1.1 Fundamentos Básicos

1. As afirmações abaixo estão classificadas em verdadeiras (V) ou falsas (F). Discuta cada uma delas.

   (a) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $A = C$ e $B = D$. .... (F)

   (b) Se $AB \sim CD$, então $AC \sim BD$ e os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são iguais. .... (V)

   (c) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD, então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm representantes colineares. .... (F)

   (d) Se $\vec{a} = \vec{0}$, então os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares. .... (V)

   (e) Se os pontos A, B e C não estão alinhados, então os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LI. .... (F)

   (f) Dois segmentos orientados colineares e de mesmo comprimento são equipolentes. .... (F)

   (g) Se $AB \sim CD$, então $BA \sim DC$. .... (V)

   (h) Os segmentos orientados AA e BB representam o mesmo vetor. .... (V)

   (i) Se $AB \sim CD$, então o quadrilátero de vértices A, B, C e D é um quadrado. .... (F)

   (j) Vetores determinados por segmentos orientados equipolentes são iguais. .... (V)

   (k) Três pontos não colineares determinam dois vetores LI. .... (V)

   (l) Dois vetores LI são sempre coplanares. .... (V)

   (m) Três vetores LD são sempre coplanares. .... (V)

   (n) Três vetores LD são sempre colineares. .... (F)

2. A partir de dois vetores linearmente independentes $\vec{u}$ e $\vec{v}$, construa, graficamente, o vetor $2\vec{u} - \vec{v}$.

3. Se os pontos A, B e C não estão alinhados e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, verifique que A, B, C e D são vértices de um paralelogramo.

4. Sejam AD, BE e CF as medianas de um triângulo ABC. Mostre que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

5. No paralelogramo da Figura 1.1, M é o ponto médio do lado DC. Complete as sentenças:

(a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} =$ ....

(b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} =$ ....

(c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} =$ ....

(d) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$ ....

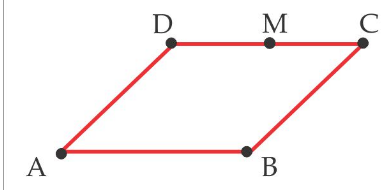

Fig. 1.1

6. Na Figura 1.2 abaixo, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ estão no mesmo plano. Construir, graficamente, com origem em A, o vetor $\vec{v}$, tal que $\vec{v} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

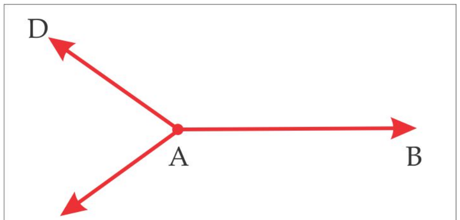

Fig. 1.2

7. Na Figura 1.3 abaixo tem-se $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ e $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Escrever o vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ em função do vetor $\overrightarrow{MN}$.

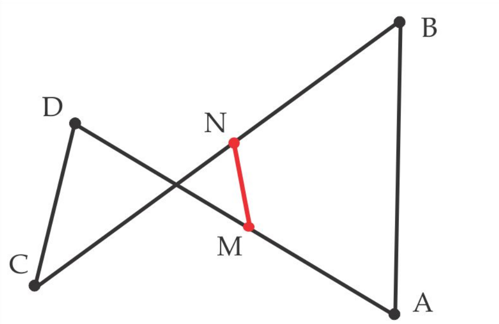

Fig. 1.3

8. Mostre que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.

9. Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.

10. Mostre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual a sua semi-soma.

11. Observe as figuras abaixo.

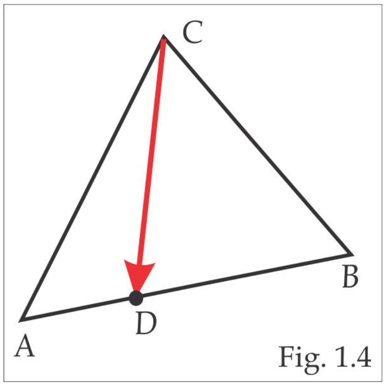

Fig. 1.4

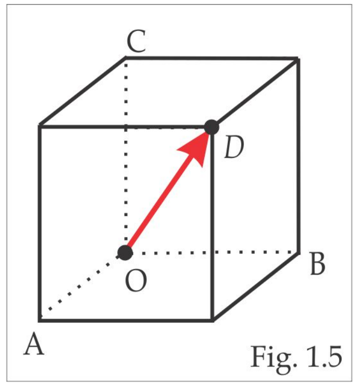

Fig. 1.5

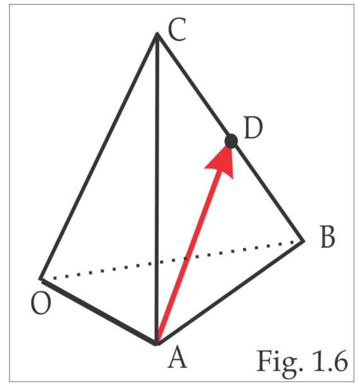

Fig. 1.6

   (a) Na Figura 1.4 tem-se $|DB| = 2\,|AD|$. Expresse o vetor $\overrightarrow{CD}$ como uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$.

   (b) A Figura 1.5 representa um paralelepípedo (caixa retangular). Expresse a diagonal $\overrightarrow{OD}$ como uma combinação linear das arestas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

   (c) No tetraedro da Figura 1.6, D é o ponto médio de BC. Expresse o vetor $\overrightarrow{AD}$ como uma combinação linear das arestas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

12. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.

13. O ponto de encontro das medianas de um triângulo recebe o nome de *Baricentro*. Mostre que o Baricentro de um triângulo divide as medianas na razão de 2 para 1.

14. Se O é o Baricentro de um triângulo de vértices A, B e C, mostre que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

15. Se o ponto A divide o segmento PQ na razão de n para m e O é um ponto qualquer do espaço, mostre que:
$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OP} + \left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OQ}.$$

16. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores LI, mostre que $2\vec{a} + 3\vec{b}$ e $\vec{a} - 6\vec{b}$ também são LI. Se $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ é uma base do espaço, mostre que $\{\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}, \vec{b} + 2\vec{c}\}$ também o é.

17. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vetores LI. Como devem ser os escalares x e y para que o vetor $x\vec{a} + y\vec{b}$ seja paralelo ao vetor $\vec{a}$, mas de sentido contrário?

1.2 Vetores em Coordenadas

1. Dados os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -2i + 3\vec{k}$ e $\vec{d} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$, calcule:

   (a) $\frac{1}{4}\vec{a}$ **(b)** $3\vec{b} - 5\vec{a} + \vec{c}$ **(c)** $-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a}$ **(d)** $\vec{b} - \vec{a}$.

2. Dado $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, determine um vetor $\vec{v}$ colinear com $\vec{u}$, de sentido contrário, e cujo comprimento seja igual a 3. Represente graficamente $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

3. Localize no sistema de coordenadas os pontos: $A(2,3,3)$, $B(2,0,3)$ e $C(2,2,0)$ e represente graficamente os vetores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.

4. Calcule $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BC}$, sendo $A(2,3,4)$, $B(-2,1,1)$ e $C(-2,-1,-2)$.

5. Considere o ponto $A(1,2,3)$ e o vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Determine B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

6. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento PQ, sabendo que $P(2,1,5)$ e $Q(4,3,1)$. Qual a distância do ponto P ao ponto Q?

7. Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, determine o vetor $\vec{w}$ tal que $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

8. Dados os pontos $A(1,-2,3)$, $B(5,2,5)$ e $C(-4,2,9)$, determine o ponto D de modo que A, B, C e D sejam vértices de um paralelogramo.

9. Sejam A, B, C e D os vértices de um paralelogramo e G o ponto de encontro das diagonais. Sabendo que $A(2,-1,-5)$, $B(-1,3,2)$ e $G(4,-1,7)$, determine os vértices C e D.

10. Em cada caso verifique se vetores são LD ou LI.

    (a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$
    (b) $\vec{u} = -14\vec{i} + 91\vec{j} + 56\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 13\vec{j} - 8\vec{k}$
    (c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + \vec{k}$
    (d) $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$

11. Determine m de modo que os vetores $\vec{u} = m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + m\vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sejam coplanares.

12. Qual valor de m faz com que $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 8\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$ sejam colineares?

13. Verifique se os pontos $A(1,-1,2)$, $B(0,1,1)$ e $C(2,-1,3)$ estão alinhados.

14. Determine y e z de modo que os pontos $A(1,2,1)$, $B(1,0,0)$ e $C(1,y,z)$ sejam colineares.

15. Em cada caso verifique se os pontos A, B, C e D são coplanares.

(a) $A(1,1,1)$, $B(-2,-1,-3)$, $C(0,2,-2)$ e $D(-1,0,-2)$.

(b) $A(1,0,2)$, $B(-1,0,3)$, $C(2,4,1)$ e $D(-1,-2,2)$.

16. Verifique se os vetores $\vec{u} = -3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$ podem ser representados pelos lados de um triângulo.

17. Verifique se os pontos $A(1,1,0)$, $B(3,1,0)$ e $C(1,3,0)$ podem ser vértices de um triângulo.

18. Verifique que os vetores $\vec{a} = \vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ e $\vec{c} = -3\vec{i}+9\vec{j}-\vec{k}$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$ e determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ nessa base. A base é positiva ou negativa?

19. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores LI e considere $\vec{u} = 2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ e $\vec{v} = -\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$. Escreva o vetor $\vec{w} = 9\vec{a}+15\vec{b}+6\vec{c}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

20. Calcule os valores de x para os quais os vetores $\vec{a} = \vec{i}+x\vec{j}$, $\vec{b} = -x\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ são LI.

1.3 Produtos entre Vetores

1. Classifique as afirmações em *verdadeiras* (V) ou *falsas* (F), justificando sua resposta.

(a) ( ) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos, então $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$.

(b) ( ) Se $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$, então $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ é igual a $\vec{0}$.

(c) ( ) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares, então $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

(d) ( ) Se $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, então $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ é igual a $\vec{0}$.

(e) ( ) Existem vetores não nulos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ e $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

(f) ( ) Se $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ é uma base ortonormal, então $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

(g) ( ) Se α é o plano gerado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e β é o plano gerado por $\vec{c}$ e $\vec{d}$, então α e β são paralelos se, e somente se, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{0}$.

(h) ( ) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares se, e somente se, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 0$.

(i) ( ) Se $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ é uma base ortonormal, então $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \pm 1$.

(j) ( ) Sempre que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares, ter-se-á $||\vec{a}+\vec{b}|| = ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$.

(k) ( ) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores unitários, então $\vec{a}+\vec{b}$ tem a direção da bissetriz do ângulo $(\vec{a},\vec{b})$.

(l) ( ) Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores do espaço, então $||\vec{a} \pm \vec{b}||^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + ||\vec{b}||^2$.

(m) ( ) Três vetores ortogonais são sempre LI.

(n) ( ) Se $\|\vec{a}\| = 1$, então o vetor $\text{Proj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$ tem comprimento $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$.

(o) ( ) Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base positiva, então $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\}$ também o é.

(p) ( ) O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}\}$ é uma base apenas quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem LI.

(q) ( ) Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal e $\vec{a}$ é um vetor, então $\|\vec{a}\|^2 = (\vec{a}\cdot\vec{u})^2 + (\vec{a}\cdot\vec{v})^2 + (\vec{a}\cdot\vec{w})^2$.

2. Mostre que as diagonais de um losango são ortogonais.

3. Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ vetores não nulos e ortogonais, demonstre o **Teorema de Pitágoras:**

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2.$$

4. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são dois vetores e $\vec{a} \neq \vec{0}$, mostre que o vetor $\vec{v} = \vec{b} - \dfrac{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$ é perpendicular ao vetor $\vec{a}$.

5. Verifique que a norma goza das seguintes propriedades:

(a) $\|\vec{u}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$. **(O único vetor de norma zero é o vetor nulo.)**

(b) $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$. **(Produtos Notáveis.)**

(c) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$. **(Desigualdade da Cauchy-Schwarz.)**

(d) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$. **(Desigualdade Triangular.)**

(e) $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

(f) $\|x\vec{u}\| = |x| \, \|\vec{u}\|$, seja qual for o escalar x.

