4.1. FUNDAMENTOS GERAIS

1. Mostre que os termos trigonométricos $\operatorname{sen}(n\pi x/T)$ e $\cos(n\pi x/T)$ são $2T$-periódicos.

2. Encontre o período fundamental das seguintes funções:

   (a) $\cos(2x)$ **(b)** $\cos(2\pi x)$ **(c)** $\operatorname{sen}(nx)$ **(d)** $\operatorname{sen}(2\pi x/k)$ **(e)** $\operatorname{sen}(2\pi nx/k)$.

3. Faça um gráfico para representar cada uma das funções abaixo:

   (a) $\operatorname{sen} x + \cos x$ **(b)** $\operatorname{sen}(2\pi x)$ **(c)** $\operatorname{sen}(2x)$ **(d)** $2\cos(4\pi x)$.

4. Supondo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função periódica com período fundamental T, determine o período fundamental das funções $g(x) = f(ax)$ e $h(x) = f(x/b)$, $a, b \neq 0$.

5. Cada função f dada abaixo é suposta 2π-periódica. Esboce seu gráfico no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, calcule seus limites laterais nos pontos $x = 0$ e $x = \pm\pi$ e, por fim, encontre sua série de Fourier:

   (a) $f(x) = x, \ -\pi < x < \pi$ (b) $f(x) = x^2 - 1, \ -\pi < x < \pi$

   (c) $f(x) = x^3, \ -\pi < x < \pi$ (d) $f(x) = x^2, \ -\pi < x < \pi$

   (e) $f(x) = x, \ 0 \leq x \leq 2\pi$ (f) $f(x) = |\cos x|, \ 0 \leq x \leq 2\pi$

   (g) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x < 0 \\ x^2, & 0 < x < \pi \end{cases}$ (h) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ \pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

   (i) $f(x) = \begin{cases} x + \pi/2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ -x + \pi/2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ (j) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

   (k) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < x < 3\pi/2 \end{cases}$ (l) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < x < 3\pi/2. \end{cases}$

6. Desenvolva a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$, em série de Fourier de cossenos.

7. Considere a função $f(x) = x$, definida para $0 < x < 2$. Encontre:

(a) A extensão ímpar 4-periódica de f e a série de Fourier de senos da extensão.

(b) A extensão par 4-periódica de f e a série de Fourier de cossenos da extensão.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua $2L$-periódica. Dado um número real a, mostre que:

$$\int_{a-L}^{a+L} f(x)\, dx = \int_{-L}^{L} f(x)\, dx.$$

9. Se $f : [-T, T] \to \mathbb{R}$ é uma função par, mostre que a função $f(x)\cos nx$ é uma função par e $f(x)\,\mathrm{sen}\, nx$ é uma função ímpar. Nesse caso, valem as fórmulas:

$$\int_{-T}^{T} f(x)\cos nx dx = 2\int_{0}^{T} f(x)\cos nx dx \quad \text{e} \quad \int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{sen}\, nx dx = 0.$$

10. Considere a função $f(x) = x^2,\ -\pi \le x \le 0$, e esboce no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$ o gráfico da extensão ímpar 2π-periódica de f. Qual a série de Fourier dessa extensão? Sabendo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \dfrac{\pi}{4}$, use a série de Fourier encontrada e calcule a soma infinita $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(2n-1)^3}$.

11. A função $f(x) = \begin{cases} -x^2/4\pi - x/2 + \pi/2, & -\pi \le x \le 0 \\ -x^2/4\pi + x/2 + \pi/2, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$ é suposta 2π-periódica. Encontre sua série de Fourier.

4.2. CALCULANDO SOMAS INFINITAS

1. Usando as séries de Fourier do Exercício 5.

(a) Na série 5(b), considere $x = \pi$ e obtenha $\dfrac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

(b) Na série 5(b), considere $x = 0$ e obtenha $\dfrac{\pi^2}{12} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

(c) Multiplique a série 5(d) por x^2, integre o resultado de $-\pi$ até π e obtenha $\dfrac{\pi^4}{90} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

(d) Na série 5(f), considere $x = \pi$ e obtenha $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

(e) Na série 5(h), considere $x = \pi/2$ e obtenha $\dfrac{\pi}{4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

(f) Na série 5(h), considere $x = 0$ e obtenha $\dfrac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.

