GABARITO

01 RESOLVENDO UM PVI Considere o seguinte PVI de segunda ordem:

$$\left| \begin{array}{l} 4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad x \geq -1/3. \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3/2. \end{array} \right.$$

(a) Determine a solução $y(x)$ do PVI.

(b) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ e determine em que ponto a solução $y(x)$ atinge seu valor mínimo.

SOLUÇÃO

(a) A equação característica é $4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0$ com raiz $\lambda = -3/2$, de ordem 2. A solução geral da EDO é, portanto:

$$y(x) = C_1 e^{-3x/2} + C_2 x e^{-3x/2}.$$

Com o dado inicial $y(0) = 1$, obtemos $C_1 = 1$ e, assim, $y(x) = e^{-3x/2} + C_2 x e^{-3x/2}$. Derivando a solução, encontramos:

$$y'(x) = -\tfrac{3}{2}e^{-3x/2} + C_2 e^{-3x/2} - \tfrac{3}{2}C_2 x e^{-3x/2}.$$

Com o dado inicial $y'(0) = 3/2$, obtemos $C_2 = 3$. A solução do PVI é:

$$\boxed{y(x) = (1+3x)e^{-3x/2}.}$$

(b) Temos

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+3x}{e^{3x/2}}\right) = \text{(usar L´Hôpital)} = 2\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{3x/2}}\right) = 0.$$

Por outro lado, para $x \geq -1/3$, temos que $y(x) = (1+3x)\,e^{-3x/2} \geq 0$ e, além disso, $y(-1/3) = 0$. Assim, no intervalo $[-1/3, +\infty)$ a solução $y(x)$ atinge seu valor mínimo em $x = -1/3$.

02 **FATOR INTEGRANTE** Considere a EDO de primeira ordem:.

$$y' = \frac{xy^2 - y}{x}, \quad x > 0, \ y > 0.$$

(a) Seria a função $I(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2}$ um fator integrante da EDO? Justifique brevemente a resposta.

(b) Encontre a curva integral da EDO que passa no ponto $A(1,1)$.

SOLUÇÃO

(a) Na forma diferencial, a EDO é $\left(xy^2 - y\right)dx - xdy = 0$ e a função $I = \dfrac{1}{x^2y^2}$ será um fator integrante quando:

$$\left(xy^2 - y\right) \cdot I(x,y)\,dx - x \cdot I(x,y)\,dy = 0$$

for exata, isto é, $\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\left(xy^2 - y\right) \cdot I(x,y)\right] = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[-x \cdot I(x,y)\right]$. Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(xy^2 - y\right) \cdot I(x,y)\right] &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2y}\right) = \frac{1}{x^2y^2} \qquad \text{e} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left[-x \cdot I(x,y)\right] &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{xy^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2}. \end{aligned}$$

(b) A EDO na forma exata é:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2y}\right)dx - \left(\frac{1}{xy^2}\right)dy = 0$$

e a curva integral pelo ponto $A(1,1)$ é:

$$\begin{aligned} \int_1^x P(t,1)\,dt + \int_1^y Q(x,t)\,dt &= 0 \\ &\Leftrightarrow \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt + \int_1^y \left(\frac{-1}{xt^2}\right)dt = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\ln t + \frac{1}{t}\right]_{t=1}^{t=x} + \left[\frac{1}{xt}\right]_1^y = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\ln x + \frac{1}{xy} = 1.} \end{aligned}$$

03 **EDO DE EULER-CAUCHY** Considere a EDO linear de 2ª ordem:

$$2\,(2x+3)^2\,y'' + 2\,(2x+3)\,y' + y = 4x, \quad x > -3/2. \qquad \text{(I)}$$

(a) Use a mudança de variável $r = 2x+3$ e reduza a EDO (I) à forma padrão de *Euler-Cauchy*:

$$Ar^2\frac{d^2y}{dr^2} + Br\frac{dy}{dr} + Cy = f(r), \quad r > 0. \qquad \text{(II)}$$

(b) Com a substituição $r = e^t$, reduza a EDO (II) a uma EDO com coeficientes constantes:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = g\,(t)\,. \qquad \text{(III)}$$

(c) Determine a solução geral $y\,(t)$ da EDO (III).

(d) Escreva a solução geral $y\,(x)$ da EDO (I).

SOLUÇÃO

(a) Se $r = 2x+3$, segue da Regra da Cadeia que:

$$y' = 2\frac{dy}{dr} \quad \text{e} \quad y'' = 4\frac{d^2y}{dr^2}$$

e a EDO (I) assume a forma de Euler-Cauchy:

$$\boxed{8r^2\frac{d^2y}{dr^2} + 4r\frac{dy}{dr} + y = 2r - 6, \quad r > 0.}$$

(b) Com a substiruição $r = e^t$ a EDO de Euler-Cauchy (II) se escreve:

$$\boxed{8\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + y = 2e^t - 6.}$$

(c) A EDO homogênea associada a (III) tem raízes características $\lambda = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}i$ e a solução geral é:

$$y_H\,(t) = e^{t/4}\left[C_1\cos\,(t/4) + C_2\,\mathrm{sen}\,(t/4)\right].$$

Uma solução particular é suposta da forma $y_P\,(t) = \alpha e^t + \beta$, a qual substituída na EDO nos dá $\alpha = 2/5$ e $\beta = -6$. Assim, $y_P\,(t) = \frac{2}{5}e^t - 6$ e a solução geral de (III) é, portanto:

$$\boxed{y(t) = e^{t/4}[C_1\cos(t/4) + C_2\sin(t/4)] + \frac{2e^t}{5} - 6.}$$

(d) Para retornar à variável x, notamos que $t = \ln r = \ln\,(2x-3)$ e a solução geral de (I) é:

$$\boxed{y(x) = (2x+3)^{1/4}\left\{C_1\cos\left[\frac{\ln(2x+3)}{4}\right] + C_2\sin\left[\frac{\ln(2x+3)}{4}\right]\right\} + \frac{4x}{5} - \frac{24}{5}.}$$

FIM