6. Descreva passo-a-passo a construção de uma base ortonormal positiva $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, a partir de um vetor não nulo $\vec{a}$.

7. Demonstre as seguintes identidades:

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}\left[||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a} - \vec{b}||^2\right]$. **(Identidade de Polarização)**

(b) $||\vec{a} + \vec{b}||^2 + ||\vec{a} - \vec{b}||^2 = 2\left[||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2\right]$. **(Identidade do Paralelogramso)**

8. Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ três vetores tais que o ângulo entre quaisquer dois deles, nessa ordem, é 60^{o}. Sabendo que $\|\vec{a}\| = 3$, $||\vec{b}|| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 6$, calcule $||\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}||$.

9. Se $||\vec{a}|| = 11$, $||\vec{b}|| = 23$ e $||\vec{a} - \vec{b}|| = 30$, calcule $||\vec{a} + \vec{b}||$.

10. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares entre si e o vetor $\vec{c}$ é tal que $(\vec{c}, \vec{a}) = 60^o$ e $(\vec{c}, \vec{b}) = 60^o$. Sabendo-se que $\|\vec{a}\| = 3$, $||\vec{b}|| = 5$ e $\|\vec{c}\| = 8$, calcule o produto interno: $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$.

11. Determine a *projeção ortogonal* do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ sobre o vetor $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

12. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.

13. Determine um vetor unitário $\vec{u}$, paralelo ao vetor $2\vec{a} - \vec{b}$, sendo $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

14. Calcule $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/4$ rad.

15. Determine o valor de x, de modo que $(x\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2\vec{i} + \vec{j}) = 3$.

16. Dados $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, ache um vetor unitário $\vec{w}$ na direção da bissetriz do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

17. Verifique que os pontos $A(1,1,0)$, $B(3,1,0)$ e $C(1,3,0)$ são vértices de um triângulo retângulo e calcule seus ângulos.

18. Dados $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{j} - \vec{k}$, calcule os produtos mistos: (a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, (b) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}]$, (c) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$ e (d) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}]$.

19. Em cada caso, verifique se os pontos são coplanares ou não.

    (a) $A(0,2,-2)$, $B(-1,0,-2)$, $C(-2,-1,-3)$ e $D(1,1,1)$.

    (b) $A(-1,0,3)$, $B(-1,-2,2)$, $C(1,0,2)$ e $D(2,4,1)$.

20. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são mutuamente ortogonais e formam, nessa ordem, um terno ordenado positivo. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 3$, calcule o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

21. Use o produto vetorial e determine as condições que devem satisfazer os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ para que $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ sejam paralelos.

22. Os vetores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ são coplanares ou não?

23. Se $\|\vec{u}\| = 3$ e $\|\vec{v}\| = 5$, determine os valores de x de modo que os vetores $\vec{u} + x\vec{v}$ e $\vec{u} - x\vec{v}$ sejam:

    (a) perpendiculares (b) paralelos.

24. Sejam $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$. Determine um vetor $\vec{v}$ perpendicular aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e tal que $\vec{v} \cdot \vec{c} = 100$.

25. Se α, β e γ são os *ângulos diretores* de um vetor não nulo $\vec{v}$, isto é, os ângulos que o vetor $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente, mostre que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

1.4 Questões de Revisão

1. Dado um ponto $P(x, y, z)$, o que representam, em termos de distâncias, as quantidades:

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{y^2 + z^2}\ ?$$

   E as coordenadas x, y e z o que medem?

2. Como devem ser os escalares x, y e z, para que o ponto $P(x, y, z)$ esteja sobre:

   (a) o eixo x (b) o eixo y (c) o eixo z (d) o plano xy (e) o plano xz (f) o plano yz.

3. Como verificar se os pontos A, B e C são colineares? Três pontos são sempre coplanares? E três vetores?

4. O que são segmentos orientados equipolentes? Vetores determinados por segmentos orientados equipolentes são iguais?

5. O que é *Combinação Linear* dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$? E *Base* do espaço $\mathbb{R}^3$, o que é?

6. O que são Vetores LI e vetores LD? Vetores colineares são LI ou LD? E coplanares? Qual argumento algébrico se usa para testar a dependência linear entre vetores?

7. O que é $\|\vec{a}\|$? Em que condições se tem $\|\vec{a}\| = 0$?

8. O que é um vetor unitário? Dado um vetor não nulo $\vec{a}$ quantos vetores unitários e colineares com $\vec{a}$ existem? Como determiná-los?

9. Sob que condições três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser representados pelos os lados de um triângulo?

10. Como verficar se quatro pontos A, B, C e D são coplanares ou não?

11. Identifique o plano gerado pelos seguintes pares de vetores: (a) $\vec{i}$ e $\vec{j}$ (b) $\vec{i}$ e $\vec{k}$ (c) $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

12. Na representação $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ como são denominados os escalares x, y e z? Como você relaciona o vetor $\vec{a}$ e o ponto $P(x, y, z)$?

13. Como se define o produto interno entre dois vetores? Como usar o produto interno para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos?

14. E o produto vetorial, o que é? Que ente geométrico pode ser calculado com o produto vetorial?

15. Para que serve o produto misto?

16. O que é o *plano gerado* por um par de vetores LI? E a *reta gerada* por um vetor não nulo?

17. O que é uma base ortogonal do espaço? E uma base ortonormal, o que é?

18. Como usar o produto interno para achar as coordenadas de um vetor em uma base ortonormal?

19. O triângulo ABC está inscrito no semicírculo de raio R, como ilustra a Figura 1.7 abaixo. Mostre que o triângulo é retângulo no vértice C.

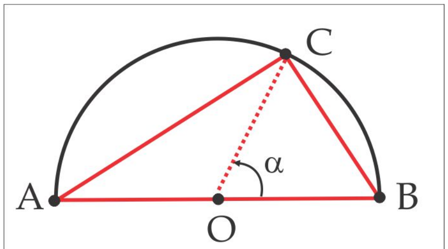

Fig. 1.7

20. Um vetor não nulo $\vec{v}$ forma com os eixos Ox e Oy os ângulos $\alpha = 120^o$ e $\beta = 45^o$, respectivamente. Determine o ângulo entre $\vec{v}$ e o eixo Oz.

21. Dois ângulos diretores de um vetor $\vec{v}$ são: $\alpha = 60^o$ e $\gamma = 120^o$. Se $\|\vec{v}\| = 2$, determine as coordenadas do vetor $\vec{v}$.

22. Determine os *cossenos diretores* do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$.

23. Determine dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, de norma 75, paralelos ao vetor $\vec{u} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$.

24. Verifique que os vetores $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ são ortonormais e determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na base $\{\vec{a}, , \vec{b}, \vec{c}\}$.

25. Sejam $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^3$? Essa base é ortonormal? Ela é ortogonal? É possível escrever o vetor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ como combinação linear de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$?

26. Se $\|\vec{u}\| = 4$ e $\|\vec{v}\| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ é α, calcule $\cos \alpha$.

27. Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores unitários tais que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, mostre que $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -3/2$.

28. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e ortogonais, determine o valor de x de modo que os vetores $\vec{u} + x\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ sejam ortogonais.

29. Se $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/6$, calcule $\|(2\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})\|$.

30. Determine dois vetores de norma 3, ortogonais aos vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$.

31. Determine um vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 6$ e $\vec{v} \times (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 4\vec{k}$.

32. Qual a área do paralelogramo que tem três vértices consecutivos nos pontos $A(1,0,1)$, $B(2,1,3)$ e $C(3,2,-5)$?

33. Verifique se os pontos $A(-1,-3,4)$, $B(-2,1,-4)$ e $C(3,-11,5)$ são vértices de um triângulo. Em caso afirmativo, classifique o triângulo em retângulo, isóceles ou eqüilátero e calcule sua área.

34. Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Construa uma base ortonormal positiva $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, sendo $\vec{a}$ paralelo ao vetor $\vec{u}$ e $\vec{b}$ paralelo ao vetor $\vec{v}$. Determine as coordenadas do vetor $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ na base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

35. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A(2,1,6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B(4,1,3)$, $C(1,3,2)$ e $D(1,2,1)$.

36. Considere o triângulo de vértices $A(3,2,1)$, $B(3,2,2)$ e $C(3,3,2)$. Determine:

    (a) Os ângulos do ΔABC; (b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado;

    (c) A área do ΔABC; (d) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.

37. Dados $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$, construa uma base ortonormal negativa $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, sendo $\vec{u}$ paralelo ao vetor $\vec{a}$ e $\vec{v}$ coplanar com $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

38. Seja $x < 0$ e considere os vetores $\vec{u} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$, $\vec{v} = x\vec{i} - 2x + 2x\vec{k}$ e $\vec{w} = 2x\vec{i} - x\vec{j} - 2x\vec{k}$. Mostre que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortogonal negativa. Determine o(s) valor(es) x que torna(m)

a base ortonormal e, em seguida, encontre as coordenadas do vetor $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ nessa base ortonormal.

39. Verifique que os pontos $A(4,6,2)$, $B(1,2,1)$, $C(3,3,3)$ e $D(7,4,3)$ são vértices de um paralelepípedo, calcule o volume do sólido e as coordenadas do ponto E, sendo AE uma diagonal interna.

40. Mostre que o volume do tetraedro da Figura 1.8 é:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]\right|.$$

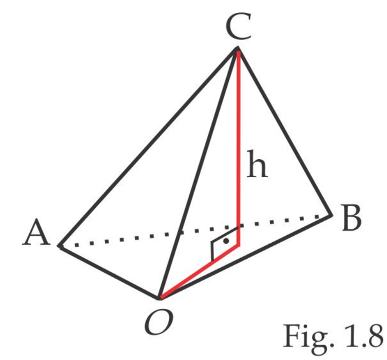

Fig. 1.8

41. Demostre as seguintes relações:

    (a) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$.

    (b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{z} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{z} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\vec{w}$.

42. Os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ têm normas 4, 2 e 6, respectivamente, e o ângulo entre quaisquer dois deles, na ordem apresentada, é $\pi/3$. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$.

43. Prove as seguintes afirmações:

    (a) Se $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$, $\forall \vec{v}$, então $\vec{a} = \vec{b}$.

    (b) Se $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b} \times \vec{v}$, $\forall \vec{v}$, então $\vec{a} = \vec{b}$.

    (c) Se $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares.

1.5 Sistemas Lineares - Regra de Cramer

Daremos a seguir uma breve descrição da Regra de Cramer para resolução de sistemas lineares 3×3. Começamos com dois resultados básicos, que serão utilizados na seqüência.

- Usando a relação $[\vec{w}, \vec{z}, \vec{X}] = [\vec{X}, \vec{w}, \vec{z}]$, com $\vec{X} = \vec{u} \times \vec{v}$, vamos demonstrar que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{z}) - (\vec{u} \cdot \vec{z}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

SOLUÇÃO Temos $[\vec{w},\vec{z},\vec{a}] = [\vec{a},\vec{w},\vec{z}]$ e considerando $\vec{a} = \vec{u}\times\vec{v}$, obtemos do Exercício 25(a), seção 1.4,

$$\begin{aligned}
[\vec{w},\vec{z},\vec{u}\times\vec{v}] &= [\vec{u}\times\vec{v},\vec{w},\vec{z}] \Leftrightarrow (\vec{w}\times\vec{z})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = [(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}]\cdot\vec{z}\\
&\Leftrightarrow (\vec{w}\times\vec{z})\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = -\left[\vec{w}\vec{\times}(\vec{u}\times\vec{v})\right]\cdot\vec{z} = -\left[(\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{u} - (\vec{w}\cdot\vec{u})\,\vec{v}\right]\vec{z}\\
&= (\vec{w}\cdot\vec{u})\,(\vec{v}\cdot\vec{z}) - (\vec{w}\cdot\vec{v})\,(\vec{u}\cdot\vec{z})
\end{aligned}$$

■ Se $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ é uma base do espaço e $\vec{X}$ um vetor qualquer, vamos mostrar que

$$\vec{X} = \tfrac{1}{\Delta}[\vec{X},\vec{v},\vec{w}]\vec{u} + \tfrac{1}{\Delta}[\vec{u},\vec{X},\vec{w}]\vec{v} + \tfrac{1}{\Delta}[\vec{u},\vec{v},\vec{X}]\vec{w}$$

onde $\Delta = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

SOLUÇÃO Do Exercício 25(b) da seção 1.4, temos:

(i) $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{x}) = [\vec{u},\vec{v},\vec{x}]\,\vec{w} - [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,\vec{x}$.

(ii) $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{x}) = -(\vec{w}\times\vec{x})\times(\vec{u}\times\vec{v}) = -\{[\vec{w},\vec{x},\vec{v}]\,\vec{u} - [\vec{w},\vec{x},\vec{u}]\,\vec{v}\}$,

de onde resulta que:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{x}]\,\vec{w} - [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\,\vec{x} = -[\vec{w},\vec{x},\vec{v}]\,\vec{u} + [\vec{w},\vec{x},\vec{u}]\,v.$$

Se na última igualdade isolarmos $\vec{x}$ no 1º membro, chegaremos ao resultado.

Consideremos, agora, o sistema linear 3×3 :

$$\left|\begin{array}{l} a_1x + a_2y + a_3z = d_1\\ b_1x + b_2y + b_3z = d_2\\ c_1x + c_2y + c_3z = d_3\end{array}\right. \qquad (*)$$

e os vetores $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, $\vec{w} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$ e $\vec{X} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$, de modo que $\vec{X} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Se o determinante

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

é não nulo, então os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formam uma base do espaço e , portanto, os escalares x, y e z são únicos, ou seja, a solução do sistema $(*)$ é única e esta vem dada por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

onde os determinantes Δ_x, Δ_y e Δ_z são obtidos a partir do Δ, do modo seguinte:

$$\Delta_x = \det\begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_y = \det\begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_z = \det\begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

No caso em que o sistema é homogêneo, isto é, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, então a única solução do sistema é $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.1

1. Em algums casos, uma ilustração geométrica ajuda na conclusão.

   (a) Para que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sejam iguais é necessário e suficiente que os segmentos orientados AB e CD sejam equipolentes

   (b) Segmentos equipolentes determinam o mesmo vetor.

   (c) Dois vetores são Linearmente Dependentes (LD) quando possuirem representantes paralelos. Tais representantes podem ser colineares ou não.

   (d) O plano que contém representantes dos vetores $\vec{b}$ e $\vec{c}$ também contém pontos do espaço, que são representantes do vetor nulo $\vec{a}$.

   (e) Os pontos não alinhados A, B e C podem ser determinados de tal forma que os segmentos orientados OA, OB e OC sejam coplanares. Neste caso, os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ são LD.

   (f) Seriam equipolentes se tivessem o mesmo sentido. Por exemplo, os segmentos orientados e não nulos AB e BA são colineares, de mesmo comprimento e, contudo, não são equipolentes.

   (g) O quadrilátero de vértices A, B, C e D é um paralelogramo.

   (h) Qualquer ponto do espaço é um representante do vetor nulo.

   (i) O quadrilátero de vértices A, B, C e D é um paralelogramo, mas, não um quadrado, necessariamente.

   (j) É isso que estabelece o conceito de vetor.

   (k) Os dois vetores LI determinados pelos 3 pontos não colineares geram o plano que contém os três pontos.

(l) Quaisquer dois vetores (LI ou LD) são sempre coplanares.

(m) Se não fossem coplanares, seriam geradores do espaço e, portanto, LI.

(n) Eles podem ser coplanares e não colineares.

2. Recorde-se que $2\vec{u}$ tem mesma direção e sentido que $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ tem sentido oposto ao vetor $\vec{v}$.

3. Decorre da equipolência dos segmentos orientados AD e BC.

4. Observando a Figura 1.12, vemos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

e, somando essas expressões, chegamos ao resultado.

5. (a) $\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{CA}$ (c) $\overrightarrow{AB}$ (d) $\overrightarrow{BD}$.

6. O vetor procurado é $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$

7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.

8. Seja M o ponto médio da diagonal AC e mostremos que M é ponto médio da diagonal DB.

Observando a Figura 1.9, vemos que

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right),$$

e considerando que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, resulta

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}.$$

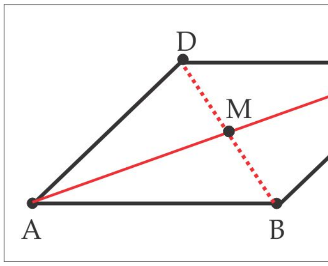

Fig. 1.9

9. No quadrilátero da Figura 1.10, E, F, G e H são os pontos médios dos lados.

É suficiente mostrar que $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$ e $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$. Temos

$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB},$$

e, de modo similar, encontramos $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

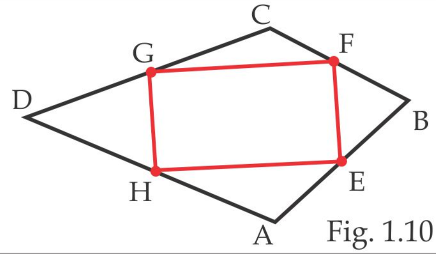

Fig. 1.10

10. Observe o trapézio da Figura 1.11 abaixo, em que M e N são os pntos médios de AD e BC, respectivamente.

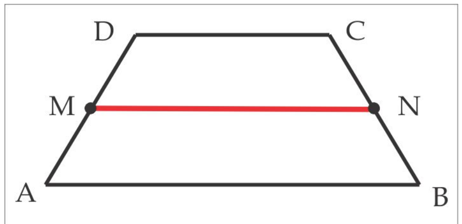

Fig. 1.11

Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN} = \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\ &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

11. **(a)** Devemos encontrar escalares x e y, tais que $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{BC}$. Obervando a Figura 1.4, vemos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})\\ &= -\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (c) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

