1.1. TERMO GERAL & CLASSIFICAÇÃO

1. Em cada caso abaixo, encontre os quatro primeiros termos da sequência:

   (a) $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$ **(b)** $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **(c)** $c_n = (-1)^n n$.

2. Faça um gráfico que represente os primeiros termos da sequência $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ligados por segmentos de retas e verifique quantos pontos da forma (n, a_n) estão fora da faixa horizontal determinada pelas retas $y = 4/5$ e $y = 6/5$.

3. Dê exemplo de uma sequência $\{a_n\}$, não constante, para ilustrar cada situação abaixo:

   (a) Limitada e Crescente.

   (b) Limitada e Decrescente.

   (c) Limitada e não Monótona.

   (d) Não Limitada e não Crescente.

   (e) Não Nimitada e não Monótona.

   (f) Monótona e não Limitada.

4. Construa uma sequência limitada e não monótona, que possua uma subsequência crescente.

5. Expresse pelo seu termo geral cada sequência dada abaixo:

   (a) $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ (b) $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ (c) $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$

   (d) $0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, \ldots$ (e) $1, 9, 25, 49, 81, \ldots$ (f) $0, 3/2, -2/3, 5/4, -4/5, 7/6 \ldots$

   (g) $0, 3, 2, 5, 4, \ldots$ (h) $1, 3/2, 2, 5/2, 3, \ldots$ (i) $-4, -2, -4, -2, \ldots$

6. Classifique as sequências do Exercício 5 quanto à limitação e monotonia e selecione de (e), (f) e (i) uma subsequência crescente. Qual daquelas sequências possui uma subsequência constante?

7. Considere as funções $f(x) = \cos x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $h(x) = (1+x)^{-1}$. Encontre expressões para as derivadas de ordem n dessas funções, no ponto $x = 0$.

8. Determine o sup e o inf das seguintes sequências:

   (a) $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2+n}$ **(b)** $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ **(c)** $a_n = \dfrac{2}{3n-4}$ **(d)** $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ **(e)** $a_n = \dfrac{3n^2}{n^2+n}$
   (f) $a_n = \ln n$ **(g)** $a_n = -n^2 + n$.

9. Construa uma sequência $\{a_n\}$ cuja distância entre quaisquer dois termos consecutivos é igual 4.

10. Dê exemplo de uma sequência $\{a_n\}$ com as seguintes características: os termos de ordem par estão entre 3 e 4, os termos de ordem ímpar estão entre 4 e 5, mas a_n *se aproxima* do número 4, à medida que o índice n vai aumentando.

11. Considere a sequência de termo geral $a_n = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{(2n+2)\pi}{3}$. Escreva os 10 primeiros termos da sequência $\{a_n\}$ e calcule a_{201}.

12. Se $a_n = (-1)^n + 2/n,\ n \in \mathbb{N}$, calcule o valor de: $2 \cdot \sup(a_n) + 3 \cdot \inf(a_n)$.

1.2. SEQUÊNCIAS CONVERGENTES

1. Falso (**F**) ou verdadeiro (**V**)? Procure justificar as afirmações falsas com um contraexemplo.

   (a) Toda sequência convergente é limitada.

   (b) Toda sequência limitada é convergente.

   (c) Toda sequência limitada é monótona.

   (d) Toda sequência monótona é convergente.

   (e) A soma de duas sequências divergentes é divergente.

   (f) Toda sequência divergente é não monótona.

   (g) Se uma sequência convergente possui uma infinidade de termos nulos, seu limite é zero.

   (h) se uma sequência possui uma subsequência convergente, ela própria converge

   (i) Uma sequência alternada é necessariamente divergente.

   (j) Toda sequência decrescente limitada é convergente e seu limite é zero.

   (k) Se uma sequência $\{a_n\}$ diverge, então $\{|a_n|\}$ também diverge.

(l) Se $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, então $\{a_n\}$ é convergente.

(n) Se a sequência $\{|a_n|\}$ converge para zero, então $\{a_n\}$ também converge para zero.

(o) Se $a_n \le b_n$, $\forall n$, $\{a_n\}$ crescente e $\{b_n\}$ convergente, então $\{a_n\}$ converge.

(p) Se $\{a_n\}$ é convergente, então $\{(-1)^n a_n\}$ também converge.

(q) A sequência $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{na_n}{n+1}$ é convergente.

(r) A sequência $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 - a_n$ é convergente.

(s) Se $a_n \neq 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(t) Se $|a_{n+1} - a_n| = 1$, $\forall n$, então $\{a_n\}$ é divergente.

