array} \right.$$

com $\theta = \pi/4$, *encontramos* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{y}$ *e* $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{y}$ *e a equação* $xy = 1$ *se transforma em:*

$$\frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{2} = 1$$

que representa a hipérbole equilátera.

3.6.3 O ângulo de rotação

Analisemos a equação geral do 2º grau (3.1) em duas situações.

■ SITUAÇÃO 1 $B = 0$ e A ou C não nulo

Nesse caso, a equação (3.1) se reduz a

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.2}$$

e uma simples translação (completamento de quadrados) leva a equação à forma padrão. Note que em (3.2) os coeficientes A e C não são ambos nulos, de modo que a equação pode representar qualquer uma das cônicas.

■ SITUAÇÃO 2 $B \neq 0$

Esse é o caso onde é necessário efetuar uma rotação no sistema de coordenados, de modo a eliminar o termo Bxy da equação original. A partir daí, o problema se reduz ao caso anterior.

A rotação de um ângulo θ nos leva às relações já estabelecidas:

$$\left| \begin{array}{l} x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \overline{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \overline{y}\cos\theta, \end{array} \right.$$

e levando os valores de x e y na equação (3.1), obtemos:

$$\begin{array}{l} A\left(\overline{x}^2\cos^2\theta + \overline{y}^2\sin^2\theta - 2\overline{x}\,\overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) + B\left(\overline{x}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \overline{xy}\cos^2\theta - \overline{x}\,\overline{y}\sin^2\theta - \overline{y}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) + \\ +C\left(\overline{x}\sin^2\theta + \overline{y}^2\cos^2\theta + 2\overline{x}\,\overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) + D\left(\overline{x}\cos\theta - \overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) + E\left(\overline{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \overline{y}\cos\theta\right) + F = 0 \end{array}$$

isto é:

$$\begin{array}{l} \left(A\cos^2\theta + C\sin^2\theta + B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\overline{x}^2 + \left[-2A\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2C\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right]\overline{x}\,\overline{y} + \\ + \left(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - B\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right)\overline{y}^2 + R\left(\theta, \overline{x}, \overline{y}\right) = 0, \end{array}$$

onde o resto $R(\theta, \overline{x}, \overline{y})$ não envolve os termos do 2º grau : $\overline{x}^2$, $\overline{y}^2$ ou $\overline{x}\,\overline{y}$. Para eliminarmos na última expressão o termo misto $\overline{x}\,\overline{y}$ é suficiente considerarmos

$$-2A \operatorname{sen}\theta \cos\theta + B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2C \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

e efetuando a simplificação encontramos:

$$\boxed{\operatorname{cotg} 2\theta = \frac{A-C}{B}}, \tag{3.3}$$

que é o ângulo procurado.

Exemplo 3.5 *Quando consideramos no exemplo precedente o ângulo de rotação $\theta = \pi/4$ para identificar a cônica $xy = 1$, tínhamos em mente a expressão (3.3). Para a equação $xy = 1$ temos $B = 1$, $F = -1$ e os outros coeficientes A, C, D e E iguais a zero e, portanto,* $\operatorname{cotg} 2\theta = 0$. *Logo, $2\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi/4$.*

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Por meio de uma translação escreva a equação da cônica na forma padrão e identifique seus elementos principais.

   (a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$ (a circunferência $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 25$)

   (b) $y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$ (a parábola $\bar{y}^2 = 4\bar{x}$)

   (c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$ (a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$)

   (d) $2x^2 + 3y^2 - 42x + 12y = 20$ (a elipse $2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 34$)

   (e) $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 8$ (a elipse $2\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 33$)

   (f) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$ (a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$)

2. Identifique as cônicas abaixo, escrevendo suas equações na forma padrão.

   (a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x = 32$ (hipérbole)

   (b) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y = 12$ (elipse)

   (c) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 6$ (elipse)

   (d) $xy + x - 2y + 3 = 0$ (hipérbole)

(e) $xy = k \quad k \neq 0$ (hipérbole)

3. Identifique a cônica que passa nos pontos $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,-1)$, $D(-3,2)$ e $E(-2,-1)$.

4. Por meio de uma rotação de $\theta = \operatorname{arctg}(4/3)$, simplifique a equação $9x^2+24xy+16y^2+80x-60y = 0$. Identifique a cônica e esboce seu gráfico.

3.6.4 O Foco e a Diretriz de uma Cônica

No Exercício 2 da Seção 3.5 consideramos a reta $l : x = 2$ e o ponto $F(-1,0)$ e vimos que a equação

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\| = e \cdot \operatorname{dist}(P;l) \tag{3.4}$$

descreve: uma parábola, quando $e = 1$; uma elipse, quando $e = 1/2$; e uma hipérbole, quando $e = 2$.

De forma geral, dados uma reta l, denominada **Diretriz**, um ponto F fora da reta l, denominado **Foco**, o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ que satisfazem a equação (3.4) representa:

(a) uma parábola, se $e = 1$;

(b) uma elipse, se $0 < e < 1$;

(c) uma hipérbole, se $e > 1$.

O número e denomina-se **Excentricidade** da cônica e, intutivamente, ele mede o *achatamento* da curva. Por exemplo, em uma elipse quando e se aproxima de 0, a curva se aproxima de uma circunferência (uma elipse sem achatamento).

Para identificar a natureza da cônica descrita por (3.4), seja D o pé da perpendicular baixada do ponto P à reta l, de modo que $\operatorname{dist}(P;l) = ||\overrightarrow{PD}||$. Efetuando uma translação seguida de uma rotação, se necessário for, podemos admitir que a reta l é o eixo y e que o foco está sobre o eixo x. Assim, o foco é $F(c,0)$ e a equação (3.4) nos dá $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\,|x|$, isto é,

$$\left(1 - e^2\right) x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = -c^2. \tag{3.5}$$

De acordo com o valor de e, a equação (3.5) pode representar uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Por exemplo, a cônica com um foco $F(0,0)$, diretriz $l : x = -5/2$ e excentricidade $e = 2/3$ é a elipse de equação:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{3}\,|x + 5/2|\,,$$

isto é, $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.1

1. **(a)** $(x+2)^2+(y-1)^2=25.$

   (b) $(x-1)^2+(y+2)^2=25.$

   (c) $(x-1)^2+y^2=4.$

   (d) $(x-1)^2+y^2=4.$

   (e) $x^2+y^2-6x+4y=12$ ou $(x-3)^2+(y+2)^2=25.$

   (f) $(x+1)^2+(y+2)^2=2.$

2. $(x-7)^2+(y-5)^2=25$ e $(x-1)^2+(y+3)^2=25.$

3. $x^2+y^2-2x-4y=0.$

4. $5\sqrt{2}.$

5. $x^2+y^2-20x+75=0.$

6. Um arco da circunferência $x^2+y^2=225.$

7. Centro $C\,(2,-1)$ e raio $R=3.$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.2

1. (a) $x^2/36+y^2/27=1;\ A\,(\pm 6,0)\,,\ B(0\pm\sqrt{27}),\ C\,(0,0);\ e=1/2.$

   (b) $(x-3)^2/12+y^2/16=1;\ A(\pm\sqrt{12},0),\ F(3,\pm 2), C\,(3,0);\ e=1/2.$

   (c) $x^2/25+y^2/16=1;\ F\,(\pm 3,0)\,,\ C\,(0,0);\ e=3/5.$

   (d) $x^2/20+(y-y_0)^2/36=1.$

   (e) $(x-2)^2/25+(y+1)^2/16=1;\ A_1\,(7,-1)\,,\ A_2\,(-3,-1)\,,\ B_1\,(2,3)\,,\ B_2(2,-5),\ F_1(5,-1),\ F_2\,(-1,-1)\,,\ C\,(2,-1);\ e=3/5.$

   (f) $4x^2+4y^2-xy=126.$

2. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}=1;\ e=\dfrac{\sqrt{40}}{7}.$

3. $y = x \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

4. $24\sqrt{3}$.

5. $84/5\ m$.

6. A elipse $\dfrac{(x-4)^2}{20} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$.

7. $\dfrac{(x-2)^2}{100} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$.

8. Centro $C\,(2,-3)$ e Focos $F\left(2 \pm \sqrt{7}, -3\right)$.

9. Os pontos $A\left(5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8}\right)$, $B\left(-5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8}\right)$, $C\left(-5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8}\right)$ e $A\left(5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8}\right)$.

10. Se α e β são os ângulos determinados no vértice P pela normal, mostre que $\tan\alpha = \tan\beta = cy_0/b^2$.

11. Focos $F_1\left(0, \sqrt{7}\right)$ e $F_1\left(0, -\sqrt{7}\right)$; Centro $C\,(0,0)$.

12. $x + y = 2$ e $9x - 191y - 218 = 0$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.3

1. (a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$; $V\,(\pm 3, 0)$; $C\,(0,0)$; $e = 5/3$; $y = \pm 4x/3$.

   (b) $\dfrac{4\,(y+1)^2}{25} - \dfrac{4\,(x-2)^2}{119} = 1$; $V_1\,(2, 3/2)$; $V_2\,(2, 7/2)$ $C\,(2,-1)$; $e = 12/5$; $y = \pm 5x/\sqrt{119}$.

   (c) $\dfrac{(y-3)^2}{16} - \dfrac{(x-2)^2}{20} = 1$; $F_1\,(2,-3)$; $F_2\,(2,9)$ $C\,(2,3)$; $y = \pm x/5$.

   (d) $y^2 - 4x^2 = 4$; $F(0, \pm\sqrt{5})$; $C\,(0,0)$; $e = \sqrt{5}/2$

   (e) $xy = -2$.

2. $A = 12$.

3. A hipérbole $4x^2 - y^2 = 36$.

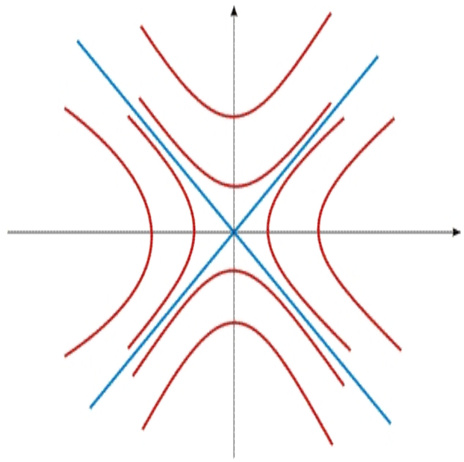
4. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

5. $e = \sqrt{13}/3$, $C\,(1,-2)$, $F(1, 2 \pm \sqrt{13})$ e assíntotas: $3x + 2y = 1$ e $3x - 2y = 7$.

6. 13 e 5.

7. $\dfrac{9x^2}{25} - \dfrac{9y^2}{225} = 1;\ y = \pm 3x.$

8.



EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.4

1. (a) $y^2 = 12x, \quad V(0,0)$.

   (b) $x^2 = -8y, \quad V(0,0)$.

   (c) $y^2 = -12(x-1), \quad V(1,0)$.

   (d) $(x+4)^2 = -4(y-2), \quad V(-4,2)$.

   (e) $y^2 = -8(x-2)$, diretriz $x = 4$.

   (f) $(y+1)^2 = -4(x-4)$, Foco $F(3,-1)$, diretriz $x = 5$.

   (g) $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$.

   (h) $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

   (i) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

   (j) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$.

2. O foco da parábola é $F(0,-4)$ e a diretriz é a reta $l : y = 4$. A equação da circunferência é $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$ e para concluir que esta circunferência é tangente à diretriz l, basta observar que $\operatorname{dist}(C; l) = 5$.

3. A parábola $(y-1)^2 + x = 4x$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.5

1. (a) Se $q = 1$ a equação representa a circunferência $(x+m)^2 + y^2 1 + m^2$.

   (b) Se $q > 0$ a equação representa a *família* de elipses $(x+m)^2 + qy^2 = \left(1+m^2\right)$.

   (c) Fazer

   (d) Se $q < 0$ a equação representa a *família* de hipérboles $(x+m)^2 - |q|\, y^2 = \left(1+m^2\right)$.

   (e) Fazer

   (f) Se $q = 0$ a equação representa o par de retas $x = -m \pm \sqrt{1+m^2}$.

   Os lugares geométricos: reta, ponto e parábola, como também o conjunto vazio, não podem ser representados pela equação dada

   (a) a parábola $y^2 = -6x + 3$.

   (b) a elipse $3\,(x+2)^2 + 4y^2 = 12$.

   (c) a hipérbole $3\,(x-3)^2 - y^2 = 42$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.6

1. x

2. x

3. Admita a cônica sob a forma

$$x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

   e por substituição dos pontos na equação obtenha a hipérbole $9x^2 + 8xy - 13y^2 - x + 19y = 22$.

4. a parábola $\overline{x}^2 = 4\overline{y}$.