12. No triângulo da Figura 1.12, M e N são os pontos médios dos lados AC e BC, respectivamente.

É suficiente mostrar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De fato,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

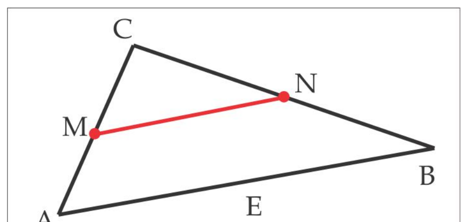

Fig. 1.12

13. O *baricentro* de um triângulo é, por definição, o encontro das *medianas* do triângulo, como ilustra a Figura 1.14.

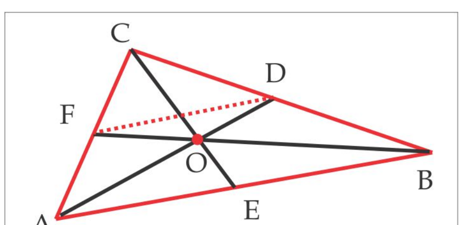

Fig. 1.14

Suponhamos que o ponto O divida a mediana AD na razão de 2 para 1 e mostremos que o ponto O também divide a mediana BF na mesma razão. Temos:

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DF} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}. \qquad (\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DF}, \quad \text{Ex. } 12)$$

14. Do Exercício 13 segue que $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$. Então:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} &= \tfrac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE}) = \tfrac{2}{3}\left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE})\right] = \\ &= \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

15. Na Figura 1.13 ilustramos a situação geométrica, onde vemos que

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA},$$

e considerando que $\overrightarrow{PA} = \frac{n}{m}\overrightarrow{AQ}$, encontramos:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \frac{n}{m}\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{n}{m}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}\right).$$

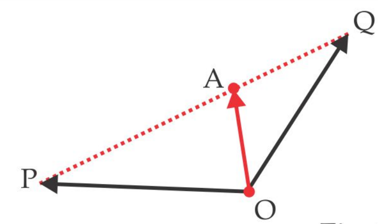

Fig. 1.13

16. Lembramos que $\vec{a}$, e $\vec{b}$ são LI se, e somente se, a equação vetorial $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ admite apenas a solução nula $x = 0$ e $y = 0$. Considere, então, uma combinação linear nula

$$x\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) + y\left(\vec{a} - 6\vec{b}\right) = \vec{0}$$

e mostre que $x = 0$ e $y = 0$. No caso de três vetores a situação é similar. Três vetores $\vec{a}, \vec{b}$, e $\vec{c}$ são LI se, e somente se, a equação vetorial $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ admite apenas a solução nula $x = 0, \ y = 0$ e $z = 0$. Recorde-se que uma base é um conjunto constituído de três vetores LI.

17. $x < 0$ e $y = 0$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.2

1. (a) $\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$ (b) $-15\vec{i} + 2\vec{j} - 22\vec{k}$ (c) $-5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{15}{2}\vec{k}$ (d) $-3\vec{i} - 5\vec{k}$.

2. $\vec{v} = -3\vec{u}/\|\vec{u}\| = -\sqrt{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{k}$.

3. O ponto $B(2,0,3)$ jaz no plano xz, porque tem a ordenada $y=0$, enquanto o ponto $C(2,2,0)$ tem a cota $z=0$ e, portanto, jaz no plano xy. Veja a ilustração geométrica na Figura 1.15.

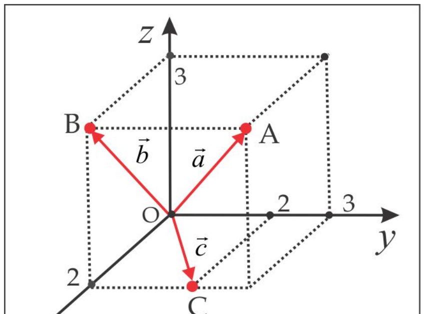

Fig. 1.15

4. $\overrightarrow{AB}=-4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$; $\overrightarrow{AC}=-4\vec{i}-4\vec{j}-6\vec{k}$; $\overrightarrow{BC}=-2\vec{i}-3\vec{j}$.

5. $B(4,6,8)$.

6. $M(3,2,3)$, $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{24}$.

7. $\vec{w}=(-\frac{5}{2})\vec{i}+2\vec{j}+(-\frac{5}{2})\vec{k}$.

8. $D(-8,-2,7)$.

9. $C(6,-1,19)$; $D(9,-5,12)$.

10. (a) LI (b) LD (c) LI (d) LD.

11. $m=2$ ou $m=-1$.

12. Com $m=4$, tem-se $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{v}$.

13. Não.

14. $y=2z$

15. (a) Sim. (b) Não.

16. Sim. Tem-se $\vec{w}=-\vec{u}-\vec{v}$.

17. Sim, porque os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são LI.

18. A base é negativa e $\vec{v}=\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{24}{49}\vec{b}+\frac{2}{49}\vec{c}$.

19. $\vec{w} = 8\vec{u} + 7\vec{v}$.

20. $x \neq 1$ e $x \neq -2$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.3

1. V, F, V, F, F, F, V, V, V, F, V, V, V, V, F, F, V.

2. É suficiente mostrar que os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são ortogonais (perpendiculares), isto é, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ Veja a ilustração geométrica na Figura 1.16.

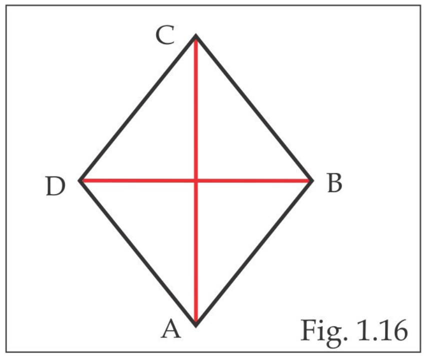

Fig. 1.16

Considere as representações $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ e use as proporiedades do produto interno para concluir.