(g) Na série 5(k), considere $x = \pi/4$ e obtenha $\dfrac{\pi}{\sqrt{8}} = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - \cdots$.

2. Na série encontrada no Exercício 6, considere $x = \pi/2$ e deduza que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

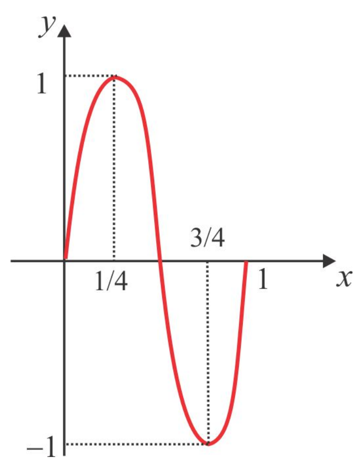
RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.1

1. Se $f(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/T)$, então $f(x + 2T) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}(n\pi x/T) = f(x)$. Raciocínio análogo se aplica para $\cos(n\pi x/T)$.

2. $T = \pi$; $T = 1$; $T = 2\pi/n$; $T = k$; $T = k/n$.

3. Primeiro, identifique o período fundamental da função cujo gráfico será esboçado, porque o gráfico tem um formato familiar. Por exemplo, a função $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi x)$ tem período fundamental $T = 1$ e seu gráfico, no intervalo $0 \leq x \leq 1$, tem o aspecto mostrado abaixo, que, de certa forma, se assemelha ao gráfico da função $\operatorname{sen} x$.



4. $T_g = T/a$ e $T_h = Tb$.

5. **(a)** $2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n}$.

(b) $\dfrac{\pi^2}{3} - 1 + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$.

(c) $2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \left(6 - n^2\pi^2\right) \operatorname{sen} nx}{n^3}$.

(d) $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$.

(e) $\pi - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$.

(f) $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^3}\right] \operatorname{sen}(nx)$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-4\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{2\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}\right]$.

(i) $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

(j) $\dfrac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nx}{n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left[(-1)^n - 1\right] \cos nx}{\pi n^2}$.

(k) $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cos(2n-1)x}{2n-1}$.

(l) $\dfrac{2}{\pi}\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \dfrac{2\operatorname{sen} 3x}{9\pi} - \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4} + \dfrac{2\operatorname{sen} 5x}{25\pi} + \cdots$.

6. No intervalo $0 < x < \pi$, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

7. **(a)** $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(n\pi x/2)}{n}$ **(b)** $1 - \dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$.

8. Seja $F(x) = \displaystyle\int_{x-L}^{x+L} f(t)\,dt - \int_{-L}^{L} f(t)\,dt$ e use o Teorema Fundamental do Cálculo para deduzir que:

$$F'(x) = f(x+L) - f(x-L) = f(x - L + 2L) - f(x-L) = 0,$$

desde que f é $2L$-periódica. Logo, F é constante e sendo $F(0) = 0$ deduzimos que F é identicamente nula e daí segue o resultado.

9. Represente por $g(x)$ e $h(x)$ as funções $f(x)\cos(nx)$ e $f(x)\operatorname{sen}(nx)$, respectivamente. Sendo $f(x)$ uma função par, temos que $f(-x) = f(x)$ e, consequentemente,

$$g(-x) = f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos(nx) = g(x).$$

De forma similar, deduza que $h(-x) = -h(x)$ e conclua que $h(x)$ é uma função ímpar.

10. Após encontrar a série de Fourier, considere $x = \pi/2$ para obter:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Na figura abaixo, ilustramos no intervalo $[-2\pi, 3\pi]$, o gráfico da extensão ímpar 2π-periódica: