

**4.1. FUNDAMENTOS GERAIS**

1. Mostre que os termos trigonométricos  $\sin(n\pi x/T)$  e  $\cos(n\pi x/T)$  são  $2T$ -periódicos.
2. Encontre o período fundamental das seguintes funções:  
**(a)**  $\cos(2x)$    **(b)**  $\cos(2\pi x)$    **(c)**  $\sin(nx)$    **(d)**  $\sin(2\pi x/k)$    **(e)**  $\sin(2\pi nx/k)$ .
3. Faça um gráfico para representar cada uma das funções abaixo:  
**(a)**  $\sin x + \cos x$    **(b)**  $\sin(2\pi x)$    **(c)**  $\sin(2x)$    **(d)**  $2 \cos(4\pi x)$ .
4. Supondo que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função periódica com período fundamental  $T$ , determine o período fundamental das funções  $g(x) = f(ax)$  e  $h(x) = f(x/b)$ ,  $a, b \neq 0$ .
5. Cada função  $f$  dada abaixo é suposta  $2\pi$ -periódica. Esboce seu gráfico no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ , calcule seus limites laterais nos pontos  $x = 0$  e  $x = \pm\pi$  e, por fim, encontre sua série de Fourier:  
**(a)**  $f(x) = x, -\pi < x < \pi$       **(b)**  $f(x) = x^2 - 1, -\pi < x < \pi$   
**(c)**  $f(x) = x^3, -\pi < x < \pi$       **(d)**  $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$   
**(e)**  $f(x) = x, 0 \leq x \leq 2\pi$       **(f)**  $f(x) = |\cos x|, 0 \leq x \leq 2\pi$   
**(g)**  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$       **(h)**  $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ \pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$   
**(i)**  $f(x) = \begin{cases} x + \pi/2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ -x + \pi/2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$       **(j)**  $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$   
**(k)**  $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$       **(l)**  $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$ .
6. Desenvolva a função  $f(x) = \sin x, 0 < x < \pi$ , em série de Fourier de cossenos.
7. Considere a função  $f(x) = x$ , definida para  $0 < x < 2$ . Encontre:

- (a) A extensão ímpar 4-periódica de  $f$  e a série de Fourier de senos da extensão.
- (b) A extensão par 4-periódica de  $f$  e a série de Fourier de cossenos da extensão.

8. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua  $2L$ -periódica. Dado um número real  $a$ , mostre que:

$$\int_{a-L}^{a+L} f(x) dx = \int_{-L}^L f(x) dx.$$

9. Se  $f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par, mostre que a função  $f(x) \cos nx$  é uma função par e  $f(x) \sin nx$  é uma função ímpar. Nesse caso, valem as fórmulas:

$$\int_{-T}^T f(x) \cos nxdx = 2 \int_0^T f(x) \cos nxdx \quad \text{e} \quad \int_{-T}^T f(x) \sin nxdx = 0.$$

10. Considere a função  $f(x) = x^2$ ,  $-\pi \leq x \leq 0$ , e esboce no intervalo  $[-2\pi, 3\pi]$  o gráfico da extensão ímpar  $2\pi$ -periódica de  $f$ . Qual a série de Fourier dessa extensão? Sabendo que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ , use a série de Fourier encontrada e calcule a soma infinita  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}$ .

11. A função  $f(x) = \begin{cases} -x^2/4\pi - x/2 + \pi/2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ -x^2/4\pi + x/2 + \pi/2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$  é suposta  $2\pi$ -periódica. Encontre sua série de Fourier.

#### 4.2. CALCULANDO SOMAS INFINITAS

1. Usando as séries de Fourier do Exercício 5.

(a) Na série 5(b), considere  $x = \pi$  e obtenha  $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

(b) Na série 5(b), considere  $x = 0$  e obtenha  $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ .

(c) Multiplique a série 5(d) por  $x^2$ , integre o resultado de  $-\pi$  até  $\pi$  e obtenha  $\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ .

(d) Na série 5(f), considere  $x = \pi$  e obtenha  $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1}$ .

(e) Na série 5(h), considere  $x = \pi/2$  e obtenha  $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ .

(f) Na série 5(h), considere  $x = 0$  e obtenha  $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ .

(g) Na série 5(k), considere  $x = \pi/4$  e obtenha  $\frac{\pi}{\sqrt{8}} = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - \dots$ .

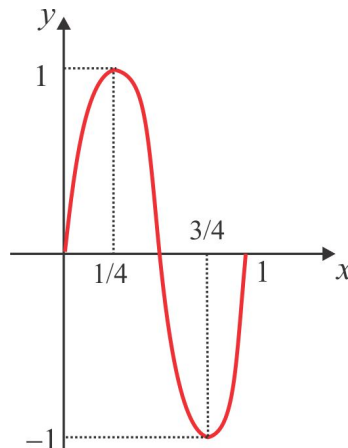
2. Na série encontrada no Exercício 6, considere  $x = \pi/2$  e deduza que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

**RESPOSTAS & SUGESTÕES**

**EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.1**

- Se  $f(x) = \text{sen}(n\pi x/T)$ , então  $f(x + 2T) = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{T} + 2\pi\right) = \text{sen}(n\pi x/T) = f(x)$ . Raciocínio análogo se aplica para  $\text{cos}(n\pi x/T)$ .
- $T = \pi$ ;  $T = 1$ ;  $T = 2\pi/n$ ;  $T = k$ ;  $T = k/n$ .
- Primeiro, identifique o período fundamental da função cujo gráfico será esboçado, porque o gráfico tem um formato familiar. Por exemplo, a função  $f(x) = \text{sen}(2\pi x)$  tem período fundamental  $T = 1$  e seu gráfico, no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ , tem o aspecto mostrado abaixo, que, de certa forma, se assemelha ao gráfico da função  $\text{sen } x$ .



4.  $T_g = T/a$  e  $T_h = Tb$ .

5. (a)  $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \text{sen } nx}{n}$ .

- (b)  $\frac{\pi^2}{3} - 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ .
- (c)  $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (6 - n^2 \pi^2) \operatorname{sen} nx}{n^3}$ .
- (d)  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$ .
- (e)  $\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ .
- (f)  $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1}$ .
- (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2\pi (-1)^{n+1}}{n} + \frac{4[(-1)^n - 1]}{\pi n^3} \right] \operatorname{sen}(nx)$ .
- (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-4 \cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{2 \operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1} \right]$ .
- (i)  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ .
- (j)  $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n - 1] \cos nx}{\pi n^2}$ .
- (k)  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(2n-1)x}{2n-1}$ .
- (l)  $\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \frac{2 \operatorname{sen} 3x}{9\pi} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \frac{2 \operatorname{sen} 5x}{25\pi} + \dots$ .

6. No intervalo  $0 < x < \pi$ , temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

7. (a)  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(n\pi x/2)}{n}$       (b)  $1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$ .

8. Seja  $F(x) = \int_{x-L}^{x+L} f(t) dt - \int_{-L}^L f(t) dt$  e use o Teorema Fundamental do Cálculo para deduzir que:

$$F'(x) = f(x+L) - f(x-L) = f(x-L+2L) - f(x-L) = 0,$$

desde que  $f$  é  $2L$ -periódica. Logo,  $F$  é constante e sendo  $F(0) = 0$  deduzimos que  $F$  é identicamente nula e daí segue o resultado.

9. Represente por  $g(x)$  e  $h(x)$  as funções  $f(x) \cos(nx)$  e  $f(x) \sin(nx)$ , respectivamente. Sendo  $f(x)$  uma função par, temos que  $f(-x) = f(x)$  e, conseqüentemente,

$$g(-x) = f(-x) \cos(-nx) = f(x) \cos(nx) = g(x).$$

De forma similar, deduza que  $h(-x) = -h(x)$  e conclua que  $h(x)$  é uma função ímpar.

10. Após encontrar a série de Fourier, considere  $x = \pi/2$  para obter:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Na figura abaixo, ilustramos no intervalo  $[-2\pi, 3\pi]$ , o gráfico da extensão ímpar  $2\pi$ -periódica:

