5.1. FUNDAMENTOS GERAIS

Uma Equação Diferencial Ordinária (abrevia-se EDO) de primeira ordem se apresenta sob duas formas equivalentes:

(i) FORMA NORMAL: $y' = f(x, y)$.

(ii) FORMA DIFERENCIAL: $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$.

Neste contexto, destacamos dois grupos de equações:

- EDO LINEAR: $y' + a(x)y = b(x)$. [$a(x)$ e $b(x)$ contínuas]
- EDO EXATA: $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$. [$P_y = Q_x$]

1. Verifique que a função $y(x)$ dada é solução da EDO indicada.

   (a) $y = 2e^{-x} + xe^{-x}$; $\quad y'' + 2y' + y = 0$.

   (b) $y = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x$; $\quad y'' + 4y = 0$.

   (c) $x = C_1 \operatorname{sen}(1/t) + C_2 \cos(1/t)$; $\quad \dfrac{d}{dt}\left(t^2 \dot{x}\right) + \dfrac{x}{t^2} = 0, \quad t > 0$. $\quad (\dot{x} = \frac{dx}{dt})$

2. Encontre $r(x)$, de modo que $y = \operatorname{sen}(\ln x)$, $x > 0$, seja solução da EDO: $\left[r(x)\,y'\right]' + \dfrac{y}{x} = 0$.

3. Determine as constantes C_1 e C_2, de modo que a função $y(x)$ atenda às condições indicadas.

   (a) $y(x) = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x + 1$; $\quad y(\pi/8) = 0$, $y'(\pi/8) = \sqrt{2}$.

   (b) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 2 \operatorname{sen} x$; $\quad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. Encontre a EDO de primeira ordem, com a seguinte família de curvas integrais:

   (a) $y = Cx$ **(b)** $y^2 = 2Cx$ **(c)** $x^2 + y^2 = 2Cx$ **(d)** $xy = C$.

5. Determine as trajetórias ortogonais às seguintes famílias de curvas:

   (a) $y = \lambda x$ (b) $y^2 = 4\lambda x$ (c) $x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$ (d) $\lambda^2 x^2 + y^2 = \lambda^2$

   (e) $xy = \lambda$ (f) $y = \lambda e^{x}$ (g) $x^2 + y^2 = \lambda^2$ (h) $x^2 - y^2 = \lambda^2$.

6. Cinco ratos, em uma população estável de 500, são intencionalmente inoculados com uma doença contagiosa para testar uma teoria de disseminação da epidemia, segundo a qual a taxa da população infectada é proporcional ao produto do número de ratos infectados pelo número de ratos sem a doença. Admitindo que essa teoria seja correta, qual o tempo necessário para que a metade da população contraia a doença?

7. Sabe-se que a população de certo estado cresce a uma taxa proporcional ao número presente de habitantes. Se após dez anos a população triplicou e se após vinte anos a população é de 150.000 pessoas, determine o número inicial N_0 de habitantes no estado.

8. Um corpo à temperatura de 50^0F é colocado ao ar livre onde a temperatura é 100^0F. Se, após 5 minutos, a temperatura do corpo é de 60^0F, determine: (a) o tempo t necessário para que o corpo atinja a temperatura de 75^0F e (b) a temperatura T do corpo após 20 minutos.

9. Um corpo com temperatura desconhecida é colocado em um quarto que é mantido à temperatura constante de 30^0F. Se, após 10 minutos, a temperatura do corpo é 0^0F e após 20 minutos é 15^0F, determine a temperatura inicial T_0 do corpo.

10. Um corpo à temperatura de 50^0F é colocado em um forno cuja temperatura é mantida em 150^0F. Se, após 10 minutos, a temperatura do corpo é de 75^0F, determine o tempo t necessário para que o corpo atinja a temperatura de 100^0F.

11. Uma barra de ferro, previamente aquecida a 1.200^0C, é resfriada em um tanque de água mantida à temperatura constante de 50^0C. A barra resfria 200^0C no primeiro minuto. Quanto tempo levará até que a barra resfrie outros 200^0C?

12. Deixa-se cair de uma altura de $150m$ um corpo de $15kg$ de massa, sem velocidade inicial. Desprezando a resistência do ar, determine a expressão da velocidade $v(t)$ e da posição $y(t)$ do corpo num instante t. Qual o tempo necessário para o corpo atingir o solo?

13. Resolva por integração formal, indicando onde a solução está definida,

    (a) $y' = 5y$ **(b)** $xdx - y^2dy = 0$ **(c)** $\sqrt{1-y^2}dx + \left(1+x^2\right)dy = 0$.

14. Encontre a solução geral das seguintes equações de Bernoulli:

(a) $y' + xy = 6x\sqrt{y}$ (b) $\dfrac{dx}{dy} = x^2 - x$ (c) $3\ y' + y = (1-2x)\, y^4$.

(d) $y' - y = x\sqrt{y}$ (e) $xy' - 3y = x^5 \sqrt[3]{y}$ (f) $xy' = y + xy^3 (1 + \ln x)$.

5.2. FATOR INTEGRANTE & EDO EXATA

1. Em cada caso, verifique que a EDO é exata e encontre as curvas integrais.

   (a) $3x^2ydx + x^3dy = 0$ **(b)** $(x + \dfrac{y}{x^2+y^2})dx + (y - \dfrac{x}{x^2+y^2})dy = 0$ **(c)** $(x-1)^2\, dx - 2ydy = 0$.

2. Determine um fator integrante $I(x,y)$ e as curvas integrais de cada EDO.

   (a) $\left(y + x^3y^3\right) dx + xdy = 0$ (b) $\left(y - xy^2\right) dx + xdy = 0$.

   (c) $\left(y + x^4y^2\right) dx + xdy = 0$ (d) $xydy + \left(x^2 + 2y^2 + 2\right) dy = 0$.

   (e) $xy^2dx + \left(x^2y^2 + x^2y\right) dy = 0$ (f) $\left(x^2 + y^2 + 1\right) dx - (xy + y)\, dy = 0$.

   (g) $(2xy^2 + \dfrac{x}{y^2})dx + 4x^2ydy = 0$ (h) $\left(x^2 + y^2 - a^2\right) dx - 2xydy = 0$.

   (i) $\left(y + x^3 + xy^2\right) dx - xdy = 0$ (j) $\left(x^3y^2 - y\right) dx + \left(x^2y^4 - x\right) dy = 0$

   (k) $\left(x^2 + y^2 + y\right) dx - xdy = 0$ (l) $3x^2y^2dx + \left(2x^3y + x^3y^4\right) dy = 0$.

3. Usando um fator integrante do tipo $I = \exp\left(-\int g(y)\, dy\right)$, onde $g(y) = \frac{1}{P}(P_y - Q_x)$, determine as curvas integrais da EDO não linear:

$$y' = \frac{3x^2y}{x^3 + 2y^4}.$$

4. Escreva a EDO na forma exata e em seguida encontre as curvas integrais

   (a) $xdy - ydx = \left(x^2 + y^2\right) dx$ (b) $xdy + ydx + x^4y^4 (ydx + xdy) = 0$

   (c) $\sqrt{x^2 + y^2}dx = xdy - ydx$ (d) $3y(ydx + 3xdy) = 2x^2 (3ydx + 2xdy)$

   (e) $\dfrac{ydx - xdy}{x^2y^4} = xdy + ydx$ (f) $3xydx + 2x^2dy = 6y^3dx + 12xy^2dy$.

