GABARITO - PROVA A

01 INTERVALO DE CONVERGÊNCIA Certa função $g(x)$ é definida pela regra:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-4)^{2n+1}}{\sqrt{n^2+9}}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(9)}(2)+g^{(20)}(2)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}\cdot(x-2)^{2n+1}}{\sqrt{n^2+9}}. \qquad (\text{ centro: } a=2)$$

O raio de convergência é $R=\sqrt{1/L^*}$, onde $L^*=\lim\left[\frac{2^{2n+3}}{\sqrt{(n+1)^2+9}}\times\frac{\sqrt{n^2+9}}{2^{2n+1}}\right]=4$. Logo, $R=1/2$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C=(3/2,5/2)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x=5/2$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+9}}$. **(série divergente)**
- Em $x=3/2$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{n^2+9}}$. **(série divergente)**

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n+1}=\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{n^2+9}}$ e, portanto,

$$g^{(2n+1)}(2)=\frac{(2n+1)!2^{2n+1}}{\sqrt{n^2+9}}$$

e daí resulta $g^{(9)}(2)=\frac{2^9\times 9!}{5}$. Sendo $2n+1$ um número ímpar, deduzimos que $g^{(50)}(2)=0$ e, sendo assim:

$$g^{(9)}(2)+g^{(50)}(2)=\frac{2^9\times 9!}{5}.$$

02 REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE Considere a função $f(x) = (x-1)\, e^{1-x}, \quad -\infty < x < \infty.$

(a) Represente a função $f(x)$ por uma série de potências de $(x-1)$ e calcule o valor de $f^{(9)}(1)$.

(b) Usando a série encontrada em **(a)**, calcule o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)}$.

(a) Na série $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ $-\infty < x < \infty$, trocamos x por $-(x-1)$ e encontramos:

$$f(x) = (x-1)\, e^{1-x} = (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-1)^{n+1}}{n!},$$

onde vemos que $c_{n+1} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Logo,

$$f^{(n+1)}(1) = \frac{(n+1)!\,(-1)^n}{n!} = (-1)^n\,(n+1)$$

e considerando $n = 8$, obtemos $f^{(9)}(1) = 9$.

(b) Por integração, encontramos:

$$\begin{aligned}
\int_1^x (t-1)\, e^{-(t-1)} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+2}}{n!\,(n+2)} \Leftrightarrow \\
\left(-te^{1-t}\right)\Big|_{t=1}^{t=x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+2}}{n!\,(n+2)} \Leftrightarrow \\
-xe^{1-x} + 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+2}}{n!\,(n+2)}.
\end{aligned}$$

Considerando na última igualdade $x = 0$, obtemos:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+2}}{n!\,(n+2)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+2}}{n!\,(n+2)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+2)} = 1/2.$$

03 **SÉRIE DE FOURIER** A função 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 0, & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \\ x - 2\pi, & \text{se } 2\pi \leq x \leq 3\pi \end{vmatrix}$$

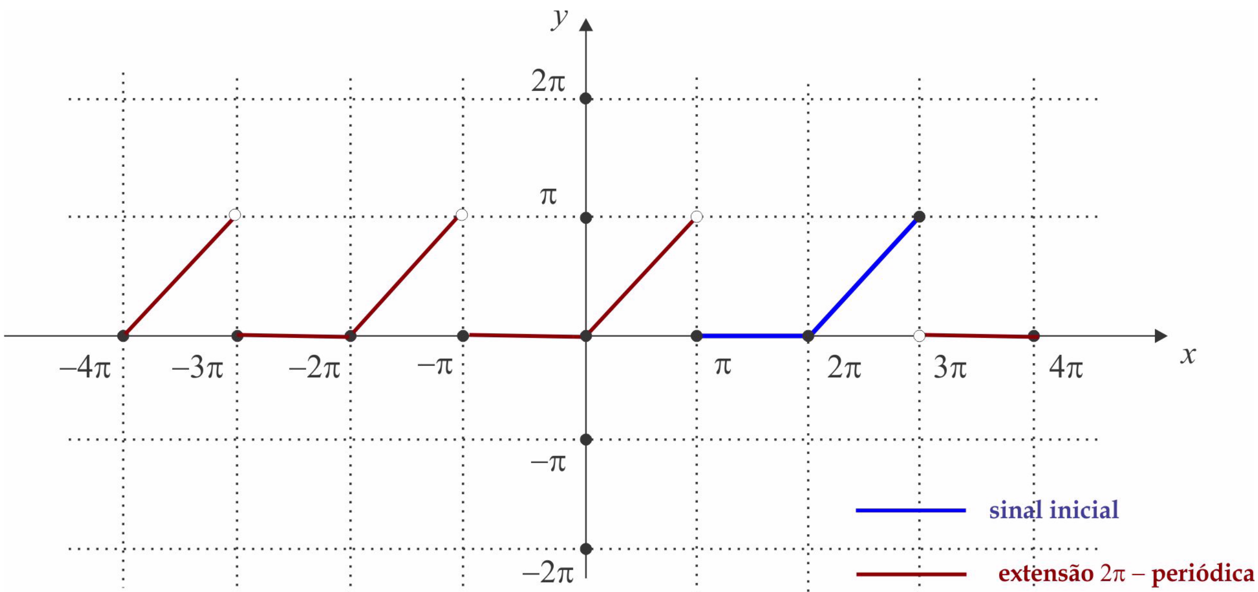
(a) Esboce no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ o gráfico de f.

(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da função f, calcule o valor de $\mathcal{F}(\pi) + \mathcal{F}(-3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi)$.

(c) Encontre a Série de Fourier da função $f(x)$ e com o resultado calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(\pi) + \mathcal{F}(-3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi) = \pi/2 + \pi/2 + 0 = \pi.$$

(c) Por simplicidade, no cálculo das integrais usaremos o intervalo $[-\pi, \pi]$. Temos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}. \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_0^\pi + \left.\frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n}\right|_0^\pi\right] = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right]. \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right|_0^\pi - \left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_0^\pi\right] = \frac{1}{n}\left[-(-1)^n\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

A série de Fourier de f é, portanto:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]$$

a qual converge, no ponto x, para $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$. Se considerarmos $x = \pi/2$, teremos:

$$\frac{\pi}{2} = \mathcal{F}(\pi/2) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\pi/2)\right]$$

e, considerando que:

$$\cos(n\pi/2) = \left|\begin{array}{lll} 0, & \text{se} & n = 2k-1 \\ (-1)^k, & \text{se} & n = 2k \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(n\pi/2) = \left|\begin{array}{lll} 0, & \text{se} & n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & \text{se} & n = 2k-1 \end{array}\right.$$

deduzimos que:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

SÉRIES & EDO - **PERÍODO: 2023.1** **TURNO:** [ ] **MANHÃ** [ ] **TARDE**

2º EXAME - **SÉRIES DE POTÊNCIAS & SÉRIES DE FOURIER**

[ ] **BOCKER** [ ] **EVERALDO** [ ] **MILTON** [ ] **MPMATOS**

GABARITO - PROVA B

---

01 **INTERVALO DE CONVERGÊNCIA** Certa função $g(x)$ é definida pela regra:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+8)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(6)}(-2) + g^{(17)}(-2)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n} \cdot (x+2)^{2n}}{n\sqrt{n+1}}. \qquad (\text{ centro: } a = -2)$$

O raio de convergência é $R = \sqrt{1/L^*}$, onde $L^* = \lim \left[\frac{4^{2n+2}}{(n+1)\sqrt{n+2}} \times \frac{n\sqrt{n+1}}{4^{2n+2}} \right] = 16$. Logo, $R = 1/4$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C = (-9/4, -7/4)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x = -7/4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. **(série convergente)**
- Em $x = -9/4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$. **(série convergente)**

O intervalo máximo de convergência é, portanto, o intervalo compacto $I_{\max} = [-9/4, -7/4]$.

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n} = \dfrac{4^{2n}}{n\sqrt{n+1}}$ e $c_{2n-1} = 0$. Portanto,

$$g^{(6)}(-2) + g^{(17)}(-2) = \frac{4^6 \times 6!}{3\sqrt{4}} + 0 = 4^6 \times 5!.$$

02 REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE Considere a função $f(x) = x^2 e^{x/2}$, $-\infty < x < \infty$.

(a) Represente a função $f(x)$ por uma série de potências de x e calcule o valor de $f^{(9)}(0)$.

(b) Usando a série encontrada em **(a)**, calcule o valor da soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)\cdot 2^n}{n!}$.

SOLUÇÃO

(a) Na série $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $-\infty < x < \infty$, trocamos x por $x/2$ e encontramos

$$: f(x) = x^2 e^{x/2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n! 2^n},$$

onde vemos que $c_{n+2} = \dfrac{1}{n! 2^n}$. Logo,

$$f^{(n+2)}(0) = \frac{(n+2)!}{n! 2^n} = \frac{(n+2)(n+1)}{2^n}$$

e considerando $n = 7$, obtemos $f^{(9)}(0) = 9/16$.

(b) Por derivação, encontramos:

$$2xe^{x/2} + \frac{x^2}{2} e^{x/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n! 2^n}$$

e, considerando $x = -4$, chegamos a:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(-4)^{n+1}}{n! 2^n} = -4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)\cdot 2^{2n}}{n! 2^n} = 8 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)\cdot 2^n}{n!}.$$

Daí resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+2)\cdot 2^n}{n!} = 2.$$

03 **SÉRIE DE FOURIER** A função 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que:

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{se } -2\pi \le x \le -\pi \\ -x-2\pi, & \text{se } -3\pi \le x \le -2\pi \end{array} \right.$$

(a) Esboce no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ o gráfico de f.

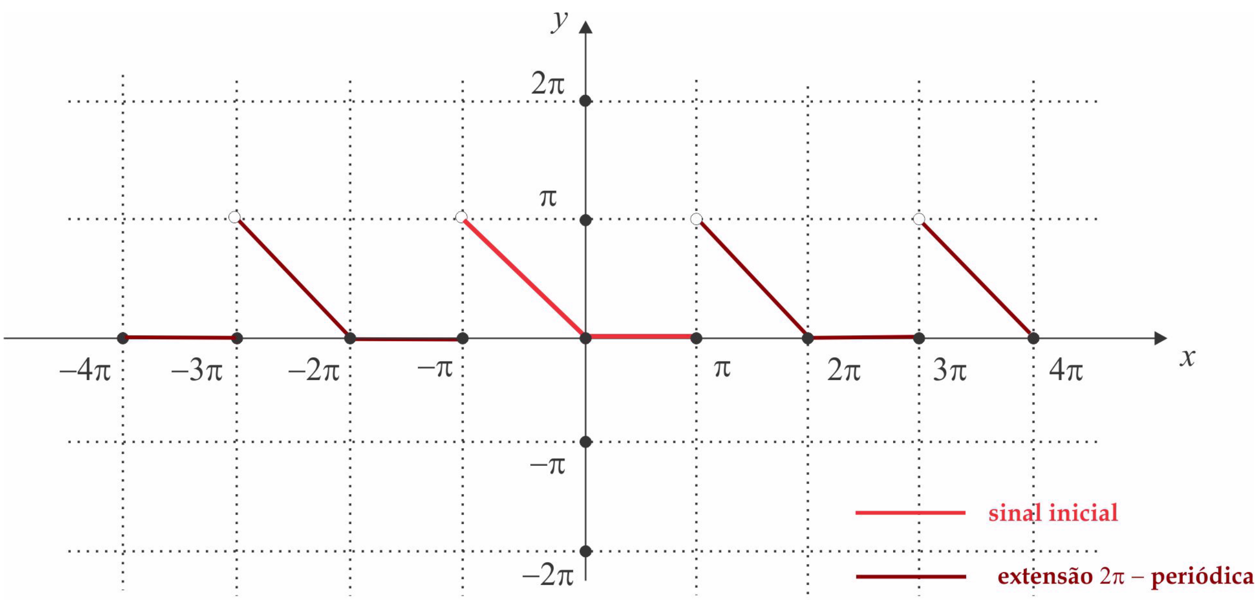
(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da função f, calcule o valor de $\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi)$.

(c) Encontre a Série de Fourier da função $f(x)$ e com o resultado calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-5}}{2n-1}.$$

SOLUÇÃO

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi) = \pi/2 + \pi/2 + 0 = \pi.$$

(c) Por simplicidade, no cálculo das integrais usaremos o intervalo $[-\pi, \pi]$. Temos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx = \frac{\pi}{2}.\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{x\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}\right] = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right].\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{0} - \frac{x\cos(nx)}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}\right] = -\frac{1}{n}\left[-(-1)^n\right] = \frac{(-1)^n}{n}.
\end{aligned}$$

A série de Fourier de f é, portanto:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\,(nx)\right]$$

a qual converge, no ponto x, para $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$. Se considerarmos $x = \pi/2$, teremos:

$$0 = \mathcal{F}(\pi/2) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\,(n\pi/2)\right]$$

e, considerando que:

$$\cos(n\pi/2) = \left|\begin{array}{ll} 0, \quad \text{se} \quad n = 2k-1 \\ (-1)^k, \quad \text{se} \quad n = 2k \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\,(n\pi/2) = \left|\begin{array}{ll} 0, \quad \text{se} \quad n = 2k \\ (-1)^{k-1}, \quad \text{se} \quad n = 2k-1 \end{array}\right.$$

deduzimos que:

$$0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-5}}{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = -\frac{\pi}{4}.$$

GABARITO - PROVA C

01 **INTERVALO DE CONVERGÊNCIA** Certa função $g(x)$ é definida pela regra:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2x-4)^n}{3^n\cdot n^2}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(7)}(2)+g^{(10)}(2)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n\cdot(x-2)^n}{3^n\cdot n^2}. \qquad (\text{ centro: } a=2)$$

O raio de convergência é $R=\sqrt{1/L^*}$, onde $L^*=\lim\left[\dfrac{2^{n+1}}{3^{n+1}\cdot(n+1)^2}\times\dfrac{3^n\cdot n^2}{2^n}\right]=2/3$. Logo, $R=3/2$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C=(1/2,7/2)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x=7/2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **(série abs. convergente)**
- Em $x=1/2$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}$. **(série abs. convergente)**

O intervalo máximo de convergência é, portanto, o intervalo compacto $I_{\max}=[1/2,7/2]$.

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_n=\dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{3^n\cdot n^2}$ e, portanto,

$$g^{(n)}(2)=\frac{n!\,(-1)^{n+1}2^n}{3^n\cdot n^2}$$

e daí resulta:

$$g^{(7)}(2)+g^{(10)}(2)=\frac{2^7\times 7!}{3^7\cdot 7^2}+\frac{-2^{10}\times(10)!}{3^{10}\cdot 10^2}=\left(\frac{2}{3}\right)^7\left[\frac{6!}{7}-\frac{4\times 8!}{15}\right].$$

02 REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{1+5x}, \quad x \neq -1/5.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x-1)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a)**, represente a função $g(x) = \dfrac{1}{(1+5x)^2}$ em série de potências de $(x-1)$, indicando o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO

(a) Temos que:

$$f(x) = \frac{1}{1+5x} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1+\frac{5(x-1)}{6}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n (x-1)^n}{6^{n+1}}.$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $R = \dfrac{5(x-1)}{6}$ e a representação é válida no intervalo:

$$\left| \frac{5(x-1)}{6} \right| < 1 \Leftrightarrow 5|x-1| < 6 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{6}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < \frac{11}{5}.$$

(b) Por derivação, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{-5}{(1+5x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^n n (x-1)^{n-1}}{6^{n+1}} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{(1+5x)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 5^{n-1} n (x-1)^{n-1}}{6^{n+1}}. \end{aligned}$$

A operação derivação termo a termo não altera o intervalo de convergência, de modo que a representação acima é válida no intervalo $-\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{11}{5}$.

03 **SÉRIE DE FOURIER** A função 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que:

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \\ -x + 2\pi, & \text{se } 2\pi \leq x \leq 3\pi \end{array} \right.$$

(a) Esboce no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ o gráfico de f.

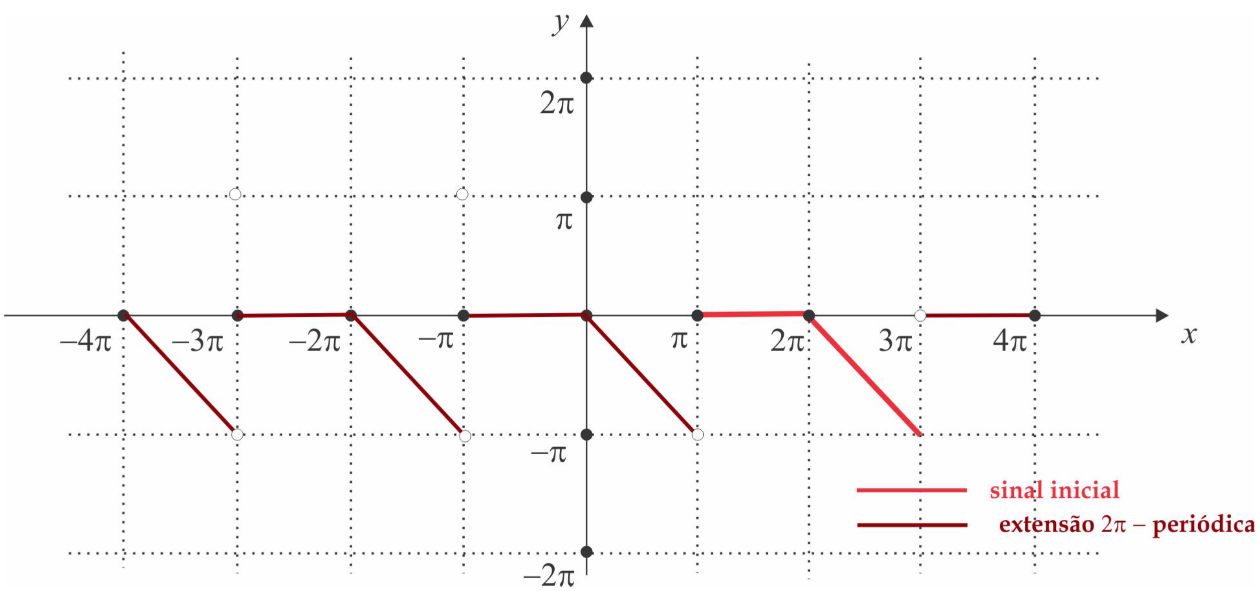
(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da função f, calcule o valor de $\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(-3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi)$.

(c) Encontre a Série de Fourier da função $f(x)$ e com o resultado calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

SOLUÇÃO

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(-3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi) = -\pi/2 - \pi/2 + 0 = -\pi.$$

(c) Por simplicidade, no cálculo das integrais usaremos o intervalo $[-\pi, \pi]$. Temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\,dx = -\frac{\pi}{2}. \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\cos(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{x\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}\right|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi n^2}\left[1-(-1)^n\right]. \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(-x)\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx = -\frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{n^2}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi}\right] = \frac{(-1)^n}{n}. \end{aligned}$$

A série de Fourier de f é, portanto:

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n}\,\mathrm{sen}\,(nx)\right]$$

a qual converge, no ponto x, para $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$. Se considerarmos $x = 0$, teremos:

$$0 = \mathcal{F}(0) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\right] = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n-1)^2}.$$

Logo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

GABARITO - PROVA D

01 INTERVALO DE CONVERGÊNCIA Certa função $g(x)$ é definida pela regra:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2x-8)^{2n-1}}{8^n \cdot n^3}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(7)}(4) + g^{(28)}(4)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n-1} \cdot (x-4)^{2n-1}}{8^n \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-4)^{2n-1}}{2^{n+1} \cdot n^3}. \qquad (\text{ centro: } a = 4)$$

O raio de convergência é $R = \sqrt{1/L^*}$, onde $L^* = \lim \left[\frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)^3} \times \frac{2^{n+1} \cdot n^3}{1}\right] = 1/2$. Logo, $R = \sqrt{2}$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C = \left(4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x = 4+\sqrt{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{2} \cdot n^3}$. **(série abs. convergente)**
- Em $x = 4-\sqrt{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2\sqrt{2} \cdot n^3}$. **(série abs. convergente)**

O intervalo máximo de convergência é, portanto, o intervalo compacto $I_{\max} = \left[4-\sqrt{2}, 4+\sqrt{2}\right]$.

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot n^3}$ e $c_{2n} = 0$. Portanto, $g^{(2n)}(4) = 0, \ \forall n$, e

$$g^{(2n-1)}(4) = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)!}{2^{n+1} \cdot n^3}$$

e daí resulta:

$$g^{(7)}(4) + g^{(28)}(4) = \frac{(-1)^5 \times 7!}{2^5 \cdot 4^3} + 0 = -\frac{7!}{2^{11}}.$$

02 **REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE** Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{1+3x}, \quad x \neq -1/3.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x-1)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a)**, represente a função $g(x) = \ln(1+3x)$ em série de potências de $(x-1)$, indicando o intervalo de convergência.

SOLUÇÃO

(a) Temos que:

$$f(x) = \frac{1}{1+3x} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+\frac{3(x-1)}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x-1)^n}{4^{n+1}}.$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $R = \dfrac{3(x-1)}{4}$ e a representação é válida no intervalo:

$$\left|\frac{3(x-1)}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow 3|x-1| < 4 \Leftrightarrow |x-1| < \frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}.$$

(b) No intervalo de convergência $-\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{7}{3}$, temos $1+3x > 0$ e por integração, encontramos:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{1+3t}dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{3}\ln|1+3t|\Big|_{t=1}^{t=x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} \Leftrightarrow \\
\frac{1}{3}[\ln(1+3x) - \ln 4] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (x-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} \\
\ln(1+3x) &= \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{n+1} (x-1)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}.
\end{aligned}$$

A operação integração termo a termo não altera o intervalo de convergência, de modo que a representação acima é válida no intervalo $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$.

03 **SÉRIE DE FOURIER** A função 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que:

$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{se } -2\pi \leq x \leq -\pi \\ x + 2\pi, & \text{se } -3\pi \leq x \leq -2\pi \end{array} \right.$$

(a) Esboce no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ o gráfico de f.

