

**3.1. FUNDAMENTOS GERAIS**

1. Falso (**F**) ou Verdadeiro (**V**)? Justifique.

- (a) Se a série $\sum c_n x^n$ diverge em $x = 2$, então ela diverge em $x = 3$.
- (b) Se a série $\sum c_n x^n$ converge em $x = 2$, então ela converge em $x = 3$.
- (c) Se $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ é convergente, então $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é absolutamente convergente no intervalo $[-1, 1]$.
- (d) Se uma série de potências é absolutamente convergente em um dos extremos de seu intervalo de convergência, então ela também converge absolutamente no outro extremo.
- (e) Se R é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, então \sqrt{R} é o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n}$.
- (f) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L > 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ tem raio de convergência $1/L$.
- (g) Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ pode convergir apenas em dois valores de x .
- (h) Se uma série de potências converge em um extremo de seu intervalo de convergência e diverge no outro, então a convergência naquele extremo é condicional.
- (i) Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ tem raio de convergência 2 e $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ tem raio de convergência 3, então o raio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n) x^n$ é $R = 2$.

2. Em cada caso, determine o intervalo de convergência da série de potências.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x - 3)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(-4)^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x - 1)^{2n}}{3^{2n-1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$
- (g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(\ln n)}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x + 5)^{n-1}}{n^2}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n - 1)!}$
- (j) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ (k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!}$ (l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n + 1)}$
- (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 - x)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - x)^n}{(n + 1) 3^n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x - 3)^{4n}}{n^{1/n}}$
- (p) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{arctg} n$ (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(n + 1)^3}$ (r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5^n + 5^{-n})(x + 1)^{3n-2}}{n^2}$.

3. Começando com a fórmula $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, válida para $|x| < 1$, represente cada função por uma série de potências de x . Em cada caso determine o raio e o intervalo de convergência.

(a) $\frac{1}{2+x}$ (b) $\frac{1}{1-x^4}$ (c) $\frac{1}{1-4x}$ (d) $\frac{x}{1-x^2}$
 (e) $\frac{x}{2-3x}$ (f) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ (g) $\ln(1-x)$ (h) $\frac{x^3}{(1-x^4)^2}$
 (i) $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ (j) $\frac{x^2-3}{x-2}$ (k) $\frac{1}{(1-x)^3}$ (l) $\frac{1}{6-x-x^2}$.

4. Use a série de e^x e calcule o valor da soma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$.

5. Represente $\frac{1}{(1-x)^2}$ em séries de potências de x e use o resultado para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

6. Represente $\frac{e^x - 1}{x}$ em série de potências de x e, por derivação termo a termo, prove que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

7. Represente $x^2 e^{-x}$ em série de potências de x e, derivando o resultado, prove que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2) 2^{n+1}}{n!} = 8.$$

8. No intervalo $0 < x < 4$, mostre que:

$$\ln x = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{n2^n}.$$

9. Integrando de $x = 0$ até $x = 1$ uma série de potências que representa a função xe^x , mostre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

10. Com auxílio da série de potências de $\arctg x$, mostre que:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}.$$

11. Em cada caso, use uma série de potências adequada e aproxime a integral com duas casas decimais.

(a) $\int_0^{1/3} \frac{dx}{1+x^6}$ (b) $\int_0^{0.5} \exp(-x^3) dx$.

12. Identifique a função do cálculo definida pela série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, no intervalo $|x| < 1$.

3.2. SÉRIE DE TAYLOR & SÉRIE MACLAURIN

1. Represente as seguintes funções em séries de potências de x :

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ (b) $f(x) = x \operatorname{sen} x$ (c) $f(x) = 3^{x+1}$ (d) $f(x) = \ln(1+x^2)$

(e) $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ (f) $f(x) = \cos^2 x$ (g) $f(x) = e^{4-x}$ (h) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

(i) $f(x) = \operatorname{senh} x$ (j) $f(x) = \operatorname{sen} 4x$ (k) $f(x) = \operatorname{cosh} x$ (l) $f(x) = \cos 3x$

2. Em estatística a função $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ recebe o nome de *Função Erro*. Encontre a Série de Maclaurin da função $E(x)$.

3. Determine as constantes a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 , de modo que:

$$3x^4 - 17x^3 + 35x^2 - 32x + 17 = a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0.$$

4. Em cada caso, encontre a expansão de Taylor da função f em torno do ponto indicado.

(a) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 9$ (b) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $a = 0$ (c) $f(x) = \cos x$; $a = \pi/3$

(d) $f(x) = e^x$; $a = 4$ (e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = 1$ (f) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $a = \pi/6$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $a = 1$ (h) $f(x) = \frac{1}{3x}$; $a = 2$ (i) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$; $a = 3$.

5. Qual a Série de Maclaurin do polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$?

6. Encontre uma série de potências de x para representar a função $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ e, usando o resultado, conclua que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$.

7. Determine uma série de potências de $x+1$ para a função $f(x) = e^{2x}$ e uma série de potências de $x-1$ para $g(x) = \ln x$.

8. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, infinitamente derivável, é tal que $f'(x) = 2xf(x)$, $f(x) > 0$, $\forall x$, e $f(0) = 1$. Represente a função $f(x)$ por uma série de potências de x . Idem para uma função $g(x)$ com as propriedades: $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ e $g''(x) = -g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

9. Preencha a tabela com os valores das derivadas indicadas, considerando as seguintes funções:

$$f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos(x^2), \quad h(x) = \ln(1+x^2) \quad \text{e} \quad p(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

$f^{(15)}(0)$	$f^{(28)}(0)$	$g^{(16)}(0)$	$h^{(20)}(0)$	$p^{(17)}(0)$

10. Estime o erro cometido ao substituir, no intervalo $|x| < 0.1$, o valor de \cos por $1 - x^2/2$.

3.3. SÉRIE BINOMIAL

A expansão binomial

$$(x+y)^k = x^k + kx^{k-1}y + \frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}y^2 + \dots + y^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (0.1)$$

simbolicamente representada por:

$$(x+y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j}$$

e conhecida por *binômio de Newton*, foi generalizada por volta de 1665 por Newton, no caso em que o expoente k é um número fracionário positivo ou negativo, onde ele obteve uma expansão em série infinita para $(x+y)^k$. Motivados pela fórmula binomial de Newton (0.1) encontra-se a seguinte expansão em série de potências para a função $f(x) = (1+x)^\alpha$, sendo α um número real qualquer, a qual será a série de Maclaurin de f :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \dots, \quad |x| < 1. \quad (0.2)$$

cujo n -ésimo termo é $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$, temos que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left| \frac{\alpha-n}{n+1} \right| = |x|$$

e, portanto, a série binomial converge absolutamente quando $|x| < 1$ e diverge quando $|x| > 1$.

Exemplo Uma maneira de obtermos um valor aproximado de $\sqrt{1+x}$, para um dado valor de x no intervalo $(-1, 1)$, é usando a série binomial. Neste caso temos $\alpha = 1/2$, de modo que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \dots$$

e, dependendo da situação, podemos considerar apenas os dois ou os três primeiros termos da série para a aproximação. Considerando $x = 0.2$ e aproximando a série por seus três primeiros termos, encontramos:

$$\sqrt{1.2} \simeq 1 + \frac{1}{2}(0.2) - \frac{1}{8}(0.2)^2 \simeq 1.095.$$

1. Calcule $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$ com 4 casas decimais.

2. Se $|x| < 0.01$, qual o erro cometido ao substituir $\sqrt{1+x}$ por $1+x/2$?

3. Usando a série binomial para $\sqrt[3]{1+x}$, calcule o valor de $\sqrt[3]{25}$ com 3 casas decimais e compare o valor com o resultado obtido em uma calculadora.

4. Usando a série binomial para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mostre que:

$$\arcsen x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n+1}}{n! (2n+1) 2^n}, \quad |x| < 1.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.1

1. Associe as afirmações verdadeiras aos fatos teóricos e as falsas a um contraexemplo.

(a) **(V)** (b) **(F)** (c) **(V)** (d) **(V)** (e) **(V)** (f) **(V)** (g) **(F)** (h) **(V)** (i) **(V)**

2. (a) {3} (b) (-2, 2) (c) (-1, 1) (d) (-1, 1) (e) (-2, 4) (f) (-1, 1) (g) (-1, 1] (h) [-6, -4]
 (i) $(-\infty, \infty)$ (j) {0} (k) $(-\infty, \infty)$ (l) $(-\infty, \infty)$ (m) (2, 4] (n) (-2, 4] (o) (2, 4) (p) (-1, 1)
 (q) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (r) $|x+1| \leq 1/\sqrt[3]{5}$.

3. Em alguns casos use o processo de Derivação ou Integração termo a termo. Por exemplo, a série (i) é obtida por derivação da série (c).