5. Em cada caso, use a substituição indicada e determine a solução geral da EDO:

   (a) $y' + 1 = 4e^{-y} \operatorname{sen} x; \quad z = e^y$ (b) $(y - 4x)^2\, dx - dy = 0; \quad z = y - 4x$

   (c) $4(y')^2 - 9x = 0; \quad z = y'$ (d) $y' \operatorname{sen} y = \cos y\,(1 - x\cos y); \quad z = \sec y$

   (e) $\operatorname{tg}^2 (x + y)\, dx - dy = 0; \quad z = x + y$ (f) $(x + y)\, dx + (3x + 3y - 4)\, dy = 0; \quad z = x + y$

   (g) $y(y')^2 + (x - y)\, y' = x \quad z = y'$ (h) $y' \operatorname{sen} y = \cos x(2\cos y - \operatorname{sen}^2 x); \quad z = \cos y$.

5.3. PROBLEMA DE VALOR INICIAL - PVI

1. Resolva os seguintes problemas de valor inicial (PVI). Nos problemas de segunda ordem, use a substituição $z = y'$:

   (a) $y' - y = 1; \quad y(0) = 0$

   (b) $e^{-x}y' + 2e^x y = e^x; \quad y(0) = 1/2 + 1/e.$

   (c) $xy' + 2y = x^2; \quad y(1) = 0$

   (d) $(\operatorname{sen} x)\, y' + (\cos x)\, y = \cos 2x; \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}.$

   (e) $xy' + y = 2x; \quad y(1) = 1$

   (f) $\left(x^2 + y^2\right) dx + 2xydy = 0; \quad y(1) = 1.$

   (g) $y' + 2xy = 2x^3; \quad y(0) = 1$

   (h) $y'' + y' = 2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$

   (i) $\dfrac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0; \quad y(2) = 2$

   (j) $2yy'' + (y')^2 + 1 = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

2. Usando a série de Taylor, resolva os seguintes PVI's de primeira ordem.

   (a) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$

   (b) $y' = \operatorname{sen}\left(x^2 + y\right), \quad y(0) = \pi/2.$

   (c) $y' = x + \operatorname{sen}(xy), \quad y(0) = 1$

   (d) $y' = xy^2 + 1, \quad y(1) = 1.$

5.4. SOBRE A EXISTÊNCIA & UNICIDADE

Ao resolver uma EDO, encontramos uma função $y = y(x)$ que satisfaz a equação em cada ponto de certo intervalo I e a essa função damos o nome de *solução* da EDO nesse intervalo. O par constituído de uma EDO e uma condição inicial é denominado *problema de valor inicial*, abreviado por PVI e descrito matematicamente pelo sistema:

$$\left|\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Assim, resolver o PVI (5.1) significa encontrar uma solução da EDO $y' = f(x,y)$ que passa pelo ponto (x_0, y_0) do domínio da função f.

EXEMPLO 1 Ao resolver a EDO Linear $y' = 2y$, encontramos a solução geral $y = Ce^{2x}$, sendo C uma constante real, e $Y = e^{2x}$ é a única solução do PVI

$$\left|\begin{array}{l} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$$

EXEMPLO 2 É fácil verificar que as funções $y_1(x) \equiv 0$ e $y_2(x) = x|x|$ são soluções do seguinte PVI:

$$\left|\begin{array}{l} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(0) = 0. \end{array}\right.$$

Estes exemplos mostram que um dado PVI pode ter apenas uma ou várias soluções. Observamos que para o PVI do Exemplo 1 a função $f(x,y) = 2y$ é contínua em $\mathbb{R}$, juntamente com a derivada parcial f_y, e essas são as condições que devem ser atendidas pela função f para que o PVI (5.1) tenha solução única em algum intervalo I contendo x_0 no seu interior

TEOREMA (EXISTÊNCIA & UNICIDADE) Se a função $f(x,y)$ juntamente com a derivada parcial f_y forem contínuas no retângulo $\Omega : |x - x_0| \le a\,,\ \ |y - y_0| \le b$, então o PVI (5.1) tem uma única solução $y = y(x)$ definida no intervalo $I_\tau = [x_0 - \tau, x_0 + \tau]\,$, onde $\tau = \min\{a, b/M\}$ e M é o valor máximo assumido pela função f no retângulo Ω. ■

1. Discuta a aplicabilidade do Teorema de Existência e Unicidade ao PVI:

$$\left|\begin{array}{l} xy' - 2y = 0 \\ \quad y(1) = 1. \end{array}\right.$$

2. Verifique que as funções $y \equiv 0$ e $y(x) = x^2$ são soluções do PVI $xy' - 2y = 0,\ \ y(0) = 0$. Por que esse exemplo não viola o Teorema de Existência e Unicidade?

3. Quantas soluções da EDO $y' = 1 - y^2$ passam pela origem? Quais são essas soluções?

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.1

1. A comprovação é feita por substituição direta na EDO.

2. $r(x) = x$.

3. **(a)** $C_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2};\ C_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ **(b)** $C_1 = -1;\ C_2 = 1$

4. **(a)** $xdy - ydx = 0$ **(b)** $ydx - 2xdy = 0$ (c) $\left(x^2 - y^2\right)dx + 2xydy = 0$ **(d)** $xdy + ydx = 0$.

5. Se as trajetórias são descritas pela equação $F(x, y, \lambda) = 0$, então as trajetórias ortogonais são governadas pela EDO:

$$F_y dx - F_x dy = 0.$$

Nas respostas, representa-se por C uma constante genérica.

(a) $x^2 + y^2 = C$.

(b) $2x^2 + y^2 = C$.

(c) $x^2 + y^2 = Cy, \quad x, y > 0$. Neste caso, a EDO resultante é $2xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy = 0$ e para resolvê-la use a substituição $x = yv$ e $dx = ydv + vdy$ (ou $y = xu$ e $dy = xdu + udx$).

(d) $x^2 + y^2 - \ln x^2 = C$.

(e) $x^2 - y^2 = C$.

(f) $2x + y^2 = C$.

(g) $y = Cx$.

(h) $xy = C$.

6. $t = \dfrac{\ln 99}{500k}$.

7. $N(t) = 16620 \exp(0.11t)\,; \quad N_0 = 16620$.

8. **(a)** $t = 15.4$ min **(b)** 79.5^0F.

9. $T_0 = -30^0$F.

10. $T(t) = -100 \exp(-0.029t) + 150; \quad T(100) = 23.9\,\text{min}$.

11. Mais $1.24\,\text{min}$.

12. $v(t) = 9.81t; \quad y(t) = 4.950t^2; \quad 5.53\,\text{seg}$.

13. **(a)** Ce^{5x} **(b)** $\left(\frac{3}{2}x^2 + C\right)^{1/3}$ **(c)** $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcsen} y = C$.

14. **(a)** $y = (Ce^{-x^2/4} + 6)^2$ **(b)** $x = (1 + Ce^y)^{-1}$ **(c)** $y^3(Ce^x - 2x - 1) = 1$.

    (d) $y = (Ce^{x/2} - x - 2)^2$ **(e)** $y = (Cx^2 + \frac{2}{9}x^5)^{3/2}$ **(f)** $x^2 = y^2\left[C - \frac{2}{3}x^3\left(\frac{2}{3} + \ln x\right)\right]$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.2

1. **(a)** $x^3y = C$ **(b)** $x^2 + y^2 + 2\operatorname{arctg}(x/y) = C$ **(c)** $\frac{1}{3}(x-1)^3 - y^2 = C$.

2. Em alguns casos, o Fator Integrante $I(x, y)$ é determinado de forma sistemática.

(a) $\dfrac{1}{y^2} = 2x^2(x+C).$ $\quad (I(x,y) = x^{-3}y^{-3})$

(b) $\ln|x| + \dfrac{1}{xy} = C.$ $\quad (I(x,y) = x^{-2}y^{-2})$

(c) $y = \left(x^4/3 - Cx\right)^{-1}.$ $\quad (I(x,y) = x^{-2}y^{-2})$

(d) $x^2y^2 + y^4 + 2y^2 = C.$ $\quad (I(x,y) = y)$

(e) $\ln|xy| = C - y.$ $\quad (I(x,y) = x^{-2}y^{-3})$

(f) $\ln|x+1| + \dfrac{4(x+1) - y^2 - 2}{2(x+1)} = C.$ $\quad (I(x,y) = (x+1)^{-3})$

(g) $2x^2y^4 + x^2 = C.$ $\quad (I(x,y) = y^2)$

(h) $x^2 - y^2 + a^2 = Cx.$ $\quad (I(x,y) = x^{-2})$

(i) $y = x\,\mathrm{tg}(C + \dfrac{x^2}{2}).$ $\quad (I(x,y) = -x^{-2} - y^{-2})$

(j) $3x^3y + 2xy^4 + Cxy = -6.$ $\quad (I(x,y) = x^{-2}y^{-2})$

(k) $y = x\,\mathrm{tg}\,(x+C).$ $\quad (I(x,y) = -x^{-2} - y^{-2})$

(l) $|x|^3\,y^2\exp\left(y^3/3\right) = C.$ $\quad (I(x,y) = x^{-3}y^{-2})$

3. $x = \left(\frac{2}{3}y^4 + Cy\right)^{1/3}.$

4. Comece agrupando os termos da EDO.

   (a) $y = x\,\mathrm{tg}\,(x+C)$ (b) $xy = C$

   (c) $x^2 = C(y + \sqrt{x^2+y^2})$ (d) $2x^3y^2 - 3xy^3 = C$

   (e) $x^3y^4 - 3x = Cy$ (f) $x^3y^2 - 3x^2y^4 = C.$

5. A mudança leva a EDO a um dos Grupos vistos em sala de aula.

   (a) $e^y = Ce^{-x} + 2(\mathrm{sen}\,x - \cos x)$ (b) $\ln\left(\dfrac{y-4x-2}{y-4x+2}\right) - 4(x-C) = 0$

   (c) $y = \pm x^{3/2} + C,\ C > 0$ (d) $y = \mathrm{arcsec}\,(1 + x + Ce^x)$

   (e) $2x - 2y - \mathrm{sen}\,(2x+2y) = C$ (f) $2\ln|2-x-y| + x + 3y = C$

   (g) $x^2 + y^2 = C,\ x + y < 0$ (h) $\cos y = Ce^{-2\,\mathrm{sen}\,x} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sen}^2\,x + \frac{1}{2}\right)$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.3

1. As constantes que figuram na solução geral ou na família de curvas integrais são calculadas com o dado inicial.

(a) $y = e^x - 1$ (b) $y = \frac{1}{2} + \exp\left(-e^{2x}\right)$ (c) $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - x^{-2}\right)$ (d) $y = \cos x + 1/2 \operatorname{sen} x$

(e) $y = x$ (f) $y = \sqrt{\left(4 - x^3\right)/3x}$ (g) $y = 2e^{-x^2} + x^2 - 1$ (h) $y = 2x + e^{-x}$

(i) $y = x$ (j) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$

2. O método da Série de Taylor, como o próprio nome sugere, inicia-se admitindo que a solução da EDO pode ser representada por sua série de Taylor em torno do ponto inicial. Tal método, embora prático, nos parece pouco eficaz por não fornecer uma fórmula de recorrência para os coeficientes da série.

(a) $y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \cdots$.

(b) $y(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \cdots$.

(c) $y(x) = 1 + x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$.

(d) $y(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{22}{3!}(x-1)^3 + \cdots$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.4

1. Sim. Neste caso $y' = f(x, y)$, sendo $f(x, y) = 2y/x$ contínua, juntamente com a derivada parcial f_y, em um "pequeno retângulo" contendo o ponto $A(1, 1)$.

2. O Teorema de Existência e Unicidade não é violado, porque ele não se aplica neste caso.

3. A função $y = \dfrac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$ é a única solução da EDO $y' = 1 - y^2$ que passa pela origem.