(u) Se $(-1)^n a_n$ é convergente e $a_n > 0$, $\forall n$, então $a_n \to 0$.

(v) Se $\{a_n\}$ é decrescente e $a_n > 0$, $\forall n \ge 10$, então $\{a_n\}$ converge.

2. Dê exemplo de duas sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, com $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, e tal que $\{a_n b_n\}$ seja divergente. Por que isso não contradiz o Critério do Limite Zero?

3. Usando a definição de limite, prove que:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n-1} = \dfrac{1}{2}$ **(b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{2+3n} = 0$ **(c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2.$

4. Calcule o limite das seguintes sequências:

(a) $\dfrac{n-1}{n+1}$ (b) $\dfrac{1}{3^n} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$ (c) $\dfrac{\ln n}{e^n}$ (d) $\dfrac{4n^2 - 3n}{n^2 + 5n - 6}$ (e) $\dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$

(f) $\left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^n$ (g) $\dfrac{\sqrt{n!} + e^{2n}}{5\sqrt{n!} - e^n}$ (h) $\dfrac{n}{e^n}$ (i) $\dfrac{3n\sqrt{n} + 1}{7 - 2n\sqrt{n}}$ (j) $\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

(k) $n^{1/n}$ (l) $n \operatorname{sen}(\pi/n)$ (m) $2^n/e^n$ (n) $\sqrt[n]{n^2 + n}$ (o) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(p) $\sqrt[n]{a}\,,\ a > 0$ (q) $\dfrac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^n}$ (r) $\dfrac{n!}{3^{n+1}}$ (s) $\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ (t) $\dfrac{\sqrt[3]{n^2} \operatorname{sen}(n^2)}{n+2}$

5. Em cada caso verifique se a sequência $\{a_n\}$ é convergente ou divergente.

(a) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$ (b) $\dfrac{2^n}{n!}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$ (d) $\dfrac{2^n}{1+2^n}$

(e) $\dfrac{n^2}{2n-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}$ (f) $\dfrac{n^n}{n!}$ (g) $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!2^n}$ (h) $n\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{n^3+1}{n^2}\right)-\operatorname{sen} n\right]$

(i) $\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{(-1)^n}{n}$ (j) $\displaystyle\int_1^n e^{-x}dx$ (k) $\dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ (l) $\dfrac{n^2}{\ln(n+1)}$

(m) $\ln(e^n-1)-n$ (n) $\cos(n\pi)$ (o) $\sqrt[8]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1}$ (p) $\operatorname{sen}(n\pi/2)$

6. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n+4^n)^{1/n}=4$. Se $a,b\geq 0$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{1/n}=\max\{a,b\}$.

7. Se $|r|<1$, use o Critério da Razão 1.3.17 para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} nr^n=0$. Se $r>1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$. E se $r<-1$?

8. Dado um número real r seja $S_n=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1},\ n\in\mathbb{N}$. Mostre que $S_n-rS_n=1-r^n$ e se $|r|<1$, use essa relação e deduza que

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-r}.$$

Agora, identifique a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$ com aquela de termo geral $a_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$ e calcule seu limite.

9. Dois procedimentos foram usados ao calcular $\lim(1/n+1/n+1/n+\cdots+1/n)$ (soma com n parcelas). Explique qual o procedimento correto.

(a) Simplificando a expressão:

$$\lim(1/n+1/n+\cdots+1/n)=\lim\left(n\times\frac{1}{n}\right)=1$$

(b) Usando a propriedade 1.3.7(a):

$$\lim(1/n+1/n+\cdots+1/n)=\lim 1/n+\lim 1/n+\cdots+\lim 1/n=0.$$

10. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2^2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3^2})\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4^2})\cdot\ldots\cdot\operatorname{sen}(\frac{\pi}{n^2})\right]=0$. Não use produto de limites!

11. Em uma calculadora uma sequência é gerada introduzindo-se um número e pressionando-se a tecla $\boxed{1/x}$. Em que condições a sequência tem limite?

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, sendo $f(0) = 0$. Calcule $\lim_{n\to\infty} nf(1/n)$. Quanto vale $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{arctg}(1/n)$?

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(x) > -1$, $\forall x$, e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dê exemplo de uma tal função e calcule o limite da sequência $a_n = \dfrac{\ln(1 + f(n))}{f(n)}$.

14. Considere a sequência $\{a_n\}$ definida pela recorrência: $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + \cos a_{n-1}$, para $n \geq 2$. Mostre que $\{a_n\}$ é monótona limitada (convergente) e que $\lim a_n = \pi/2$.

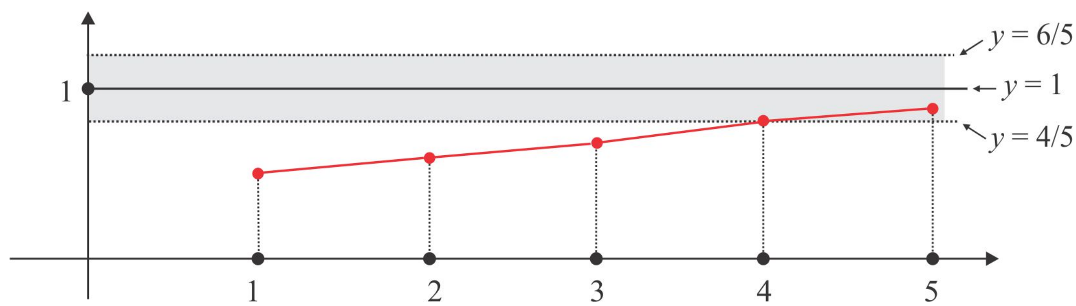
15. Uma população estável de 35.000 pássaros vive em três ilhas. Cada ano, 10% da população da ilha A migra para ilha B, 20% da população da ilha B migra para a ilha C e 5% da população da ilha C migra para ilha A. Denotando por A_n, B_n e C_n, respectivamente, os números de pássaros nas ilhas A, B e C, no n-ésimo ano antes da ocorrência da migração e admitindo a convergência das sequências $\{A_n\}, \{B_n\}$ e $\{C_n\}$, dê uma aproximação do número de pássaros em cada ilha após muitos anos.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.1

1. **(a)** $1, 1/3, 1/5, 1/7$ **(b)** $\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}, \sqrt{5} - 2$ **(c)** $-1, 2, -3, 4$.

2. Os pontos $(1, a_1), (2, a_2)$ e $(3, a_3)$ estão fora da faixa; o ponto $(4, a_4)$ está na fronteira e a partir de $n = 5$ todos os pontos (n, a_n) estão dentro da faixa, como sugere a figura abaixo.



3. **(a)** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ **(b)** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ **(c)** $\{(-1)^n\}$ **(d)** $\{-n\}$ **(e)** $\{(-1)^n n\}$ **(f)** $\{n\}$.

4. A sequência $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ é limitada e não monótona e a subsequência $a_{2n-1} = \dfrac{-1}{2n-1}$ é crescente.

5. **(a)** $1/n$ **(b)** $[1+(-1)^{n+1}]/2$ **(c)** $1/2^n$ **(d)** $1+(-1)^n$ **(e)** $(2n-1)^2$ **(f)** $(-1)^n+1/n$

   (g) $(-1)^n+n$ **(h)** $\dfrac{n+1}{2}$ **(i)** $-3+(-1)^n$.

6. Limitada: (a), (b), (c), (d), (f) e (i); crescente: (e) e (h); decrescente: (a) e (c). Em (e), (f) e (i) as subsequências pares são crescentes e (b), (d), e (i) são as únicas que possuem subsequências constantes. Recorde-se que uma sequência possui uma subsequência constante quando essa constante se repetir uma infinidade de vezes.

7. $f^{(n)}(0)=\cos(n\pi/2)$; $g^{(n)}(0)=\text{sen}(n\pi/2)$; $h^{(n)}(0)=(-1)^n n!$

8. Recorde-se que o ínfimo de uma sequência crescente é o seu primeiro termo. No caso em que a sequência é decrescente, seu primeiro termo é o supremo.

	$-n^2+n$	$2^n/n!$	$2/(3n-4)$	$(-2)^n$	$1-1/n$	$\ln n$	$3n^2/\left(n^2+n\right)$
sup	0	2	1	∞	1	∞	3
inf	$-\infty$	0	-2	$-\infty$	0	0	$3/2$

9. Considere sequência de termo geral: $a_n=2(-1)^n$.

10. Se $a_n=4+(-1)^{n+1}/n$, então $a_{2n}=4-\frac{1}{2n}$ está entre 3 e 4, $a_{2n-1}=4+\frac{1}{2n-1}$ está entre 4 e 5 e, alem dissso, $\lim a_n=4$.

11. $a_{201}=2$.

12. $2\cdot\sup(a_n)+3\cdot\inf(a_n)=4$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.2

1. (a) V (b) F (c) F (d) F (e) F (f) F (g) V (h) F (i) F (j) F (k) F (l) F (m) F (n) V (o) V (p) F (q) V (r) F (s) V (t) V (u) V (v) V.

2. Considerando as sequências $a_n=1/n$ e $b_n=n^2$, então a sequência $a_nb_n=n$ é divergente com limite ∞. Nesse caso, a sequência b_n não é limitada, como exige o referido critério.

3. Vejamos o item (a), como ilustração. Temos:

$$\left|\frac{n}{2n-1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2n-2n+1}{4n-2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n-2}<\varepsilon \Leftrightarrow n>\tfrac{1}{4}\left(2+1/\varepsilon\right).$$

A última desigualdade sugere escolher o número natural n_0, de modo que $n_0 > 1/2 + 1/4\varepsilon$, e teremos comprovado a definição.

4. (a) 1 (b) 0 (c) 0 (d) 4 (e) 1 (f) $\sqrt[3]{e}$ (g) 1/5 (h) 0 (i) $-3/2$ (j) e^2 (k) 1 (l) π (m) 0 (n) 1 (o) 0 (p) 1 (q) 1/3 (r) ∞ (s) 0 (t) 0

5. Recorde-se que convergir é ter limite finito. Assim, uma sequência (a_n) é divergente quando não tiver limite ou $\lim a_n = \pm\infty$.

(a) Divergente ($\lim a_n = \infty$).

(b) Convergente (segue do Critério da Razão que $\lim a_n = 0$).

(c) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(d) Convergente ($\lim a_n = 1$).

(e) Convergente ($\lim a_n = \lim \dfrac{2n^2}{4n^2-1} = 1/2$).

(f) Divergente ($\lim a_n = \infty$).

(g) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(h) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(i) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(j) Convergente ($\lim a_n = 1/e$).

(k) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(l) Divergente ($\lim a_n = \infty$).

(m) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(n) Divergente (não tem limite).

(o) Convergente ($\lim a_n = 0$).

(p) Divergente (não tem limite).

6. Considerando que $\lim (3/4)^n = 0$, temos:

$$\lim (3^n + 4^n)^{1/n} = 4 \lim \left[1 + \left(\frac{3}{4} \right)^n \right]^{1/n} = 4.$$

7. Basta observar que:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |r| \left(\frac{n+1}{n} \right) \to |r| < 1.$$

8. Para comprovar a relação $\left(1 + r + r + \cdots + r^{n-1}\right)(1 - r) = 1 - r^n$ é suficiente distribuir o produto do lado esquerdo. Se $|r| < 1$, então $r^n \to 0$ e, sendo assim, $\lim \left(r + r^2 + \cdots + r^n\right) = \dfrac{r}{1-r}$. Para $r = 1/2$, obtemos $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$ e, conseqüentemente, $\lim a_n = 2$.

9. O procedimento (b) não está correto, porque na Propriedade 1.3.7(a) o número de parcelas é fixo, isto é, não muda com o índice n.

10. Use o Critério do Confronto, observando que:

$$0 \le \left| \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2^2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3^2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4^2}) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n^2}) \right| \le \left| \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n^2}) \right| \to 0.$$

11. A sequência convergirá se o número x introduzido na calculadora for igual a ± 1.

12. Usando a definição de derivada, é fácil deduzir que $\lim\limits_{n \to \infty} n f(1/n) = f'(0)$. Para $f(x) = \operatorname{arctg} x$, temos $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ e daí $f'(0) = 1$. Assim, $\lim\limits_{n \to \infty} n \operatorname{arctg}(1/n) = 1$.

13. A função $f(x) = -\exp\left(-x^2\right)$ atende às condições exigidas e usando a regra de L'Hôpital encontra-se $\lim a_n = 1$.

14. A sequênca $\{a_n\}$ é crescente e $0 \le a_n \le \pi/2$. Se $l = \lim a_n$, então $l = l + \cos l$ e, assim, $l = \pi/2$.

15. De acordo com o processo migratório, temos:

$$A_{n+1} = (0.9)\, A_n + (0.05)\, C_n, \quad B_{n+1} = (0.1)\, A_n + (0.8)\, B_n \quad \text{e} \quad C_{n+1} = (0.95)\, C_n + (0.2)\, B_n.$$

Denotando, respectivamente, por A, B e C os limites das sequências $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ e $\{C_n\}$, encontramos 10.000 na ilha A, 5.000 na ilha B e 20.000 na ilha C.