GABARITO 1A

PARTE I - VETORES GEOMÉTRICOS **(valor 5,0 pontos)** **Nota:**

01 COORDENADAS CARTESIANAS *Considere os seguintes pontos do espaço* $\mathbb{R}^3$:

$$A\,(2,1,-1)\,, \quad B\,(3,-1,0) \quad \text{e} \quad C\,(1,0,4)\,.$$

(a) *Mostre que os pontos A, B e C não estão alinhados.*

(b) *Encontre um ponto D de modo que A, B, C e D sejam vértices de um paralelogramo.*

(c) *Determine o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo do ítem* **(b)**.

SOLUÇÃO Os vetores básicos $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ estão grafados em negrito. Temos:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

(a) Os pontos A, B e C estariam alinhados se existisse um escalar t, tal que $\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC}$. Esta equação vetorial nos conduz a:

$$1 = -t, \quad -2 = -t \quad \text{e} \quad 1 = 5t,$$

onde vemos que um tal escalar t não existe. Logo, os pontos A, B e C não estão alinhados.

(b) Considerando $D\,(x_D, y_D, z_D)$ um ponto do espaço, tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, encontramos:

$$x_D - 2 = -2, \quad y_D - 1 = 1, \quad z_D + 1 = 4.$$

Daí resulta: $x_D = 0$, $y_D = 2$ e $z_D = 3$ e obtemos o ponto $D\,(0,2,3)$.

(c) Como vimos em sala de aula, as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio, de modo que o ponto $M\,(x_M, y_M, z_M)$ de encontro das diagonais satisfaz à equação $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, de onde resulta:

$$x_M - 2 = -\tfrac{1}{2}, \quad y_M - 1 = -\tfrac{1}{2}, \quad z_M + 1 = \tfrac{5}{2}.$$

Assim, o ponto de encontro das diagonais é $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

---

02 **CONSTRUINDO VETORES PARALELOS** *Considere os vetores*

$$\vec{u} = (x+2)\,\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + (2z-1)\,\vec{k}.$$

Determine x *e* z *que tornam os vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *paralelos* (LD)

SOLUÇÃO

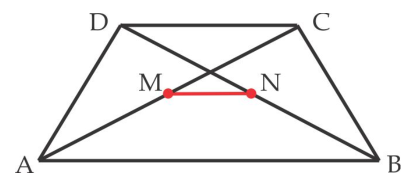
Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão paralelos quando existir um escalar t, tal que $\vec{u} = t \cdot \vec{v}$. Substituindo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nesta equação, chegamos a:

$$\left|\begin{array}{rl} x+2 & = 2t \\ 6 & = t \\ 2 & = (2z-1)\,t \end{array}\right.$$

de onde resulta: $x + 2 = 12$ e $12z - 6 = 2$. Logo, $x = 10$ e $z = 2/3$.

03 **RESOLVENDO UM PROBLEMA GEOMÉTRICO**

No trapézio $ABCD$ *da figura ao lado,* M *e* N *são os pontos médios das diagonais* AC *e* BD*, respectivamente. Expresse o vetor* $\overrightarrow{MN}$ *como combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.



SOLUÇÃO Obesrvando a figura e considerando que M e N são os pontos médios, deduzimos que:

$$\overrightarrow{MA} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Ainda com base na figura, temos: $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$. Logo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \left(\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}.
\end{aligned}$$