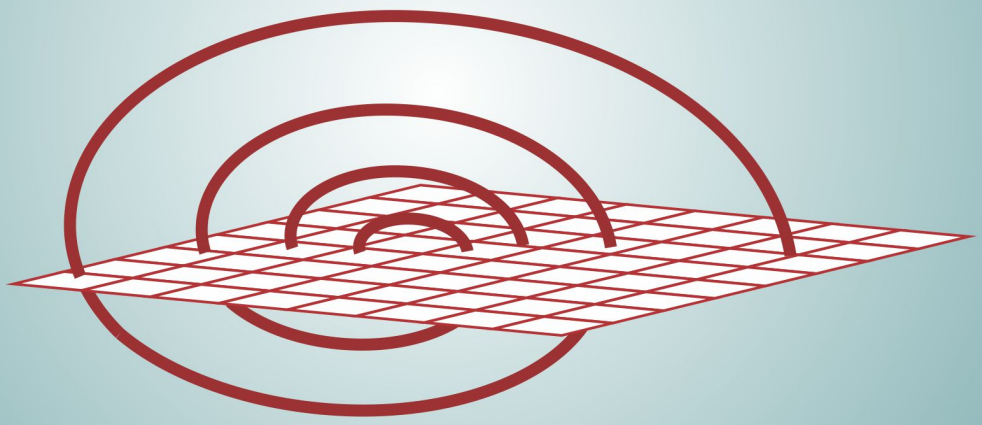
Cálculo em uma Variável Complexa

M. P. Matos & S. M. S. e Souza



UFPB - CCEN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

M. P. Matos & S. M. Santos e Souza

Sumário

1. O Plano Complexo **1**

1.1 Números Complexos 1

1.1.1 Propriedades Algébricas 2

1.1.2 Desigualdades & Identidades 4

Exercícios 1.1 8

1.2 Forma Exponencial (Polar) 10

1.2.1 Fórmula de De Moivre 13

Exercícios 1.2 14

1.3 Potências & Raízes 15

1.3.1 Raízes da Unidade 16

Exercícios 1.3 20

1.4 Topologia do Plano $\mathbb{C}$ 22

1.4.1 Convergência $\times$ Topologia 25

Exercícios 1.4 27

Respostas & Sugestões 28

Exercícios 1.1 28

Exercícios 1.2 32

Exercícios 1.3 35

Exercícios 1.4 38

2. Funções Analíticas **43**

2.1 Exemplos de Funções Complexas 43

Exercícios 2.1 47
2.2 Limite e Continuidade 48
2.2.1 Lemas Técnicos e Propriedades do Limite 50
2.2.2 Continuidade 53
Exercícios 2.1 55
2.3 Derivação no Plano $\mathbb{C}$ 57
2.3.1 Equações de Cauchy-Riemann 62
2.3.2 Equações de Cauchy-Riemann na Forma Polar 67
Exercícios 2.3 68
2.4 Funções Harmônicas 71
Exercícios 2.4 73
Respostas & Sugestões 74
Exercícios 2.1 74
Exercícios 2.2 76
Exercícios 2.3 79
Exercícios 2.4 84

3. Funções Elementares **87**
3.1 A Função $w = \exp(z)$ 87
Exercícios 3.1 89
3.2 As Funções Trigonométricas Complexas 90
3.2.1 As Funções $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$ 90
3.2.2 Algumas Identidades Trigonométricas 91
3.2.3 Outras Funções Trigonométricas 93
Exercícios 3.2 93
3.3 Logarítmos & Expoentes 95
3.3.1 Ramos de $w = \log z$ (Propriedades Analíticas de $\operatorname{Log} z$) 96
3.3.2 Propriedades & Consequências 98
3.3.3 Expoentes Complexos 100
Exercícios 3.3 104
3.4 Transformações do Plano $\mathbb{C}$ 106

Exercícios 3.4 109
Respostas & Sugestões 110
Exercícios 3.1 110
Exercícios 3.2 112
Exercícios 3.3 115
Exercícios 3.3 117

4. Integração Complexa **119**
4.1 Função Complexa de uma Variável Real 119
Exercícios 4.1 120
4.2 Função Complexa de uma Variável Complexa 121
4.2.1 Contornos e Integrais 121
4.2.2 A Integral 124
Exercícios 4.2 126
4.3 Teoremas Clássicos & Consequências 129
4.3.1 Existência de Primitivas 130
4.3.2 Fórmula Integral de Cauchy 132
Exercícios 4.3 138
Respostas & Sugestões 140
Exercícios 4.1 140
Exercícios 4.2 140
Exercícios 4.3 143

5. Séries, Resíduos & Pólos **147**
5.1 Séries Complexas. Convergência Uniforme 147
5.1.1 Propriedades Básicas 147
Exercícios 5.1 152
5.2 Séries de Potências 153
5.2.1 Convergência Uniforme das Séries de Potências 155
5.2.2 Produto & Quociente de Séries de Potências 166
Exercícios 5.2 167

5.3 Singularidades & Pólos 170
5.3.1 Quociente de Funções Analíticas 176
5.3.2 Comportamento Local 178
Exercícios 5.3 181
5.4 Teorema dos Resíduos & Aplicações 182
5.4.1 Cálculo de Integrais Reais 185
Exercícios 5.4 191
Respostas & Sugestões 193
Exercícios 5.1 193
Exercícios 5.2 194
Exercícios 5.3 197
Exercícios 5.4 198

Bibliografia **200**

1. O Plano Complexo

Na construção do conjunto dos números reais, nos deparamos com algumas imperfeições de alguns conjuntos numéricos, que serviram de ponto de partida para tal construção. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não contém os simétricos (inversos aditivos) de seus elementos; já o conjunto $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, não contém os inversos multiplicativos de seus membros. O conjunto $\mathbb{Q}$, constituído das frações p/q, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, não contém, por exemplo, o número real $\sqrt{2}$. A necessidade de se estudar números complexos ocorre no momento que desejamos resolver a equação polinomial:

$$x^2 + 1 = 0,$$

que não possui solução real. No século XVI, equação desse tipo, despertou os estudiosos, pois todos sabiam que não existiam números como $\sqrt{-1}$, cujo quadrado é negativo. Estes números existiam apenas na imaginação das pessoas. O conceito de número ao longo dos séculos, evoluiu de maneira progressiva: o conjunto dos números deixou de conter apenas os inteiros positivos e incluiu os números negativos, racionais, e irracionais. Já no século XVIII, o conceito de número deu um passo maior quando o matemático alemão Carl Friedrich Gauss estendeu o conjunto de números reais, dando a denominação dos elementos de números *imaginários* ou números *complexos*.

Introduziremos um estudo básico sobre os números complexos e as funções complexas. A definição de números complexos pode ser apresentada de maneira geométrica, através de pontos no plano, ou diretamente de forma algébrica.

1.1 Números Complexos

O conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais, equipado das operações:

- **Igualdade:** $(x, y) = (x', y')$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$;
- **Adição:** $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;
- **Produto:** $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

será indicado por $\mathbb{C}$. Do ponto de vista algébrico, o conjunto $\mathbb{C}$ se identifica com o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e as seguintes relações básicas são facilmente estabelecidas:

(a) $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.

(b) $(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0)$.

(c) $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$.

O par $z = (x, y)$, do conjunto $\mathbb{C}$, recebe o nome de *número complexo* e o número complexo $(0, y)$ denomina-se *imaginário puro*. Com o propósito de mergulhar o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, identificamos, de forma biunívoca, o número real x com o número complexo $(x, 0)$ e, neste contexto, temos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Consequentemente,

$$y \cdot (0, 1) = (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y)$$

e, se representarmos o imaginário puro $(0, 1)$ por i, teremos:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

onde identificamos o número complexo $(-1, 0)$ com o número real -1. Além disso,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

e o número complexo $z = (x, y)$ anotar-se-á $z = x + iy$, onde identificamos os números reais x e y com os números complexos $(x, 0)$ e $(y, 0)$, respectivamente. Com esta notação, as operações em $\mathbb{C}$ tornam-se:

- **Igualdade:** $x + iy = x' + iy'$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$;
- **Adição:** $(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- **Produto:** $(x + iy) \cdot (x' + y') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

1.1.1 Propriedades Algébricas

As operações algébricas definidas em $\mathbb{C}$ gozam das seguintes propriedades:

- $z + w = w + z$. **(comutativa)**
- $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$. **(elemento neutro)**
- $z + (w + u) = (z + w) + u$ e $z \cdot (wu) = (zw) \cdot u$. **(associativa)**
- $z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$. **(distributiva)**
- $z + (-z) = 0$. **(existência do simétrico)**
- se $z \neq 0$, existe $w \neq 0$ tal que $z \cdot w = 1$. **(existência do inverso multiplicativo)**

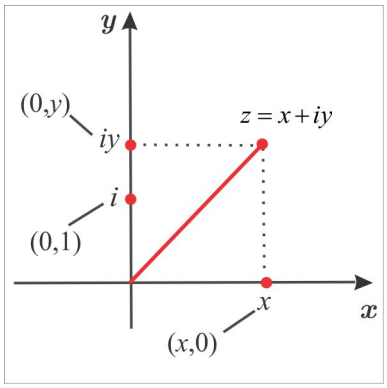


Figura 1.1: O plano complexo $\mathbb{C}$.

Na Figura 1.1, ilustramos um ponto genérico $z = x + iy$ do plano complexo $\mathbb{C}$.

