GABARITO - 1A

01 CONSTRUINDO EXEMPLOS (2,0 PONTOS)

Em cada caso, apresente um exemplo para ilustrar o que se pede.

(a) Uma sequência (a_n) alternada e convergente. (Resp. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\lim a_n = 0$.)

(b) Uma sequência (a_n) monótona e divergente. (Resp. $a_n = n$; crescente com $\lim a_n = \infty$.)

(c) Uma série alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, com soma S entre -2 e -1. (Resp. $b_n = \frac{2}{n}$.)

(d) Uma sequência crescente (a_n), tal que $2 \le a_n \le 3$, $\forall n$, e $\lim a_n = 3$. (Resp. $a_n = 3 - \frac{1}{n}$)

02 TESTANDO A CONVERGÊNCIA (2,0 PONTOS)

Com auxílio do critério de convergência especificado, decida sobre a convergência ou divergência das séries:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ (comparação) (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln(2n+1)]$ (n-ésimo termo) (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$ (razão)

SOLUÇÃO

(a) Convergente. (Comparar com a série geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$)

(b) Divergente. ($\lim a_n = \log(1/2) \neq 0$)

(c) Convergente. ($L = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1/2 < 1$.)

03 FALSO (F) OU VERDADEIRO (V) (3,0 PONTOS)

Falso (F) *ou verdadeiro* (V)? *Justifique as afirmações falsas.*

(a) **(V)** Se $a_n = (-1)^{n+1} - 3/n$, então $\sup(1 + 2a_n) = 3$.

(b) **(F)** Se $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, então $\{a_n\}$ é convergente. (Contraexemplo: $a_n = \sqrt{n}$)

(c) **(V)** Se $\{a_n\}$ converge para zero, então $\{(-1)^n a_n\}$ também converge para zero.

(d) **(V)** Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n \cdot a_{n+1}}$ é convergente.

(e) **(F)** Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge. (Contraexemplo: $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$)

(f) **(V)** Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim_{n\to\infty} \left(n^2 a_n\right) = 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

---

04 CALCULANDO SOMAS INFINITAS (3,0 PONTOS)

Calcule a soma das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \, 3^{2-n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$.

SOLUÇÃO

(a) Trata-se de uma Série Geométrica de razão $r = -1/3$. Após uma reindexação, obtemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = (\text{reindexar: } n-1=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

(b) Trata-se de uma série de encaixe e decompondo o termo geral em frações parciais, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5/12.\end{aligned}$$

GABARITO - 1C

01 FALSO OU VERDADEIRO Classifique as afirmações abaixo em falso (F) ou verdadeiro (V), justificando a resposta.

(a) **(F)** Se $a_n = \dfrac{1}{2n-7}$, então $\sup(a_n) + \inf(a_n) = -1$. ($\sup a_n + \inf a_n = 0$.)

(b) **(F)** A sequência de termo geral $a_n = (-1)^n + (2^n + 3^n)^{1/n}$ converge para 3. ((a_n) diverge.)

(c) **(V)** Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{na_n}\right) = 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. ($\lim \dfrac{a_n}{1/n} = \infty \Rightarrow \sum a_n$ diverge)

(d) **(F)** Se a sequência $(-1)^n a_n$ é convergente, então $\lim a_n = 0$. (Contraexemplo: $a_n = (-1)^n$)

---

02 CALCULANDO SOMAS INFINITAS Em cada caso, calcule o valor da soma da série:

(a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\cos(n\pi + \frac{\pi}{3})}{6^{n-1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} - \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)$.

SOLUÇÃO

(a) Como $\cos(n\pi + \frac{\pi}{3}) = (-1)^n/2$, vemos tratar-se de uma Série Geométrica de razão $r = -2/3$. Temos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{2n-1}\cos(n\pi + \frac{\pi}{3})}{6^{n-1}} &= -\sum_{n=3}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left[-1 + \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] \\ &= \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = -4/15.\end{aligned}$$

(b) Trata-se de uma série de encaixe. Temos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} - \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right) = b_2 - \lim b_n = 1/\sqrt{2}.$$

---

03 TESTANDO A CONVERGÊNCIA Investigue a convergência ou divergência das séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^3} + \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n\right]$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(3n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[5]{4n^3}}{\sqrt{2n^3+6n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 5n}{n^2+2}$.

SOLUÇÃO

(a) Divergente. (Soma da série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$ com a série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{3}{n})^n$)

(b) Convergente. (Teste da Razão: $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{(n+1)^2}{(3n+3)(3n+2)} \right| = \frac{1}{9} < 1$)

(c) Divergente. (Comparação Direta: $a_n \geq \frac{\sqrt[5]{n^3}}{\sqrt{9n^3}} = \frac{1}{3n^{9/10}} = b_n$)

(d) Convergente. (Critério de Leibniz: $b_n = \frac{5n}{n^2+2}$ tem limite 0 e decresce a partir de $n = 3$)
