



2.1 Fundamentos Básicos

1. Classifique as afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando cada resposta.
 - (a) Um ponto $A(x, y, z)$ pertence ao eixo z se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.
 - (b) Um ponto $A(x, y, z)$ pertence ao plano xz se, e somente se, $y = 0$.
 - (c) Dados dois pontos A e B , existe um único plano que os contém.
 - (d) Se um plano α é paralelo aos vetores \vec{u} e \vec{v} , então α é ortogonal aos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
 - (e) Se os pontos A , B e C não estão alinhados, então existe um único plano que os contém.
 - (f) Dados um ponto A e um vetor \vec{v} , existe uma única reta passando por A , ortogonal a \vec{v} .
 - (g) Paralelo ao plano xy , existe um único plano que contem o ponto $A(1, 1, 1)$.
 - (h) Se os planos α , β e γ se interceptam dois a dois segundo uma reta, então os três planos têm uma reta em comum.
 - (i) Duas retas não paralelas sempre têm um ponto em comum.
 - (j) Se l e r são duas retas concorrentes, existe um único plano que as contém.

2. Enumere a coluna da direita, observando se o ponto pertence ao lugar geométrico.

(1) $A(0, 0, 1)$	<input type="checkbox"/> plano $\alpha : x + y + z - 6 = 0$
(2) $B(0, 1, 0)$	<input type="checkbox"/> plano xy
(3) $C(1, 0, 0)$	<input type="checkbox"/> reta $l : x = t, y = t, z = t$
(4) $D(x, y, 0)$	<input type="checkbox"/> eixo x
(5) $E(0, y, z)$	<input type="checkbox"/> interseção de $l : x = t, y = -t, z = t$ com $\alpha : 3x - 2y + z = 6$
(6) $F(x, 0, z)$	<input type="checkbox"/> plano $y = 0$
(7) $G(1, 2, 3)$	<input type="checkbox"/> eixo z
(8) $H(1, 1, 1)$	<input type="checkbox"/> reta $r : x - 1 = y - 2 = z - 1$
(9) $I(1, 2, 1)$	<input type="checkbox"/> interseção dos planos $z = 0$ e $x = 0$
(10) $J(1, -1, 1)$	<input type="checkbox"/> plano $x = 0$

3. Seja π o plano de equações paramétricas: $x = 4 - \lambda + 2\mu$, $y = 2 + \lambda$ e $z = 3\lambda - \mu$.

- (a) Verifique que o ponto $A(4, 2, 0)$ jaz no plano π ;
 - (b) Determine dois outros pontos B e C do plano π ;
 - (c) Encontre dois vetores \vec{a} e \vec{b} paralelos ao plano π ;
 - (d) Determine a equação cartesiana do plano π .
4. O plano π passa nos pontos $A(3, 1, 2)$, $B(4, -1, -1)$ e $C(2, 0, 2)$. Descreva o plano π nas formas cartesiana e paramétrica.
5. Determine o plano α que contém o ponto $A(2, 1, -1)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Os pontos $B(0, -1, 0)$ e $C(2, 1, -1)$ jazem nesse plano? Justifique.
6. Determine quatro vetores LD e não colineares, de normas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, paralelos ao plano $\alpha : 3x + 2y - z = 4$.
7. Determine o plano que contém o eixo oz e passa pelo ponto $A(4, 3, 1)$.
8. A equação $x = 1$ representa: um ponto (em \mathbb{R}); uma reta (em \mathbb{R}^2); um plano (em \mathbb{R}^3). Se α representa o plano de equação $x = 1$, determine:
- (a) Dois pontos do plano α
 - (b) um vetor \vec{n} , normal ao plano α , de comprimento 3.
9. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $A(1, 2, 2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.
10. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos $A(2, -1, 3)$ e $B(3, 1, 2)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$.
11. Determine o valor de m de modo que o ponto $A(m, m + 2, 2)$ pertença ao plano $\pi : 2x - y - 3z + 5 = 0$. O plano π passa pela origem? De forma genérica, como deve ser a equação de um plano que passa pela origem?
12. Descreva, de forma genérica, como se determina um vetor de norma λ ortogonal a um plano dado. Imagine o plano dado na forma cartesiana ou na forma paramétrica.
13. Com base no exercício precedente, determine um vetor de comprimento 15, normal ao plano de equações paramétricas $x = 3 - 2\lambda - \mu$, $y = 1 + \lambda - 2\mu$, $z = -\lambda - \mu$.