(a) $\frac{1}{2+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2.$

(b) $\frac{1}{1-x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n}, \quad |x| < 1.$

(c) $\frac{x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$

$$(d) \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n, \quad |x| < 1/4.$$

$$(e) \frac{x}{2-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2/3.$$

$$(f) \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} x^{2n-1}, \quad |x| < 1.$$

$$(g) \ln(1-x) = -\int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1.$$

$$(h) \frac{x^3}{(1-x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{4n-1}, \quad |x| < 1.$$

$$(i) \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}, \quad |x| < 1.$$

$$(j) \frac{x^2-3}{x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3x^n - x^{n+2}}{2^{n+1}}, \quad |x| < 2.$$

$$(k) \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)x^n}{2}, \quad |x| < 1.$$

$$(l) \frac{1}{6-x^2-x} = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{3(1+x/3)} + \frac{1}{2(1-x/2)} \right] = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} \right] x^n, \quad |x| < 2.$$

4. $\exp(-1/2)$.

$$5. \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}; \quad |x| < 1. \text{ Agora, considere } x = 1/2.$$

$$6. \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)x^{k-2}}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}. \text{ Agora faça } x = 1.$$

7. Fazer.

8. O ponto de partida é a série geométrica

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}, \quad 0 < x < 4,$$

que, após integração termo a termo, nos dá:

$$\ln x - \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} = (\text{reindexar: } n+1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (x-2)^k}{k2^k}.$$

9. Fazer.

10. Basta observar que $\frac{\pi}{6} = \arctg(1/\sqrt{3})$ e considerar $x = 1/\sqrt{3}$ na série de $\arctg x$.

11. (a) 0.3299 (b) 0.4849.

12. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.2

1. Algumas séries podem ser obtidas a partir de representações conhecidas. Por exemplo, se na série de e^x substituirmos x por $-x^2$ obtemos uma série para $\exp(-x^2)$.

(a) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; x \in \mathbb{R}$

(b) $x \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}; x \in \mathbb{R}$

(c) $3^{x+1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n x^n}{n!}; x \in \mathbb{R}$

(d) $\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}; |x| < 1$

(e) $x^2 \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}; x \in \mathbb{R}$

(f) $\cos^2 x = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}; x \in \mathbb{R}$

(g) $e^{4-x} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}; x \in \mathbb{R}$

(h) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}; x \in \mathbb{R}$

(i) $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; x \in \mathbb{R}.$

(j) $\operatorname{sen}(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}; x \in \mathbb{R}$

(k) $\operatorname{cosh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; x \in \mathbb{R}$

(l) $\cos(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} x^{2n}}{(2n)!}; x \in \mathbb{R}$

2. Integrando a série obtida no Exercício 3.2(1a) de 0 até x , obtemos $E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$

3. $a_0 = 6, a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = -5$ e $a_4 = 3.$

4. A série de Taylor em torno de $x = a$ de uma função $f(x)$, infinitamente derivável no intervalo $|x - a| < R,$ vem dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}.$$

No caso em que $a = 0,$ a série correspondente é conhecida pelo nome de *Série de Maclaurin* de $f.$

(a) $\sqrt{x} = 3 + \frac{1}{6}(x-9) + \sum (-1)^{n+1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{n!2^n 3^{2n-1}} (x-9)^n.$

(b) $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

(c) $\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(x-\pi/3) - \frac{1}{4}(x-\pi/3)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x-\pi/3)^3.$

(d) $e^x = e^4 \cdot e^{x-4} = e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!}.$

$$(e) \sqrt[3]{x} = 1 + (x-1)/3 - (x-1)^2/3^2 + 5(x-1)^3/3^4 - \dots$$

$$(f) \sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{2 \cdot 2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3!}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \dots$$

$$(g) \frac{1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (x-1)^n; \quad 0 < x < 2.$$

$$(h) \frac{1}{3x} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}.$$

$$(i) \frac{1}{2x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n (x-3)^n}{7^{n+1}}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{13}{2}.$$

$$5. P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \text{ sendo } a_k = 0 \text{ para } k \geq n+1.$$

6. Temos que:

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{x} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n)!} = -x + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} + \frac{x^7}{8!} - \dots$$

e daí segue que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0$.

$$7. e^{2x} = e^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+1)^n}{n!}; \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < x < 2.$$

$$8. f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$9. f^{(15)}(0) = 0; \quad f^{(28)}(0) = -28; \quad g^{(16)}(0) = \frac{16!}{8!}; \quad h^{(20)}(0) = -\frac{20!}{10!}; \quad p^{(17)}(0) = \frac{16!}{8!}.$$

$$10. |E| \leq 1.6 \times 10^{-4}.$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.3

$$1. \text{ Aproxime } (1-x^3)^{1/2} \text{ por } S_3, \text{ integre de 0 até 1 e obtenha } \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx \simeq 0.8572.$$

$$2. E < 1.25 \times 10^{-5}.$$

$$3. \text{ Escreva } \sqrt[3]{25} = 3 \sqrt[3]{25/27} = 3 \sqrt[3]{1-2/27} \text{ e usando a série binomial para obter } \sqrt[3]{25} \simeq 2.9262.$$