3. Da Figura 1.17, vemos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ e sendo os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, então $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 &= \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) \\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2\left(\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}\right) + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 \end{aligned}$$

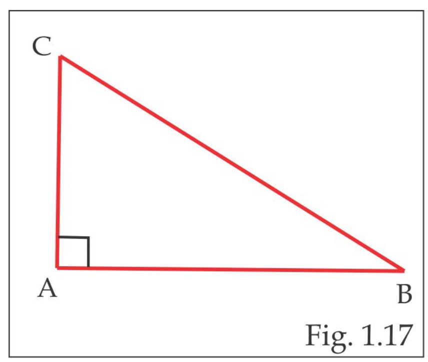

Fig. 1.17

4. O vetor $\vec{v}$ será ortogonal ao vetor $\vec{a}$, quando $\vec{v} \bullet \vec{a} = 0$. Ora,

$$\vec{v} \bullet \vec{a} = \vec{b} \bullet \vec{a} - \frac{\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)\ \vec{a} \bullet \vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{b} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} = 0.$$

5. (a) Considerando $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

(b) Produtos Notáveis:

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = (\vec{u} \pm \vec{v}) \bullet (\vec{u} \pm \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2 \pm 2\vec{u} \bullet \vec{v}.$$

(c) Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|, \quad \text{porque } |\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1.$$

(d) Desigualdade Triangular:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} \\ &\leq \|\vec{u}\|^2 + \|v\|^2 + 2\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

(e) Consequência da Desigualdade Triangular. De fato,

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| \qquad \text{(I)}$$

Se em (I) trocarmos $\vec{u}$ com $\vec{v}$, chegaremos a

$$\|\vec{v}\| - \|\vec{u}\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \qquad \text{(II)}$$

Combinando (I) e (II), obtemos o resultado.

(f) Se $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então $\lambda\vec{u} = (\lambda x)\,\vec{i} + (\lambda y)\,\vec{j} + (\lambda z)\,\vec{k}$ e daí resulta:

$$\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2} = \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\lambda|\,\|\vec{u}\|.$$

6. **Etapa 1.** Normalizamos o vetor $\vec{a}$ e obtemos o primeiro vetor básico $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.

Etapa 2. Usando o produto interno, construímos um vetor $\vec{b}$, ortogonal ao vetor $\vec{a}$ e, em seguida, normalizamos $\vec{b}$ e obtemos o segundo vetor básico $\vec{v} = \dfrac{\vec{b}}{||\vec{b}||}$, ortogonal ao vetor $\vec{u}$.

Etapa 3. Um terceiro vetor básico, unitário e ortogonal aos vetores u e $\vec{v}$, é

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

7. As Identidades de Polarização e do Paralelogramo são consequências diretas dos Produtos Notáveis.do Exercício 5(b).

8. $\sqrt{85}$.

9. 20.

10. -62.

11. $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j} - \frac{4}{3}\vec{k}$.

12. $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

13. $\vec{u} = \frac{-3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j}$.

14. $\|\vec{u}\| = 2$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 34$.

15. $x = 0$.

16. O vetor $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ aponta na direção da bissetriz do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. O unitário na direção da bissetriz é, portanto, $\vec{w} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. Veja a Figura 1.18.

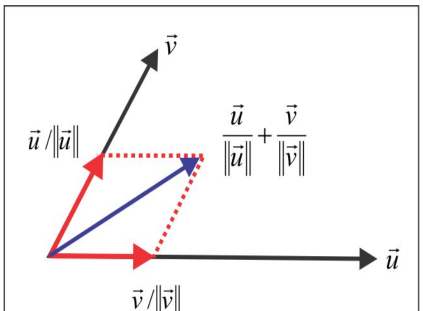

Fig. 1.18

17. $\widehat{A} = \pi/2$; $\widehat{B} = \widehat{C} = \pi/4$

18. (a) -7 (b) 0 (c) 7 (d) 0.

19. (a) coplanares (b) não coplanares.

20. 24.

21. Se $\vec{a}$ for paralelo a $\vec{b}$, então $\vec{a} + \vec{b}$ será paralelo a $\vec{a} - \vec{b}$.

22. Não, porque $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.

23. (a) $x = \pm 3/5$ (b) $x \in \mathbb{R}$, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem paralelos e $x = 0$, caso contrário.

24. $\vec{v} = 70\vec{i} + 50\vec{j} + 10\vec{k}$.

25. Decorre das relações:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|},\quad \cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\|\vec{v}\|}\quad \text{e}\quad \cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|}.$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.4

1. A quantidade $\sqrt{x^2+y^2}$ representa a distância do ponto $P(x,y,z)$ ao eixo z, enquanto a coordenada x é, em valor absoluto, a distância de P ao plano yz.

2. (a) $y = 0,\ z = 0$ (b) $x = 0,\ z = 0$ (c) $x = 0,\ y = 0$ (d) $z = 0$ (e) $y = 0$ (f) $x = 0$.

3. Os pontos A, B e C são colineares se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ forem LD, isto é, $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Sim, três pontos são sempre coplanares, podendo ser colineares ou não. Três vetores podem ser coplanres ou não.

4. Dois segmentos orientados são equipolentes, quando possuirem mesma diereção, mesmo sentido e mesmo comprimento. Segmentos orientados são equipolentes determinam o mesmo vetor.

5. Qualquer expressão do tipo $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, com x, y e z escalares, é uma *combinação linear* dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$e $\vec{w}$. Uma *base* do $\mathbb{R}^3$ é qualquer conjunto constituído de três vetores não coplanres (LI). Um fato fundamental é que qualquer vetor do espaço se expressa, de modo único, como combinação linear dos vetores da base.

6. Dois vetores são LD quando forem paralelos, isto é, possuirem representantes colineares. Três vetores são LD quando possuirem representanes coplanares, podendo ser colineares ou não. A dependência linear pode ser investigada a partir da combinaçao linear nula ou usando produtos entre vetores:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são LD} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}.$$
$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ são LD} \quad\Leftrightarrow\quad [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0.$$

7. A quantidade $\|\vec{a}\|$ é a *norma* do vetor $\vec{a}$ e é igual ao comprimento de qualquer representante do vetor $\vec{a}$. Temos que $\|\vec{a}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{a} = \vec{0}$ (o único vetor de norma zero é o vetor nulo).

8. Um vetor $\vec{a}$ diz-se *unitário* se $\|\vec{a}\| = 1$. Se $\vec{a}$ é um vetor não nulo, existem dois e somente dois vetores unitários, colineares com $\vec{a}$, os quais são dados por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

9. Os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ não devem ser colineares e $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

10. Se $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$, os pontos A, B, C e D serão coplanres.

11. Os planos coordenados xy, xz e yz, respectivamente.

12. Os escalares x, y e z são as coordenadas do vetor $\vec{a}$ na base $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ e temos $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$.

13. O produto interno entre os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o número real definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$

onde θ é o menor ângulo positivo entre dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com mesma origem. O ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é calculado pela relação:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.$$

No caso em que um dos vetores é nulo, o produto interno é definido com sendo zero.

14. O produto vetorial entre os vetores não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, caracterizado por:

(i) COMPRIMENTO: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \left|\operatorname{sen}\theta\right|$.

(ii) DIREÇÃO: $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao plano gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(iii) SENTIDO: O terno ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é positivo.

A quantidade $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ representa a área do paralelogramo cujos lados não paralelos são representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. No caso em que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (paralelos) define-se o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ como sendo o vetor nulo $\vec{0}$.

15. Podemos usar o produto misto para testar a depndência linear entre três vetores e, também, para calcular o volume do paralelepípedo, cujas arestas são representantes de três vetores LI (não coplanares).

16. O *plano gerado* pelos vetores LI $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o *lugar geométrico* constituído pelos vetores da forma $x\vec{u} + y\vec{v}$, com x e y números reais. Por outro lado, a *reta gerada* pelo vetor não nulo $\vec{u}$ é o *lugar geométrico* constituído pelos vetores da forma $t\vec{u}$, sendo t um número real.

17. Uma base *ortogonal* do espaço é qualquer conjunto constituído por três vetores LI, mutuamente ortogonais. Se, além de ortogonais, os três vetores forem unitários (de norma igual a 1) a base denominar-se-á *base ortonormal*. Por exemplo, $\{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ é uma base ortonormal.

18. Dada uma base ortonormal $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, qualquer vetor $\vec{a}$ do espaço se expressa, de maneira única, sob a forma:
$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$
e as coordenadas $x,\ y$ e z são dadas por:
$$x = \vec{a} \cdot \vec{u}, \quad y = \vec{a} \cdot \vec{v} \quad \text{e} \quad z = \vec{a} \cdot \vec{w}.$$

19. É suficiente mostrar que $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$. Temos
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} &= \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}\right) \bullet \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}\right) = \\ &= \overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} \\ &= R^2 - R^2 + R^2 \cos(\pi - \alpha) + R^2 \cos\alpha = 0. \end{aligned}$$

20. 60^{o}.

21. $\vec{v} = \vec{i} \pm \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$.

22. $\cos\alpha = 4/13,\ \cos\beta = 3/13$ e $\cos\gamma = 12/13$.

23. $\vec{v} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{v}$.

24. $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{7}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

25. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base não ortogonal. Não sendo ortogonal, não pode ser ortonormal. Temos $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

26. ± 1 e $\pm\frac{7}{24}$.

27. Multiplique a equação $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = 0$ escalarmente por $\vec{u}$, por $\vec{v}$ e depois por $\vec{w}$ e some os resultados.

28. $x = (\|\vec{u}\| \,/\, \|\vec{v}\|)^2$.

29. $9/2$.

30. $\vec{v} \pm \frac{3}{\sqrt{11}}(\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$.

31. $\vec{v} = \frac{24}{13}\vec{i} + \frac{10}{13}\vec{j}$.

32. $A = 10\sqrt{2}$.

33. Isóceles e $A = 5\sqrt{185}$.

34. Primeiro, observe que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais. Considere $\vec{a} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e $\vec{c} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$.

35. $V = 15$.

36. a. $\widehat{A} = 45^{\text{o}}$, $\widehat{B} = 90^{\text{o}}$ e $\widehat{C} = 45^{\text{o}}$ b. $\text{Proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$ c. $1/2$ d. $h = \sqrt{2}/2$.

37. Considere $\vec{u} = \vec{a}/\,\|\vec{a}\|$, $\vec{v} = (\vec{a} + 9\vec{b})/||\vec{a} + 9\vec{b}|$ e $\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v})/\,\|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

38. $x = \pm 1/3$ e $\vec{v} = \frac{-5}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{10}{3}\vec{w}$.

39. Basta verificar que $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \neq 0$. O volume é precisamente o valor absoluto do produto misto. O ponto E é tal que:
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$
vol $= 24$ e $E\,(3, -3, 3)$.

40. Note que vol $= \frac{1}{3}(\textit{área da base}) \times h$ e que a área da base pode ser calculada pela norma do produto vetorial.

41. (a) Desenvolva os dois lados da igualdade usando as coordenadas dos vetores e comprove o resultado.

    (b) Do item (a), segue que $\vec{a} \times (\vec{z} \times \vec{w}) = (\vec{a} \cdot \vec{w})\,\vec{z} - (\vec{a} \cdot \vec{z})\,\vec{w}$ e considerando $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v}$ obtemos:
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{z} \times \vec{w}) = [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}]\vec{z} - [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}]\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\,\vec{z} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\,\vec{w}.$$

42. Da relação
$$\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\vec{u}\|^2 + 2\,(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$$
e dos dados, encontramos $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = 100$ e, portanto, $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = 10$.

43. (a) Se $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$, então $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{v} = 0,\ \forall\ \vec{v}$, e considerando $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, obtemos:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow ||\vec{a} - \vec{b}||^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$

(b) Sabendo que $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{0},\ \forall\ \vec{v}$, consideramos, sucessivamente, $\vec{v} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{v} = k$, para deduzir que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm as mesmas coordenadas. Logo, $\vec{a} = \vec{b}$.

(c) É suficiente mostrar que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$. Para isto, multiplicamos escalarmente a equação $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$ por $\vec{w}$ e encontramos: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$, isto é, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.