14. O ponto $A(2, -1, -1)$ é o pé da perpendicular baixada da origem a um plano π . Determine a equação cartesiana do plano π .
15. Seja π o plano de equação $2x - 5y + 4z = 3$. Construa uma base ortonormal negativa $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, de modo que \vec{u} seja normal e \vec{v} e \vec{w} sejam paralelos ao plano π .
16. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos $A(7, 2, -3)$ e $B(5, 6, -4)$ e é paralelo ao eixo x .
17. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $5x + 2y - 3z + 6 = 0$.
18. Um plano α contém o eixo oz e é paralelo ao vetor na direção da bissetriz do ângulo entre \vec{i} e \vec{j} . Determine a equação e dê uma idéia geométrica da posição do plano α .
19. Considere os pontos $A(7, 2, -3)$ e $B(5, 6, -4)$. Determine a equação do plano que passa pelo ponto médio e é ortogonal ao segmento AB .
20. Verifique se o pares de planos são paralelos ou perpendiculares.

$$(a) \begin{cases} x = 1 - \lambda + 2\mu, & y = 3\lambda - \mu, & z = 2 + 2\lambda - 2\mu \\ x = 2\lambda + 3\mu, & y = 1 + \mu, & z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ 12x + 6y - 12z = 4 \end{cases}$$

21. Determine os valores de m e n para que os seguintes pares de equações representem planos perpendiculares.

$$(a) \begin{cases} 3x - 5y + mz = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + my + 3z = 1 \\ nx + y - 3z = 6 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -2x + 7y - 3z = 0 \\ x + my + nz = 1 \end{cases}$$

22. Determine os valores de m e n para que os seguintes pares de equações representem planos paralelos.

$$(a) \begin{cases} nx - 6y - 6z = 0 \\ 2x + my + 3z = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + my + 2z = 0 \\ 3x - y + nz = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} mx + 3y - 2z = 1 \\ 2x - 5y - nz = 0 \end{cases}$$

23. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ equidistantes de $A(-2, 1, -2)$ e $B(2, -2, 3)$.
24. Em cada caso, determine a equação do plano que atende às condições especificadas.

(a) Contém o ponto $A(1, -2, 4)$ e é paralelo ao plano xz .

- (b) Contém o ponto $B(2, 2, -1)$ e é paralelo ao eixo y e ao eixo z .
- (c) Contém os pontos $A(1, -1, -2)$ e $B(3, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 5$.
- (d) Contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e é perpendicular aos planos $2x - y + 3z = 0$ e $x + 2y + z = 1$.

2.2 Equações da Reta

- Determine as equações dos eixos coordenados na forma paramétrica e como interseção de dois planos.
- A reta l passa no ponto $A(1, 2, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Determine as equações da reta l nas formas:
 - vetorial
 - paramétrica e
 - simétrica.
- Determine as equações paramétricas da reta que passa nos pontos $A(0, 2, 3)$ e $B(5, 0, 6)$.
- Considere a reta de equação vetorial $\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$, $t \in \mathbb{R}$. Escreva as equações da reta na forma (i) simétrica e (ii) paramétrica.
- Determine a equação vetorial do segmento de reta que une os pontos A e B .
- Descreva a reta $x = 2 - s$, $y = 4$, $z = 3s$ como interseção de dois planos.
- Obtenha as equações paramétricas e vetorial da reta

$$l : x - 1 = \frac{5y + 4}{2} = -6z + 9.$$

- Em cada caso, obtenha um vetor unitário paralelo à reta r .
 - $r : x = 1 - 2t$, $y = -5 + t$, $z = 2 + 4t$
 - $r : x - 1 = -z/7$; $y = 3$.
- Determine as equações da reta que passa pela origem e é perpendicular às retas:

$$r_1 : x = 2 + t, y = 3 + 5t, z = 5 + 6t \quad r_2 : x = 1 + 3s, y = s, z = -7 + 2s.$$

- Seja r a reta interseção dos planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x + 3y - z = 4$. Descreva a reta r na forma paramétrica.

11. Determine as equações paramétricas da reta r paralela aos planos $3x + 3y + z = -1$ e $x + y - z = 0$ e que passa no ponto $A(-1, 1, 0)$.
12. Decomponha o vetor $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ nas direções \vec{a} e \vec{b} , sendo \vec{a} e \vec{b} , respectivamente, paralelo e perpendicular à reta

$$r : \frac{x - 2}{2} = \frac{1 - y}{3} = z + 1.$$

13. Determine o plano que contém as retas r_1 e r_2 , sendo

$$r_1 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : x = 1 + 8t, \quad y = 5 - 6t, \quad z = -1 - 2t.$$

14. Determine as equações paramétricas da reta r que passa no ponto $A(1, 2, -1)$, é paralela ao plano $x + y = 5$ e perpendicular ao vetor $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$.
15. Encontre, na forma paramétrica, a reta bissetriz do ângulo agudo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} 4x - 3y - 65 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} 7x - 24y + 55 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

2.3 Posições Relativas: interseções, ângulos e distâncias

1. Descreva, de forma breve, como você decide quando duas retas são:
 - (a) coincidentes
 - (b) paralelas
 - (c) concorrentes
 - (d) reversas.
2. Em cada caso, verifique se as retas r_1 e r_2 são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas. Determine o ângulo e, caso exista, a interseção entre elas.

(a) $r_1 : x = 1, y = t, z = 1$	(a) $r_2 : x = s, y = 0, z = 1$
(b) $r_1 : x - 3 = \frac{z - 2}{7}; y = 4$	(b) $r_2 : \frac{x - 6}{2} = \frac{z - 4}{14}; y = 8$
(c) $r_1 : x = 1 + 3t, y = 2 + 5t, z = 2 + 7t$	(c) $r_2 : x = 7 + 6s, y = 12 + 10s, z = 6 + 14s$
(d) $r_1 : x + 1 = \frac{y - 1}{2}; z = 5$	(d) $r_2 : x = 1 + 4s, y = 5 + 2s, z = 2 + 3s$
(e) $r_1 : x = 1, y = 3 - s, z = 5 + 2s$	(e) $r_2 : x = -4 + 5t, y = 3 + 2t, z = -2 + 3t$
3. Em cada caso, estude a posição da reta r em relação ao plano π . Determine o ângulo entre r e π e, caso exista, o ponto onde a reta *fura* o plano.

- (a) $r : x = -8 + 15t, y = 5 - 9t, z = 0$ $\pi : 3x + 5y = 1$
 (b) $r : x - 3 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 2}{4}$ $\pi : x = 5 - 2\lambda, y = 1 - \lambda + 4\mu, z = 2 + \lambda - 2\mu$
 (c) $r : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = 1 + s$ $\pi : x = 1 - \lambda - 4\mu, y = -2 + 2\lambda - 8\mu, z = 1 + \lambda - \mu$
 (d) $r : \vec{OP} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1)$ $\pi : x - 2y - 4z + 5 = 0.$

4. Em cada caso, determine a posição relativa e o ângulo entre os planos π_1 e π_2 .

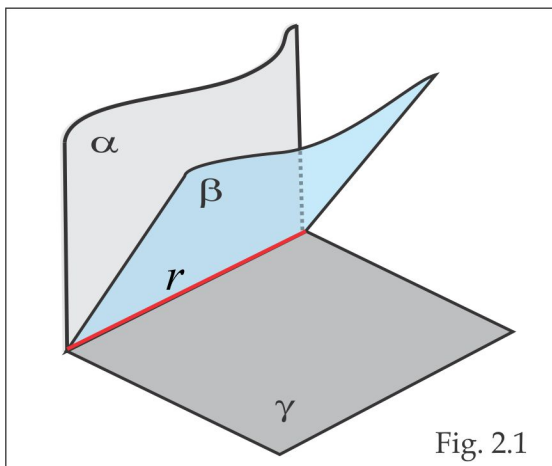
- (a) $\pi_1 : 2x + y - z = 1$ $\pi_2 : 3x - 5y + z = 4$
 (b) $\pi_1 : x + 2y + 3z = 1$ $\pi_2 : 2x + 4y + 6z = 2$
 (c) $\pi_1 : 2x - 2y + 6z = 6$ $\pi_2 : x = -3\lambda - \mu, y = -\mu, z = \lambda$
 (d) $\pi_1 : 3x + 6y + 3z = 27$ $\pi_2 : 2x + 4y + 2z = 14$

2.4 Interseção de 3 Planos

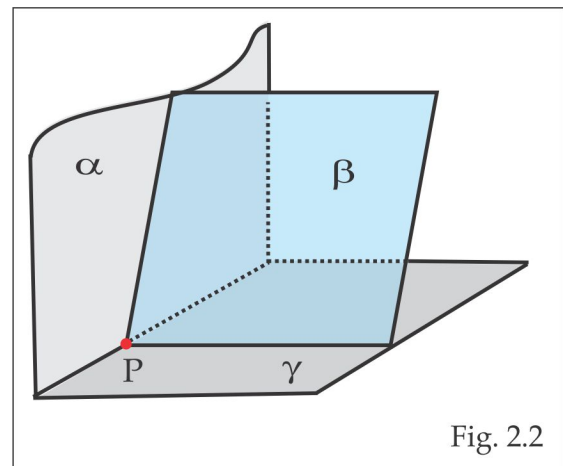
Representemos por $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ e \vec{n}_γ os vetores normais aos planos α, β e γ , respectivamente.

(1) Se $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] \neq 0$, então os planos α, β e γ se interceptam em um único ponto, cujas coordenadas podem ser encontradas pela Regra de Cramer, por Escalonamento ou qualquer outro método. (Fig. 2.2)

(2) No caso em que $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ e os três planos α, β e γ não são paralelos (nem coincidem) então ou eles se interceptam segundo uma reta ou eles não têm ponto em comum. Neste caso, para decidir sobre a interseção dos planos proceda do modo seguinte: primeiro encontre, caso exista, a reta r interseção entre dois deles, por exemplo, entre α e β e, depois, verifique se essa reta está contida no plano γ . Caso afirmativo a reta r será a interseção dos 3 planos. (Fig. 2.1, Fig. 2.3 e Fig.2.4)



$$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0 \text{ e } \vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n}_\gamma = r$$



$$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] \neq 0 \text{ e } \vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n}_\gamma = \{P\}$$

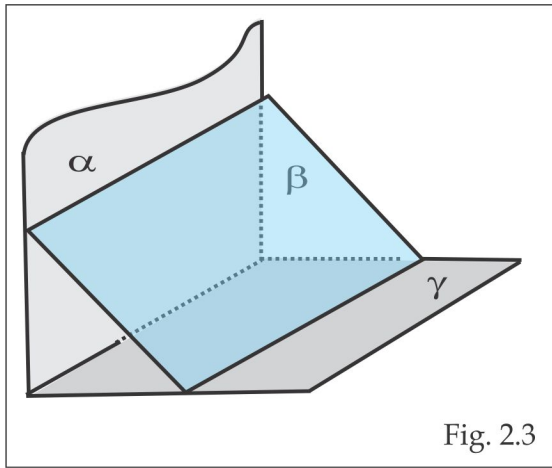


Fig. 2.3

$$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0 \text{ e } \vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n}_\gamma = \Phi$$

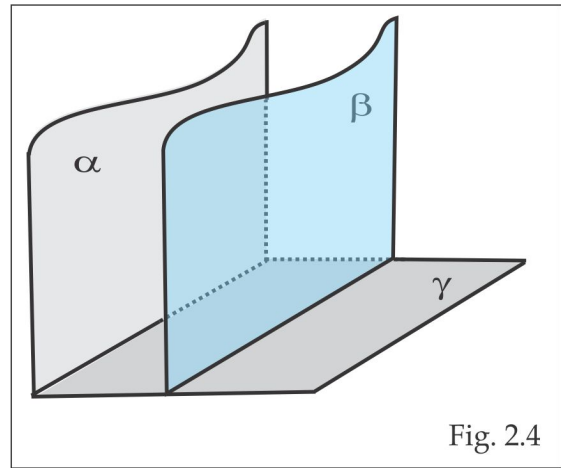


Fig. 2.4

$$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0 \text{ e } \vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n}_\gamma = \Phi$$

As Figuras 2.1 e 2.2 correspondem ao caso em que os três planos se interceptam, enquanto as Figuras 2.3 e 2.4 ilustram situações onde não há ponto comum aos três planos, embora exista uma reta comum a dois deles.

1. Discuta e determine, caso exista, a interseção entre os planos π_1 , π_2 e π_3 .

- | | | |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (a) $\pi_1 : x + y + z = 0$ | $\pi_2 : x + 2y + z = 1$ | $\pi_3 : x + y + 3z = 2$ |
| (b) $\pi_1 : x + y - 4z = 0$ | $\pi_2 : x - y = 0$ | $\pi_3 : x + 2y - 6z = 0$ |
| (c) $\pi_1 : x + 2y - z = 0$ | $\pi_2 : 2x + 4y - 2z = 2$ | $\pi_3 : 3x - y + z = 0$ |
| (d) $\pi_1 : x + 2y + z = 0$ | $\pi_2 : 2x + 4y - z = -1$ | $\pi_3 : x + 2y = 0$ |
| (e) $\pi_1 : x + y + z = 0$ | $\pi_2 : -x + 2y - z = -4$ | $\pi_3 : 3x + y + 3z = 0$ |
| (f) $\pi_1 : 2x - y + z = -1$ | $\pi_2 : 3x + y + z = 1$ | $\pi_3 : 6x + 2y + 2z = 0$ |

2.5 Questões de Revisão

- Estude as interseções da reta $r : x = 3 + 2t, y = -1 + 5t, z = 2 - t$ com os planos e eixos coordenados.
- Determine as interseções do plano $\pi : 3x + 2y - z = 5$ com os eixos e com os planos coordenados.
- Mostre que as retas

$$r_1 : x = 2 + 3t, y = 1 + 2t, z = t \text{ e } r_2 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = z+1$$

são paralelas e determine o plano π que as contém.

4. Mostre que as retas

$$r_1 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = z \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x-3}{5} = y-1 = \frac{z}{3}$$

são concorrentes e determine o plano π que as contém.

5. Considere a reta $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{2}$ e o plano $\pi : x - 3y + 6z + 7 = 0$. Determine, caso exista, o(s) valor(es) de m de modo que:

(a) r seja paralela a π (b) r esteja contida em π (c) r intercepte π em um ponto.

6. Determine os valores de m e c para que a reta $r : \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{5-z}{2}$ e o plano $\pi : 3x - 2y + cz + 1 = 0$ sejam perpendiculares e encontre o ponto onde a reta intercepta o plano.

7. Considere a reta $r_1 : x = 2 + 3t, y = t, z = -t$. Determine duas retas r_2 e r_3 , de modo que r_1 e r_2 sejam reversas e r_1 e r_3 concorrentes.

8. Calcule a distância do ponto $A(1, 2, 2)$ ao plano π que passa pelos pontos $B(-1, 0, 0)$, $C(1, 0, 1)$ e $D(-2, 3, 0)$.

9. Considere o ponto $A(1, 2, -1)$ e determine o ponto B , simétrico de A , em relação:

(a) à origem (b) à reta $r : x = 1 + t, y = t, z = 1t$
 (c) ao ponto $B(3, 1, 1)$ (d) ao plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$.

10. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y - z = 1$ e $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Encontre a reta que passa pelo ponto $A(1, 0, 1)$ e intercepta r ortogonalmente.

11. Uma reta r jaz no plano $\pi : x - y + z = 7$, passa no ponto $A(3, -3, 1)$ e é ortogonal à reta $l : x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$. Ache as equações da reta r e sua distância à origem.

12. Considere as retas reversas

$$r_1 : x = -1 + t, y = -3 + 2t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : x = -2 + s, y = 1 + s, z = s.$$

Determine um ponto A na reta r_1 e um ponto B na reta r_2 , de modo que a reta que passa por A e B intercepta r_1 e r_2 ortogonalmente.

13. Determine a reta que passa no ponto $A(1, -2, 1)$ e intercepta as retas r_1 e r_2 do exercício precedente.

14. Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, 0)$ que satisfazem à equação $x^2 - y^2 = 0$.
15. Encontre o ponto P_1 da reta $r : \begin{cases} 2x - y + z - 6 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ mais próximo de $P_0(1, 2, 1)$ e calcule $\text{dist}(P_0; r)$.
16. Verifique que a reta $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$ está contida no plano $\pi : x - 2y + z = 6$.
17. Encontre dois planos ortogonais cuja interseção é a reta $r : x = -1 - 2t, y = -1 + 9t, z = 7t$.
18. Seja α o plano $z = 0$ e determine dois planos não paralelos β e γ tais que: (i) $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ e $\alpha \cap \gamma \neq \emptyset$ e (ii) $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$.
19. Encontre a reta r que passa no ponto $P_0(3, 6, 4)$, intercepta o eixo z e é paralela ao plano $\pi : x - 3y + 5z = 6$.
20. Sejam A, B e C as interseções do plano $\pi : 4x + 8y + z = 16$ com os eixos coordenados. Calcule a área do triângulo ABC .
21. Determine a equação do plano que passa nos pontos $A(1, 2, 1)$ e $B(1, 3, 3)$ e faz com o plano $\pi : x + y + 2z = 11$ um ângulo de $\pi/3$ rad.
22. Calcule a altura do tetraedro de vértices $A(1, 6, 2), B(2, 3, 0), C(-2, -3, 4)$ e $D(0, 6, 0)$, baixada do vértice A .
23. Dado um ponto P_0 , a equação $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ representa o plano que passa por P_0 e é normal ao vetor \vec{n} . Identifique o lugar geométrico descrito pela desigualdade $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} > 0$.
24. Determine sob que condições os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ estão do mesmo lado do plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.
25. Verifique que os planos $\pi_1 : x + 2y - z = 21$ e $\pi_2 : -2x - 4y + 2z = 10$ são paralelos e encontre o plano α equidistante de π_1 e π_2 .
26. Determine o plano π que contém os pontos $A(1, 2, 3)$ e $B(-2, 1, 1)$, mas não intercepta o eixo x .
27. Considere a reta $r : x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$. Interprete geometricamente as condições abaixo impostas à reta r .
 - (a) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$
 - (b) $a = 0$
 - (c) $a = 0$ e $b = 0$
 - (d) $5a - 3b + 7c = 0$.

28. Se α , β e γ são os ângulos diretores de um vetor unitário \vec{u} , mostre que a equação do plano que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é normal ao vetor \vec{u} é:

$$(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \cos \beta + (z - z_0) \cos \gamma = 0.$$

29. Interprete geometricamente as condições abaixo impostas ao plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

(a) $a = 0$ (b) $b = 0$ (c) $c = 0$ (d) $a = 0$ e $b = 0$ (e) $d = 0$.

30. Considere os pontos $A(2, -4, 6)$, $B(-4, 2, 2)$ e $C(1, -1, 0)$. Determine a mediatriz do segmento AB , que passa no ponto C .

31. Ache o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ cuja distância ao plano $x - y = 0$ é igual a 9.

32. Determine o baricentro do triângulo de vértices $A(-1, -3, -4)$, $B(4, -2, 7)$ e $C(2, 3, -8)$.

33. Determine λ de modo que o ângulo entre as retas $r_1 : x = 1 + \lambda t, y = 1 + 3t, z = 5t$ e $r_2 : x = 1 + 2t, y = -3 - t, z = -1 + 2t$ seja $\pi/4$.

34. Determine, na forma paramétrica, as retas interseções do plano $\pi : x + y + z = 1$ com os planos coordenados. Esboce no 1º octante o plano π e destaque as interseções.

35. Encontre o ponto do plano $\alpha : x + 3y - z + 6 = 0$ mais próximo do ponto $A(1, 1, 3)$.

36. Verifique que as retas $r_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{-5} = \frac{z-2}{3}$ e $r_2 : x = 3 - 2t, y = -14 + 5t, z = 8 - 3t$ são coincidentes.

37. Determine condições para que a reta $r_1 : x = mz + p, y = nz + q$ esteja contida no plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

38. Observe atentamente a Figura 2.5 abaixo, onde as retas r_1 e r_2 são descritas por:

$$r_1 : x = 1 - t, y = 1 + t, z = 2 - 2t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 2s, y = 1 + s, z = -2 - 3s.$$

- (a) Para a reta r_i , $i = 1, 2$, selecione um ponto P_i e um vetor paralelo (diretor) \vec{v}_i ;
 (b) Verifique que: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ e $r_1 \cap r_2 = \emptyset$. Deduza que as retas r_1 e r_2 são reversas;
 (c) Encontre o plano β que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1 ;
 (d) Encontre o plano α que contém o ponto P_2 e é paralelo aos vetores \vec{v}_2 e $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;

- (e) Determine o ponto A_1 de interseção da reta r_1 com o plano α ;
- (f) Encontre a reta l que passa pelo ponto A_1 e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Deduza que l é ortogonal às retas r_1 e r_2 ;
- (g) Determine o ponto A_2 de interseção da reta l com a reta r_2 ;
- (h) Verifique que $\overrightarrow{A_1A_2} = \text{Proj}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \overrightarrow{P_1P_2}$, isto é, $\overrightarrow{A_1A_2}$ é a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre o vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;
- (i) Considerando que a distância entre as retas r_1 e r_2 é o número real $\text{dist}(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{A_1A_2}\|$, deduza a seguinte fórmula para a distância entre duas retas reversas:

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}. \tag{2.1}$$

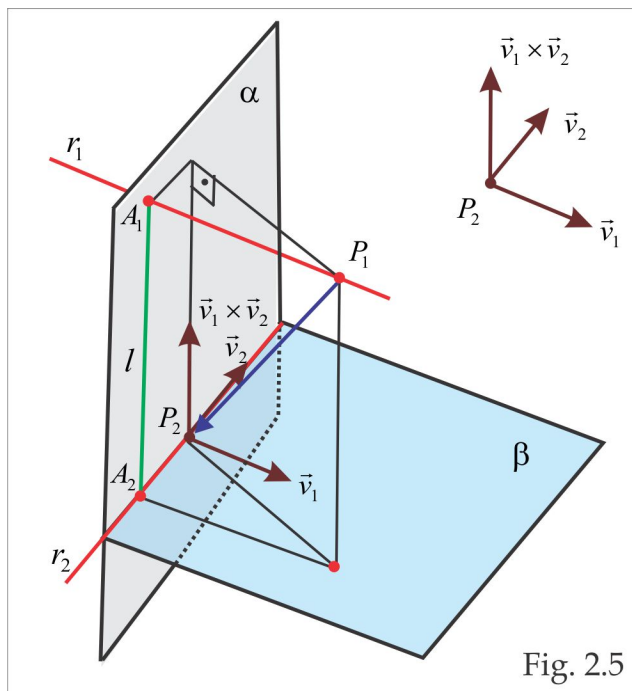


Fig. 2.5

Observação 2.1 A fórmula da distância (2.1) se aplica, também, no caso em que as retas são concorrentes. Neste caso, é claro, $\text{dist}(r_1, r_2) = 0$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.1

1. V, V, F, V, V, F, V, F, F, V.
2. De cima para baixo, a seqüência é: 7, 4, 8, 3, 10, 6, 1, 9, 2 e 5.
3. (a) o ponto A é obtido com $\lambda = 0$ e $\mu = 0$; (b) com $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, obtemos $B(3, 3, 3)$ e com $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ obtemos $C(6, 2, -1)$; (c) $\vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{AC} = 2\vec{i} - \vec{k}$; (d) $\pi : x - 5y + 2z + 6 = 0$.
4. $x - y + z - 4 = 0$ ou $x = 3 + \lambda - \mu$, $y = 1 - 2\lambda - \mu$, $z = 2 - 3\lambda$.
5. $\alpha : x - 2y + 3z + 3 = 0$, $B \notin \alpha$ e $C \in \alpha$.
6. Dados A, B, C, D e E em α , construímos : $\vec{v}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, $\vec{v}_2 = \frac{2\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$, $\vec{v}_3 = \frac{3\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}$ e $\vec{v}_4 = \frac{4\vec{AE}}{\|\vec{AE}\|}$.
7. $3x - 4y = 0$.
8. (a) qualquer ponto do tipo $(1, y, z)$ está no plano; (b) $\vec{n}_\alpha = 3\vec{i}$.
9. $x = 1 + 2\lambda + \mu$, $y = 2 + \lambda - \mu$, $z = 2 - \lambda - 2\mu$; ou $x - y + z = 1$.
10. $9x - y + 7z - 40 = 0$.
11. $m = 3$ e o plano não passa pela origem. Um plano que contém a origem é do tipo $ax + by + cz = 0$.
12. Dado $\pi : ax + by + cz + d = 0$, seja $\vec{v} = \frac{\lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
13. $\vec{n} = \frac{15}{\sqrt{35}}(-3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$.
14. $2x - y - z = 6$.
15. $\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{k})$ e $\vec{w} = \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})$.
16. $y + 4z + 10 = 0$.
17. $x = \lambda + 2\mu$, $y = -\lambda - 5\mu$, $z = \lambda$ ou $5x + 2y - 3z = 0$.
18. $\alpha : x - y = 0$.
19. $2x - 4y + z + \frac{15}{2} = 0$.

20. (a) perpendiculares (b) paralelos.
21. (a) $m = 6$ (b) $m + 2n = 9$ (c) $7m - 3n = 2$.
22. (a) $m = 3, n = -4$ (b) $m = -2/3, n = 3$ (c) $m = -6/5, n = -10/3$.
23. o plano $4x - 3y + 5z = 4$ que passa no ponto médio e é ortogonal ao segmento AB .
24. (a) $y + 2 = 0$ (b) $x - 2 = 0$ (c) $9x - 3y - 4z - 20 = 0$ (d) $7x - y - 5z + 10 = 0$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.2

1. eixo $x : x = t, y = 0, z = 0$; eixo $y : x = 0, y = t, z = 0$; eixo $z : x = 0, y = 0, z = t$. O eixo x pode ser visto como interseção dos planos $y = 0$ e $z = 0$.
2. (a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$; (b) $x = 1 + 3t, y = 2 - t, z = 2 + t$ (c) $\frac{x-1}{3} = 2 - y = z - 2$.
3. $x = 4t, y = 2 - 2t, z = 3 + 3t$.
4. (a) $x - 1 = 2 - y = z - 3$ (b) $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3 + t$.
5. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, 0 \leq t \leq 1$ ou $P = (1 - t)A + tB, 0 \leq t \leq 1$.
6. $3x + z = 6; y = 4$.
7. $x = 1 + t, y = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t, z = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}t$ ou $\overrightarrow{OP} = (1, -4/5, 3/2) + t(\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} - \frac{1}{6}\vec{k})$.
8. (a) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$ (b) $\vec{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\vec{i} - 7\vec{k})$.
9. $x = 4t, y = 16t, z = -14t$.
10. $r : x = -4t, y = 1 + 3t, z = -1 + t$.
11. $r : x = -1 - 4t, y = 1 + 4t, z = 0$.
12. Considerando $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \frac{20}{17}\vec{i} + \frac{19}{17}\vec{j} + \vec{k}$, encontramos $\vec{v} = -\frac{3}{14}\vec{a} + \frac{17}{14}\vec{b}$.
13. $8x + 5y + 17z - 16 = 0$.
14. $r : x = 1 - t, y = 2 + t, z = -1 - t$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.3

1. Usar os vetores diretores e a distância.
2. (a) concorrentes em $A(1, 0, 1)$ e $(r_1, r_2) = \pi/2$ (b) paralelas (c) paralelas (d) reversas e $\cos(r_1, r_2) = \frac{8}{\sqrt{145}}$; (e) concorrentes em $A(1, 5, 1)$ e $\cos(r_1, r_2) = \frac{4}{\sqrt{190}}$.
3. (a) $r \subset \pi$ (b) $r \perp \pi$; $A(3, 2, 2)$ (c) $r // \pi$ (d) $r // \pi$.
4. (a) ortogonais, com reta comum $r : x = \frac{9}{13} + \frac{4}{13}t, y = -\frac{5}{13} + \frac{5}{13}t, z = t$ (b) coincidentes (c) paralelos (d) paralelos.

EXERCÍCIO COMPLEMENTAR 2.4

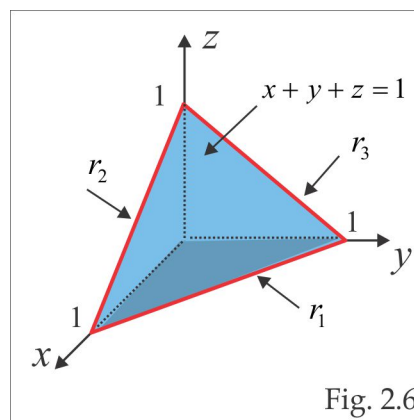
1. (a) $P(-2, 1, 1)$ (b) $x = 2t, y = 2t, z = t$ (c) não há interseção (d) não há interseção (e) não há interseção (f) não há interseção.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.5

1. A reta intercepta os planos xy , xz e yz , respectivamente nos pontos $A(7, 9, 0)$, $B(\frac{17}{5}, 0, \frac{9}{5})$ e $C(0, -\frac{17}{2}, \frac{7}{2})$. Não há interseção com os eixos coordenados.
2. O plano π intercepta os eixos x , y e z , respectivamente, nos pontos $A(5/3, 0, 0)$, $B(0, 5/2, 0)$ e $C(0, 0, -5)$. A interseção com o plano xy é a reta $r_1 : x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, y = t, z = 0$; com o plano xz a reta $r_2 : x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t, y = 0, z = t$; e com o plano yz a reta $r_3 : x = 0, y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t, z = t$.
3. $\pi : 2x - 4y + 2z = 0$.
4. $\pi : 5x - 4y - 7z = 11$.
5. (a) $m = 5$ (b) não existe um tal m (c) $m \neq 5$.
6. $m = -6, c = 1; A(-1, 1, 4)$.
7. $r_2 : x = t, y = 1 + t, z = t; r_1 : x = 2, y = t, z = t$.
8. $\text{dist}(A; \pi) = 4/\sqrt{46}$.