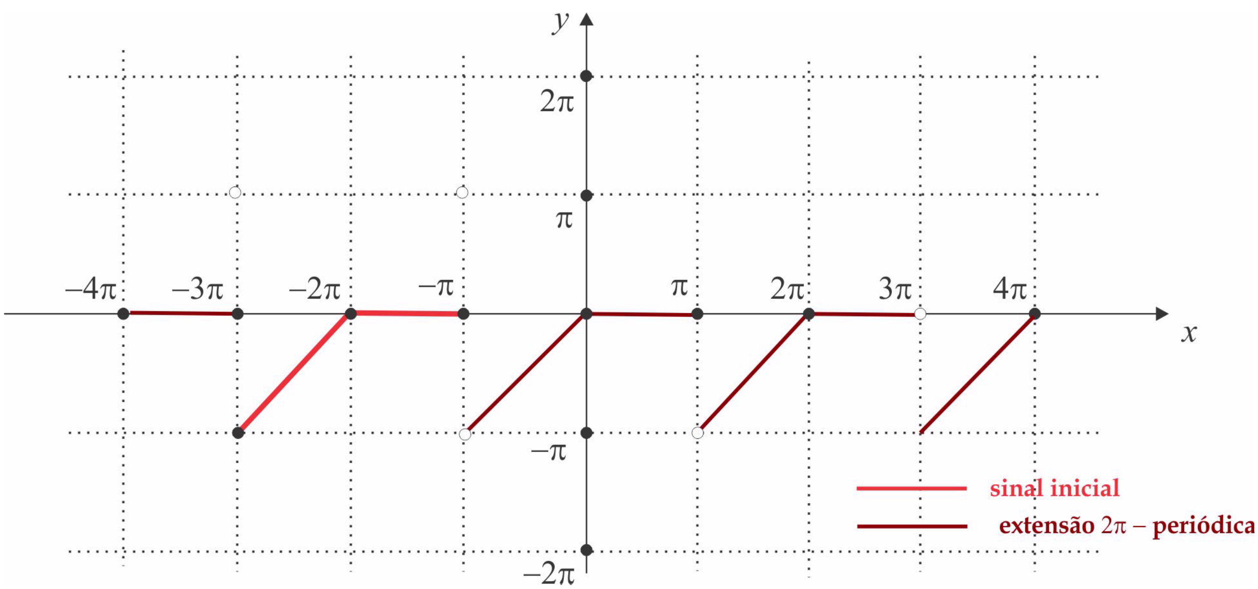
(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da função f, calcule o valor de $\mathcal{F}(\pi) + \mathcal{F}(-3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi)$.

(c) Encontre a Série de Fourier da função $f(x)$ e com o resultado calcule a soma da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+3}}{2n-1}.$$

SOLUÇÃO

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(\pi) + \mathcal{F}(-3\pi/2) + \mathcal{F}(2\pi) = -\pi/2 + 0 + 0 = -\pi/2.$$

(c) Por simplicidade, no cálculo das integrais usaremos o intervalo $[-\pi, \pi]$. Temos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x dx = -\frac{\pi}{2}. \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{x\,\mathrm{sen}\,(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{0}\right] = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}. \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{n^2}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{0}\right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
\end{aligned}$$

A série de Fourier de f é, portanto:

$$-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,(nx)\right]$$

a qual converge, no ponto x, para $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. Se considerarmos $x = \pi/2$, teremos:

$$0 = \mathcal{F}(\pi/2) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos(n\pi/2) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\mathrm{sen}\,(n\pi/2)\right]$$

e, considerando que:

$$\cos(n\pi/2) = \left|\begin{array}{ll} 0, & \text{se} \quad n = 2k-1 \\ (-1)^k, & \text{se} \quad n = 2k \end{array}\right. \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}\,(n\pi/2) = \left|\begin{array}{ll} 0, & \text{se} \quad n = 2k \\ (-1)^{k-1}, & \text{se} \quad n = 2k-1 \end{array}\right.$$

deduzimos que:

$$0 = -\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Daí resulta que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-3}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

SÉRIES & EDO - **PERÍODO: 2023.1** **TURNO: [ ] MANHÃ [ ] TARDE**

2º EXAME - **SÉRIES DE POTÊNCIAS & SÉRIES DE FOURIER**

[ ] BOCKER [ ] EVERALDO [ ] MILTON [ ] MPMATOS

GABARITO - PROVA E

---

01 **INTERVALO DE CONVERGÊNCIA** Certa função $g(x)$ é definida pela regra

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x-6)^{2n}}{9^{2n} \cdot n^2}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(8)}(2) + g^{(21)}(2)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n} \cdot (x-2)^{2n}}{9^{2n} \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{2n}}{9^n \cdot n^2}. \qquad (\text{ centro: } a=2)$$

O raio de convergência é $R = \sqrt{1/L^*}$, onde $L^* = \lim \left[\frac{1}{9^{n+1} \cdot (n+1)^2} \times \frac{9^n \cdot n^2}{1}\right] = 1/9$. Logo, $R = 3$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C = (-1, 5)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x = 5$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. **(série abs. convergente)**
- Em $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. **(série abs. convergente)**

O intervalo máximo de convergência é, portanto, o intervalo compacto $I_{\max} = [-1, 5]$.

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n} = \frac{(-1)^n}{9^n \cdot n^2}$ e $c_{2n-1} = 0$, $\forall n$. Portanto, $g^{(2n+1)}(2) = 0$, $\forall n$, e

$$g^{(2n)}(2) = \frac{(-1)^n (2n)!}{9^n \cdot n^2}$$

e daí resulta:

$$g^{(8)}(2) + g^{(21)}(2) = \frac{(-1)^4 \times 8!}{9^4 \cdot 4^2} + 0 = \frac{8!}{9^4 \cdot 4^2}.$$

02 **REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE** Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \neq -3.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x+2)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a)** calcule o valor da soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 2^n}.$$

SOLUÇÃO

(a) Temos que:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3} = (x+2) \times \frac{1}{x+3} = (x+2) \times \frac{1}{1+(x+2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+2)^{n+1}.$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $R = x+2$ e a representação é válida no intervalo:

$$|x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

(b) Por integração, encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{x} \frac{t+2}{t+3} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{n+2}}{n+2} \Leftrightarrow \\ \int_{-2}^{x} \left(1 - \frac{1}{t+3}\right) dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{n+2}}{n+2} \\ x+2-\ln(x+3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^{n+2}}{n+2}. \end{aligned}$$

Considerando na última igualdade $x+2 = -1/2$, isto é, $x = -5/2$, encontramos:

$$-\frac{1}{2} - \ln(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n+2}}{(n+2) \cdot 2^{n+2}} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 2^n}$$

e daí resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 2^n} = -\frac{1}{2} + \ln 2.$$

03 **SÉRIE DE FOURIER** Considere a função $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{vmatrix} -\pi, & \text{se } -\pi \leq x \leq -\pi/2 \\ x, & \text{se } -\pi/2 < x < 0. \end{vmatrix}$$

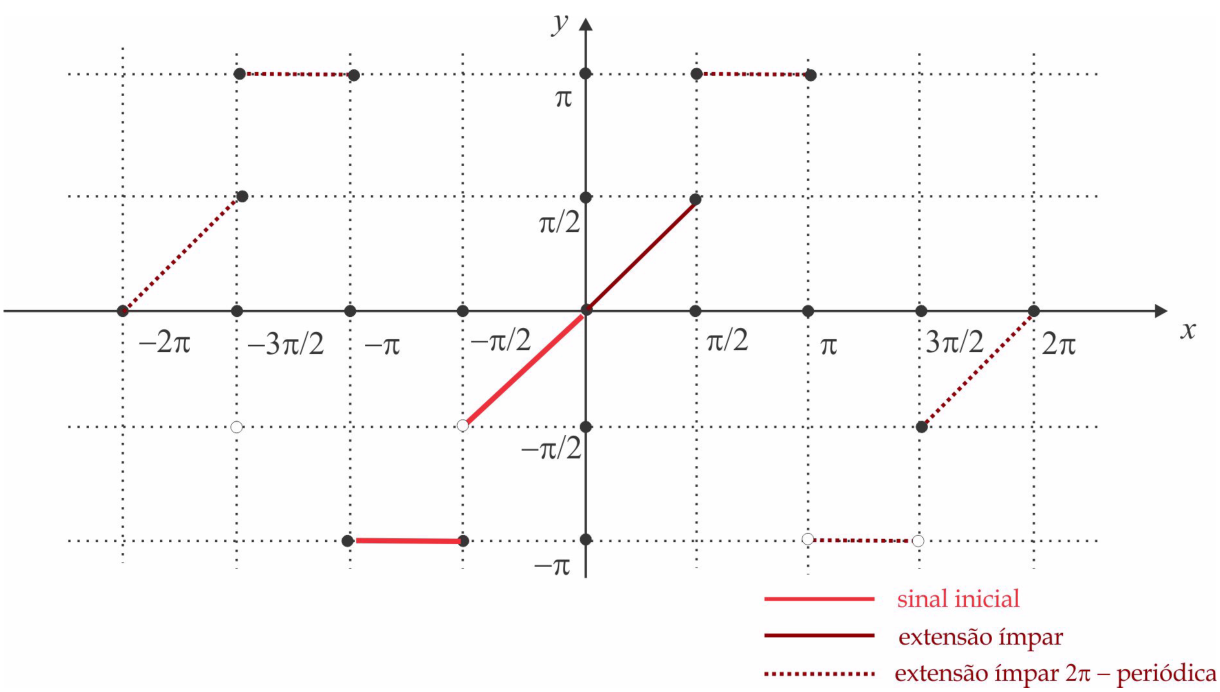
(a) Esboce no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ o gráfico da *extensão ímpar* 2π-periódica $\widetilde{f}_I$ de f.

(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da extensão $\widetilde{f}_I$, calcule o valor de $\mathcal{F}(\pi) + \mathcal{F}(-\pi/2)$.

(c) Calcule, no ponto $x = \pi/2$, o erro $|\mathcal{F}(x) - S_2(x)|$, entre a soma $\mathcal{F}(x)$ da série de Fourier de f e a soma parcial $S_2(x)$ da série.

SOLUÇÃO

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(\pi) + \mathcal{F}(-\pi/2) = \frac{1}{2}[\pi - \pi] + \frac{1}{2}[-\pi - \pi/2] = -\frac{3\pi}{4}.$$

(c) Em se tratando da extensão ímpar, temos $a_n = 0,\ \forall n$, e os coeficientes b_n são dados por:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,(nx)\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{\mathrm{sen}\,(nx)}{n^2}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{x\cos(nx)}{n}\right|_0^{\pi/2} - \left.\frac{\pi\cos(nx)}{n}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sen}\,(n\pi/2)}{n^2} - \frac{\pi\cos(n\pi/2)}{2n} - \frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{\pi\cos(n\pi/2)}{n}\right]. \end{aligned}$$

A soma parcial $S_2(x)$ vem dada por:

$$\begin{aligned} S_2(x) &= a_0 + [a_1\cos x + b_1\,\mathrm{sen}\,x] + [a_2\cos(2x) + b_2\,\mathrm{sen}\,(2x)] \\ &= b_1\,\mathrm{sen}\,x + b_2\,\mathrm{sen}\,(2x) \end{aligned}$$

e no ponto $x = \pi/2$, temos:

$$S_2(\pi/2) = b_1\,\mathrm{sen}\,(\pi/2) + b_2\,\mathrm{sen}\,\pi = b_1 = 2 + 2/\pi.$$

Dessa forma, chegamos a:

$$|F(\pi/2) - S_2(\pi/2)| = \left|\frac{3\pi}{4} - 2 - \frac{2}{\pi}\right| \simeq 0.281.$$

SÉRIES & EDO - PERÍODO: 2023.1 TURNO: [ ] MANHÃ [ ] TARDE

2º EXAME - SÉRIES DE POTÊNCIAS & SÉRIES DE FOURIER

[ ] BOCKER [ ] EVERALDO [ ] MILTON [ ] MPMATOS

GABARITO - PROVA F

---

01 INTERVALO DE CONVERGÊNCIA Certa função $g(x)$ é definida pela regra

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-9)^{2n+7}}{n \cdot 9^{2n}}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(17)}(3) + g^{(50)}(3)$.

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^7 \cdot (x-3)^{2n+7}}{n \cdot 9^n}. \qquad (\text{ centro: } a = 3)$$

O raio de convergência é $R = \sqrt{1/L^*}$, onde $L^* = \lim \left[\dfrac{n \cdot 9^n}{(n+1) \cdot 9^{n+1}}\right] = 1/9$. Logo, $R = 3$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C = (0, 6)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x = 0$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^7 \cdot (-3)^{2n+7}}{n \cdot 9^n} = \left(-3^{14}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. (SÉRIE DIVERGENTE)
- Em $x = 6$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^7 \cdot (3)^{2n+7}}{n \cdot 9^n} = \left(3^{14}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. (SÉRIE DIVERGENTE)

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n+7} = \dfrac{3^7}{n \cdot 9^n}$ e, portanto,

$$g^{(2n+7)}(3) = \frac{3^7 \cdot (2n+7)!}{n \cdot 9^n}$$

e daí resulta $g^{(17)}(3) = \dfrac{3^7 \cdot (17)!}{5 \cdot 9^5} = \dfrac{(17)!}{135}$. Considerando que $2n+7$ é um número ímpar, deduzimos que $g^{(50)}(3) = 0$ e, sendo assim:

$$g^{(17)}(3) + g^{(50)}(3) = \frac{(17)!}{135}.$$

02 **REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE** Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3}, \quad x \neq -3.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x-2)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a)**, calcule o valor da soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot 5^{n+1}}.$$

(a) Temos que:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-2}{(x-2)+5} = \frac{x-2}{5} \times \frac{1}{1+\frac{x-2}{5}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{5^{n+1}}.$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $R = \dfrac{x-2}{5}$ e a representação é válida no intervalo:

$$\left|\frac{x-2}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7.$$

(b) Por integração, encontramos:

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{t-2}{t+3} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+2}}{(n+2)\cdot 5^{n+1}} \Leftrightarrow \\
\int_2^x \left[1 - \frac{5}{t+3}\right] dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(n+2)\cdot 5^{n+1}} \Leftrightarrow \\
(t - 5\ln|t+3|)\Big|_{t=2}^{t=x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(n+2)\cdot 5^{n+1}} \Leftrightarrow \\
x - 2 + 5\cdot \ln\left(\frac{5}{x+3}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(n+2)\cdot 5^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Considerando na última igualdade $x = 3$, obtemos:

$$1 + 5\cdot \ln(5/6) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\cdot 5^{n+1}}.$$

03 **SÉRIE DE FOURIER** Considere a função $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$, definida por:

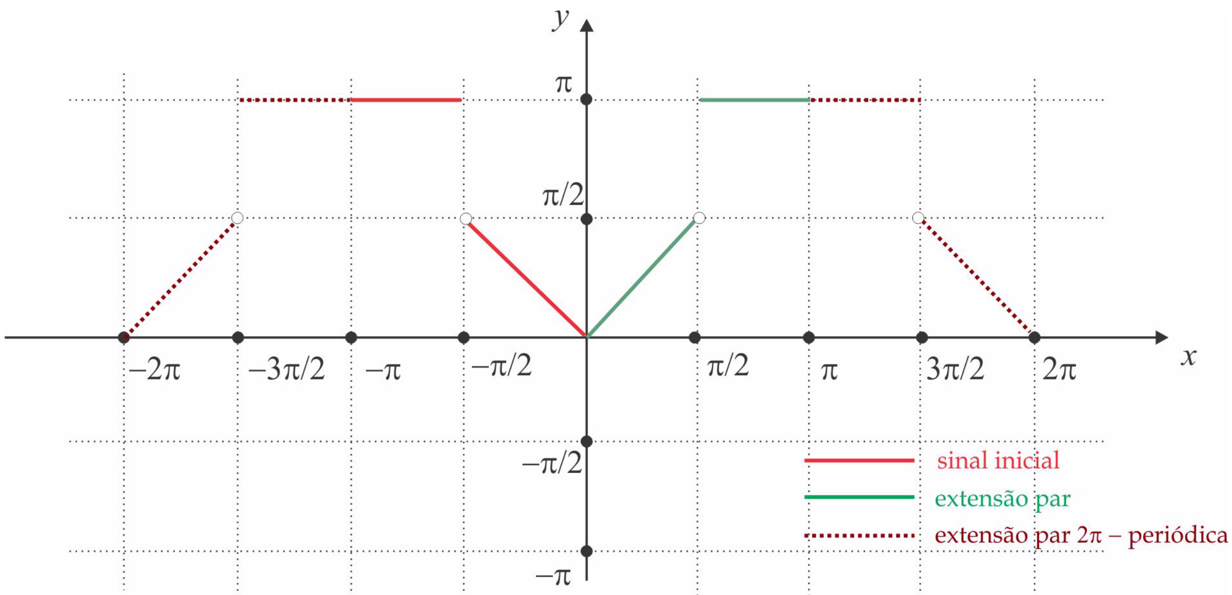
$$f(x) = \left| \begin{array}{ll} \pi, & \text{se } -\pi \le x \le -\pi/2 \\ -x, & \text{se } -\pi/2 < x \le 0. \end{array} \right.$$

(a) Esboce no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ o gráfico da *extensão par* 2π-periódica $\widetilde{f}_P$ de f.

(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da extensão $\widetilde{f}_P$, calcule o valor de $\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(\pi/2)$.

(c) Calcule, no ponto $x = \pi/2$, o erro $|\mathcal{F}(x) - S_2(x)|$, entre a soma $\mathcal{F}(x)$ da série de Fourier de f e a soma parcial $S_2(x)$ da série.

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(\pi/2) = \pi + 3\pi/4 = 7\pi/4.$$

(c) Por se tratar da extensão par, a série de Fourier se reduz a uma série de cossenos, isto é, $b_n = 0, \ \forall n$. Temos:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi dx\right] = \frac{5\pi}{4}.$$

Para os coeficientes a_n, levamos em conta que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$ e, assim, encontramos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\cos(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \pi\cos(nx)\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\operatorname{sen}(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(\pi/2)\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n} + \frac{\cos(n\pi/2)-1}{n^2}\right] - 2\left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n}\right]. \end{aligned}$$

Considerando sucessivamente $n = 1$ e $n = 2$, obtemos:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] - 2 = -1 - \frac{2}{\pi} \quad \text{e} \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}.$$

Dessa forma, chegamos a:

$$S_2(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\operatorname{sen} x) + (a_2\cos 2x + b_2\operatorname{sen} 2x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x$$

e em $x = \pi/2$, temos:

$$\begin{aligned} S_2(\pi/2) &= \frac{5\pi}{8} + a_1\cos(\pi/2) + a_2\cos\pi = \frac{5\pi}{8} - a_2 \\ &= \frac{5\pi}{8} - \left(-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{5\pi}{8} + \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Por fim, temos:

$$|\mathcal{F}(\pi/2) - S_2(\pi/2)| = \left|\frac{3\pi}{4} - \left(\frac{5\pi}{8} + \frac{1}{\pi}\right)\right| = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \simeq 0.07.$$

GABARITO - PROVA G

01 INTERVALO DE CONVERGÊNCIA Certa função $g(x)$ é definida pela regra

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+12)^{2n+7}}{n\cdot 9^{2n}}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(17)}(-4)+g^{(50)}(-4)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+7}\cdot(x+4)^{2n+7}}{n\cdot 9^{2n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{7}\cdot(x+4)^{2n+7}}{n\cdot 9^{n}}. \qquad (\text{ centro: } a=-4)$$

O raio de convergência é $R=\sqrt{1/L^*}$, onde $L^*=\lim\left[\frac{1}{(n+1)\cdot 9^{n+1}}\times\frac{n\cdot 9^n}{1}\right]=1/9$. Logo, $R=3$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C=(-7,-1)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{14}}{n}$. **(série divergente)**
- Em $x=-7$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-3^{14}}{n}$. **(série divergente)**

O intervalo máximo de convergência é, portanto, o intervalo $(-7,-1)$.

(c) Notando que $2n+7$ é ímpar e olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n+7}=\frac{3^7}{n\cdot 9^n}$ e, portanto, $g^{(2n)}(-4)=0,\ \forall n$, e

$$g^{(2n+7)}(2)=\frac{3^7\,(2n+7)!}{n\cdot 9^n}$$

e daí resulta:

$$g^{(17)}(-4)+g^{(50)}(-4)=\frac{3^7\times 17!}{5\cdot 9^5}+0=\frac{(17)!}{135}.$$

02 **REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE** Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \neq -3.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x-2)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a),** calcule o valor da soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^{n-1}}{5^n}.$$

SOLUÇÃO

(a) Temos que:

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{(x-2)}{5}} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{5^{n+1}}.$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $R = \dfrac{x-2}{5}$ e a representação é válida no intervalo:

$$|x-2| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-2 < 5 \Leftrightarrow -3 < x < 7.$$

(b) Por derivação termo a termo, encontramos:

$$\frac{1}{(x+3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot (x-2)^{n-1}}{5^{n+1}},$$

e, considerando $x = 4$, obtemos:

$$\frac{1}{49} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^{n-1}}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^{n-1}}{5^n}$$

e daí resulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^{n-1}}{5^n} = \frac{5}{49}.$$

03 **SÉRIE DE FOURIER** Considere a função $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2 - 1$.

(a) Esboce no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ o gráfico da *extensão par* 2π-periódica $\widetilde{f}_P$ de f.

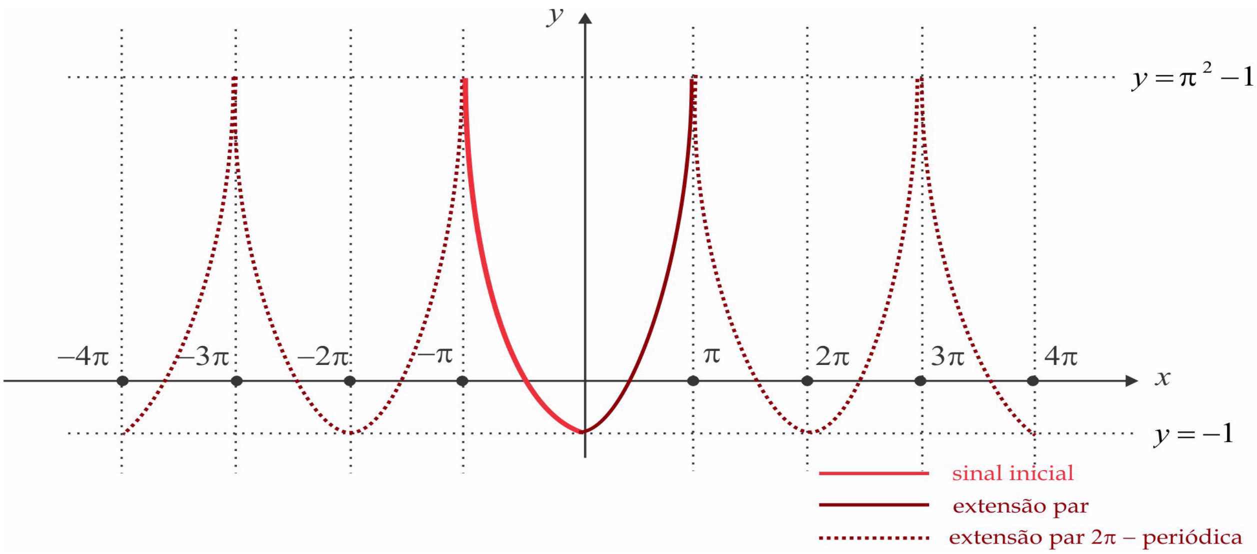
(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da extensão $\widetilde{f}_P$, calcule o valor de $\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(\pi/2)$.

(c) Encontre a Série de Fourier da extensão referida em **(a)** e com o resultado calcule a soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

SOLUÇÃO

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(\pi/2) = \left(\pi^2 - 1\right) + \left(\pi^2/4 - 1\right) = 5\pi^2/4 - 2.$$

(c) Em se tratando da extensão par, temos $b_n = 0$ e, por simplicidade, no cálculo dos coeficientes a_n usaremos $[-\pi, \pi]$ como intervalo de integração. Temos:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right) dx = \frac{2\pi^2}{3} - 2. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left[x^2 \cos(nx) - \cos(nx)\right] dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] - \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

A série de Fourier de f é, portanto:

$$\frac{\pi^2}{3} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4\,(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \right]$$

a qual converge, no ponto x, para $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$. Se considerarmos $x = \pi$, teremos:

$$\begin{aligned} \pi^2 - 1 &= \mathcal{F}(\pi) = \frac{\pi^2}{3} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4\,(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4\,(-1)^n (-1)^n}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{3} - 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{istoé,} \quad \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

SÉRIES & EDO - **PERÍODO: 2023.1** **TURNO:** [ ] **MANHÃ** [ ] **TARDE**

2º EXAME - **SÉRIES DE POTÊNCIAS & SÉRIES DE FOURIER**

[ ] **BOCKER** [ ] **EVERALDO** [ ] **MILTON** [ ] **MPMATOS**

GABARITO - PROVA H

---

01 **INTERVALO DE CONVERGÊNCIA** Certa função $g(x)$ é definida pela regra

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+9)^{2n+5}}{\sqrt{n} \cdot 9^{2n}}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g^{(17)}(-3) + g^{(50)}(-3)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+5} \cdot (x+3)^{2n+5}}{\sqrt{n} \cdot 9^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^5 \cdot (x+3)^{2n+5}}{\sqrt{n} \cdot 9^{n}}. \qquad (\text{ centro: } a = -3)$$

O raio de convergência é $R = \sqrt{1/L^*}$, onde $L^* = \lim \left(\dfrac{9^n \cdot \sqrt{n}}{9^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}} \right) = \dfrac{1}{9}$. Logo, $R = 3$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C = (-6, 0)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{10}}{\sqrt{n}}$. **série divergente)**
- Em $x = -6$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-3^{10}}{\sqrt{n}}$. **série divergente)**

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n+5} = \dfrac{3^5}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$ e $c_{2n} = 0, \ \forall n$. Portanto, $g^{(2n)}(-3) = 0, \ \forall n$, e

$$g^{(2n+5)}(-3) = \frac{3^5 (2n+5)!}{\sqrt{n} \cdot 9^n}$$

e daí resulta:

$$g^{(17)}(-3) + g^{(50)}(-3) = \frac{3^5 \times (17)!}{\sqrt{6} \cdot 9^6} + 0 = \frac{3^5 \times (17)!}{\sqrt{6} \cdot 3^7}.$$

02 REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}, \quad x \neq 3.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x+1)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a)** calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^{n+2}}.$$

SOLUÇÃO

(a) Temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = 1 + \frac{5}{-4+(x+1)} \\ &= 1 - \frac{5}{1 - \frac{(x+1)}{4}} = 1 - 5\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4^{n+1}}. \end{aligned}$$

Trata-se de uma série geométrica de razão $R = \dfrac{x+1}{4}$ e a representação é válida no intervalo:

$$|x+1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x+1 < 4 \Leftrightarrow -5 < x < 3.$$

(b) Por derivação termo a termo, encontramos:

$$\frac{-5}{(x-3)^2} = -5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,(x+1)^{n-1}}{4^{n+1}}, \quad -5 < x < 3$$

e considerando $x = -2$, resulta:

$$\frac{1}{25} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{4^{n+1}} \Rightarrow -\frac{1}{100} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^{n+2}}$$

A operação derivação termo a termo não altera o intervalo de convergência, de modo que a representação acima é válida no intervalo $-5 < x < 3$.

03 **SÉRIE DE FOURIER** Considere a função $f : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2 - 1$.

(a) Esboce no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ o gráfico da *extensão par* 2π-periódica $\widetilde{f}_P$ de f.

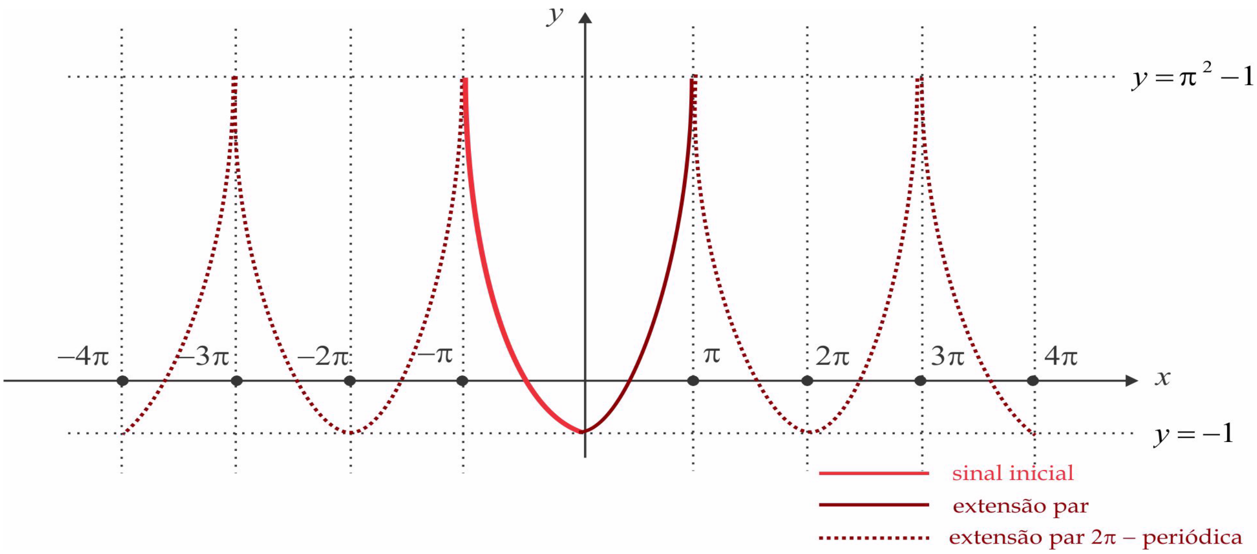
(b) Se $\mathcal{F}(x)$ é a soma da série de Fourier da extensão $\widetilde{f}_P$, calcule o valor de $\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(\pi/2)$.

(c) Encontre a série de Fourier da extensão $\widetilde{f}_P$ e com o resultado calcule o valor da soma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+5}}{n^2}.$$

SOLUÇÃO

(a)



(b) Observando o gráfico acima e considerando que $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$, encontramos:

$$\mathcal{F}(-\pi) + \mathcal{F}(\pi/2) = \left(\pi^2 - 1\right) + \left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) = \frac{5\pi^2}{4} - 2.$$

(c) Em se tratando de uma função par, temos $b_n = 0, \ \forall n$, e

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right) dx = \frac{2\pi^2}{3} - 2. \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(x^2 - 1\right)\cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx - \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2 \operatorname{sen}(nx)}{n^2}\bigg|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\bigg|_0^{\pi} + \frac{2x\cos(nx)}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right] - \frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\bigg|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}$$

A série de Fourier da extensão é, portanto:

$$-1+\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}.$$

Considerando $x=\pi$, obtemos:

$$\pi^2-1=\mathcal{F}(\pi)=-1+\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+5}}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}.$$

SÉRIES & EDO - **PERÍODO: 2023.1** **TURNO: [ ] MANHÃ [ ] TARDE**

2^o EXAME - **SÉRIES DE POTÊNCIAS & SÉRIES DE FOURIER**

[ ] BOCKER [ ] EVERALDO [ ] MILTON [ ] MPMATOS

GABARITO - PROVA I

01 **INTERVALO DE CONVERGÊNCIA** Certa função $g(x)$ é definida pela regra

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+2)^{3n+1}}{(-2)^n \sqrt{n} \cdot 9^{2n}}.$$

(a) Determine o raio e o intervalo de convergência da série.

(b) Determine a natureza da série nas extremidades do intervalo de convergência.

(c) Calcule o valor da expressão $g''(-1) + g^{(7)}(-1) + g^{(20)}(-1)$.

SOLUÇÃO

(a) Colocando a série na forma padrão, encontramos:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} \cdot (x-4)^{2n-1}}{8^n \cdot n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-4)^{2n-1}}{2^{n+1} \cdot n^3}. \qquad (\text{ centro: } a = 4)$$

O raio de convergência é $R = \sqrt{1/L^*}$, onde $L^* = \lim \left[\frac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)^3} \times \frac{2^{n+1} \cdot n^3}{1} \right] = 1/2$. Logo, $R = \sqrt{2}$ e o intervalo de convergência, sem considerar as extremidades, é $I_C = \left(4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}\right)$.

(b) Natureza da série nas extremidades do intervalo.

- Em $x = 4 + \sqrt{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{2} \cdot n^3}$. **(série abs. convergente)**
- Em $x = 4 - \sqrt{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2\sqrt{2} \cdot n^3}$. **(série abs. convergente)**

O intervalo máximo de convergência é, portanto, o intervalo compacto $I_{\max} = \left[4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}\right]$.

(c) Olhando a série na forma padrão, vemos que $c_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot n^3}$ e $c_{2n} = 0$. Portanto, $g^{(2n)}(4) = 0, \ \forall n$, e

$$g^{(2n-1)}(4) = \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)!}{2^{n+1} \cdot n^3}$$

e daí resulta:

$$g^{(7)}(4) + g^{(28)}(4) = \frac{(-1)^5 \times 7!}{2^5 \cdot 4^3} + 0 = -\frac{7!}{2^{11}}.$$

02 **REPRESENTAÇÃO EM SÉRIE** Considere a função f definida pela expressão

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-3}, \quad x \neq 3.$$

(a) Represente f em série de potências de $(x+1)$ e determine onde tal representação é válida.

(b) Usando a série encontada em **(a)**, calcule o valor da soma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\, 2^{n+2}}.$$

SOLUÇÃO

03 **SÉRIE DE FOURIER** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3\pi, & \text{se} \quad \pi \leq x \leq 3\pi/2 \\ 0, & \text{se} \quad 3\pi/2 \leq x \leq 5\pi/2 \\ 2x - 5\pi, & \text{se} \quad 5\pi/2 \leq x \leq 3\pi \end{cases}$$

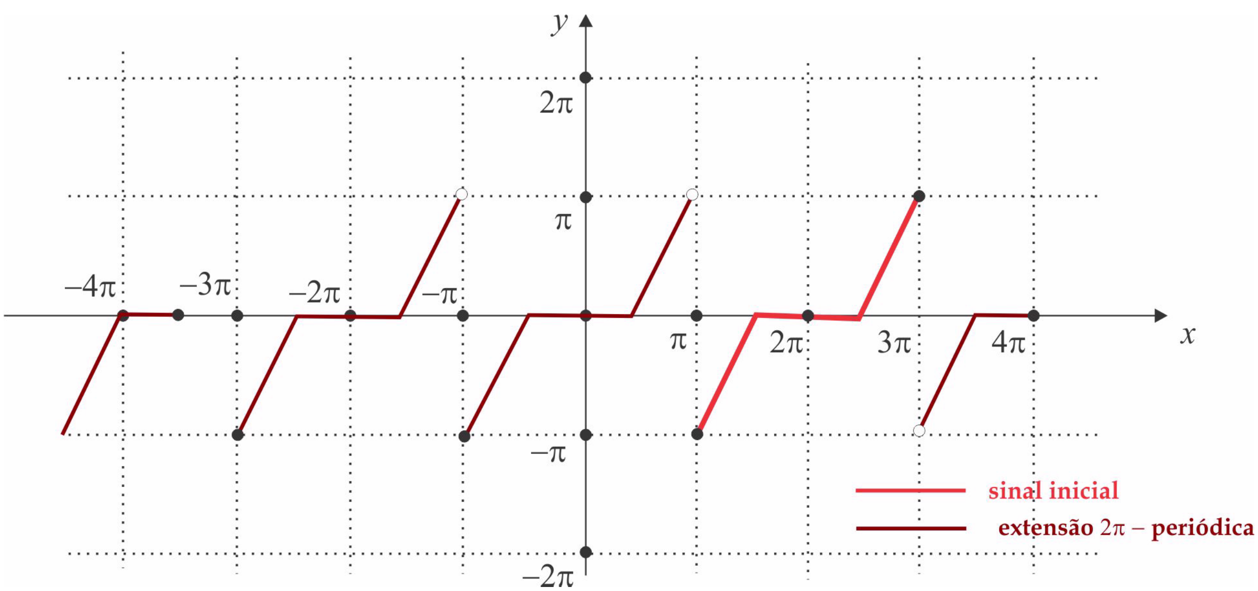
(a) Esboce o gráfico de f no intervalo $[-4\pi, 4\pi]$.

(b) Calcule o valor de $\mathcal{F}(0) + \mathcal{F}(3\pi)$

(c) Calcule, no ponto $x = \pi$, o erro $|\mathcal{F}(x) - S_2(x)|$, entre a soma $\mathcal{F}(x)$ da série de Fourier de f e a soma parcial $S_2(x)$ da série.

SOLUÇÃO

(a)



(b)

(c)