9. (a) $B(-1, -2, 1)$ (b) $B(5, 0, 3)$ (c) $B(5/3, -4/3, 5/3)$ (d) $B(-3, 0, 1)$.
10. $x = 1 - 31t, y = 23t, z = 1 - 20t$.
11. $x = 3 - 5t, y = -3 - 2t, z = 1 + 3t; \text{dist}(O; r) = \sqrt{\frac{343}{19}}$.
12. $A(7/2, 6, 9/2)$ e $B(3, 6, 5)$.
13. A reta $x = 1, y = 1 + 3t, z = 2 + t$.
14. As retas $r_1 : x - y = 0, z = 0$ e $r_2 : x + y = 0, z = 0$.
15. $P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right), \text{dist}(P_0; r) = \sqrt{42}/3$.
16. Na forma paramétrica, temos: $r : x = 3 + 2t, y = -2 + 3t$ e $z = -1 + 4t$, de modo que:
- $$\begin{aligned} x - 2y + z &= (3 + 2t) - 2(-2 + 3t) + (-1 + 4t) \\ &= 2t - 6t + 4t + 6 = 6. \end{aligned}$$
17. $\pi : 7x + 2z + 7 = 0, \alpha : 18x + 53y - 63z + 71 = 0$.
18. $\beta : y = 0$ e $\gamma : y + z = 1$.
19. $r : x = 3t, y = 6t, z = 1 - 4t$.
20. 36.
21. $5x - 2\sqrt{15}y + \sqrt{15}z = 5 - 3\sqrt{15}$.
22. 15/7.
23. O conjunto dos pontos do lado do plano para o qual \vec{n} aponta.
24. As expressões $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ devem ter o mesmo sinal.
25. $\alpha : x + 2y - z = 8$.
26. $2y - z = 1$.
27. (a) passa pela origem (b) perpendicular ao eixo x (c) paralela ao eixo z (d) perpendicular ao vetor $5\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$.
28. Basta observar que $\vec{u} = (\cos \alpha)\vec{i} + (\cos \beta)\vec{j} + (\cos \gamma)\vec{k}$ e que a equação do plano é: $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$.

29. (a) paralelo ao eixo x (b) paralelo ao eixo y (c) paralelo ao eixo z (d) paralelo ao plano xy (e) passa pela origem.
30. $x = -1 + 2t$, $y = -1$, $z = 4 - 4t$
31. os planos $x - y = \pm 9\sqrt{2}$
32. $(5/3, -2/3, -19/3)$
33. $\lambda = 4$ ou $\lambda = 52$
34. Ilustração gráfica na Figura 2.6.



- (i) No plano xy a reta interseção é: $r_1 : x = t$, $y = 1 - t$, $z = 0$.
- (ii) No plano xz a reta interseção é: $r_2 : x = t$, $y = 0$, $z = 1 - t$.
- (iii) No plano yz a reta interseção é: $r_3 : x = 0$, $y = t$, $z = 1 - t$.
35. $(4/11, -10/11, 40/11)$
36. Um ponto genérico da reta r_2 é dado por $P(3 - 2t, -14 + 5t, 8 - 3t)$. Verifique que este ponto P pertence à reta r_1 .
37. $ap + bq + d = 0$ e $am + bn + c = 0$.
38. (a) $P_1(1, 1, 2)$, $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$; $P_2(0, 1, -2)$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$.

- (b) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$. Se existisse um ponto comum às retas r_1 e r_2 , chegaríamos ao seguinte sistema impossível:

$$\begin{cases} 1 - t = 2s \\ 1 + t = 1 + s \\ 2 - t = -2 - 3s \end{cases}$$

(c) $\beta : x + 7y + 3z = 1$.

(d) $\alpha : 24x - 9y + 13z - 17 = 0$.

(e) $A_1(-\frac{17}{59}, \frac{135}{59}, -\frac{34}{59})$.

(f) $x = -\frac{17}{59} - t$, $y = \frac{135}{59} - 7t$, $z = -\frac{34}{59} - 3t$.

(g) $A_2(-\frac{30}{59}, \frac{44}{59}, -\frac{73}{59})$.

- (h) Recorde-se que:

$$\text{Proj}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}(\overrightarrow{P_1P_2}) = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$

- (i) Segue diretamente de (h).
-