Para construir o inverso multiplicativo do número complexo não nulo $z = x + iy$, seja $w = a + ib$, tal que $z \cdot w = 1$. Então,

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 1 \Leftrightarrow (x + iy) \cdot (a + ib) = 1 + 0 \cdot i \\ &\Leftrightarrow xa - yb + i\,(xb + ya) = 1 + 0 \cdot i \end{aligned}$$

e daí resulta,

$$\left| \begin{array}{l} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2a - xyb = x \\ xyb + y^2a = 0. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Resolvendo o sistema (1.1), encontramos:

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

e o número complexo w, inverso multiplicativo de z e representado por $\dfrac{1}{z}$, vem dado por:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - i \cdot \left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Várias propriedades do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais continuam válidas no conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, mas, existem algumas diferenças. Por exemplo, não podemos comparar dois números complexos, através de desigualdades. A existência do inverso multiplicatvo já faz do plano $\mathbb{C}$ um conjunto especial. Além desse, outro fato que faz de $\mathbb{C}$ um conjunto interessante, diz respeito à equação $e^x = -1$ que, embora não tenha solução real, ela será resolvida em $\mathbb{C}$. Mesmo os conjuntos $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$ sendo isomorfos, como espaços vetoriais reais, o fato de podermos inverter qualquer número complexo não nulo,

torna o conjunto $\mathbb{C}$ um *corpo algébrico*, o que não ocorre com o espaço euclideano $\mathbb{R}^2$. Aí está uma boa razão para se estudar números complexos.

Associados ao número complexo $z = x + iy$, destacamos:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. **(módulo de z)**
- $\mathrm{Re}(z) = x$. **(parte real de z)**
- $\mathrm{Im}(z) = y$. **(parte imaginária de z)**
- $\overline{z} = x - iy$. **(conjugado de z)**

As seguintes relações são consequências diretas das definições e o leitor pode comprová-las, como parte do processo de treinamento.

(a) $|z| = |\overline{z}|$ **(b)** $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ **(c)** $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ **(d)** $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(e) $\overline{\overline{z}} = z$ **(f)** $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ **(g)** $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ **(h)** $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $z \neq 0$

e, usando o processo de *Indução Finita*, obtemos as seguintes relações mais gerais:

(i) $\overline{z_1 + z_2 + \cdots z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \cdots + \overline{z_n}$ **(j)** $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_3} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}$.

Na Figura 1.2 ilustramos um número complexo z, o conjugado $\overline{z}$, o simétrico $-z$, o inverso $1/z$ e o complexo iz.

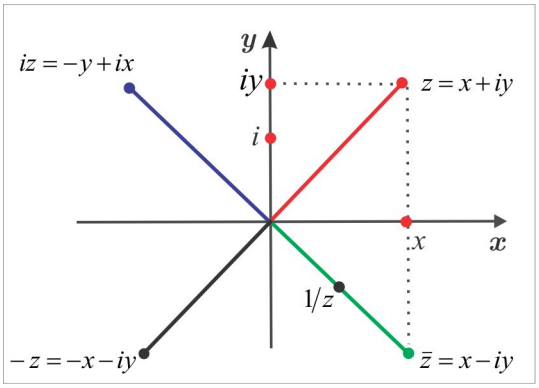


Figura 1.2: Visão geométrica de z, $\bar{z}$, iz, $1/z$ e $-z$.

1.1.2 Desigualdades & Identidades

No conjunto dos números complexos não podemos definir uma relação de ordem, porém, como

$|z|$, $z \in \mathbb{C}$, é um número real, podemos comparar o módulo de dois números complexos. A *desigualdade triangular*, que é uma generalização da mesma desigualdade conhecida no conjunto dos números reais, é bastante utilizada na análise de funções complexas.

LEMA 1.1.1 (Desigualdade Triangular) *Dados dois números complexos z e w, então*:

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

PROVA Da relação $|z|^2 = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2$, segue que $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ e, portanto:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\cdot(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z\cdot\overline{w} + \overline{z}\cdot w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\cdot\overline{w} + \overline{z\cdot\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\cdot\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

de onde resulta que

$$|z+w| \leq |z| + |w|. \qquad \blacksquare \tag{1.2}$$

A seguinte generalização da Desigualdade Triangular pode ser demonstrada pelo Método de Indução Finita: dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, então

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \tag{1.3}$$

LEMA 1.1.2 (Produtos Notáveis) *Se z e w são números complexos, então:*

$$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2z\cdot w + w^2 \qquad e \qquad |z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(z\cdot\overline{w}) + |w|^2. \tag{1.4}$$

PROVA Usando as operações de soma e produto de números complexos, temos

$$\begin{aligned} (z \pm w)^2 &= (z \pm w)\cdot(z \pm w) = z\cdot z \pm z\cdot w \pm w\cdot z + w^2 \\ &= z^2 \pm 2z\cdot w + w^2. \end{aligned}$$

Para a segunda parte, recordemos que $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$ e $2\,\mathrm{Re}\,(z) = z + \bar{z}$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= (z \pm w)\cdot(\overline{z} \pm \overline{w}) = |z|^2 \pm z\cdot\overline{w} \pm \bar{z}\cdot w + |w|^2 \\ &= |z|^2 \pm z\cdot\overline{w} \pm \overline{z\cdot\overline{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(z\cdot\overline{w}) + |w|^2. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 1.1.3 (Fatoração Polinomial I) *Dado um número complexo $w \neq 1$, então*

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.5}$$

PROVA Se representarmos por S a soma do lado esquerdo de (1.5), teremos

$$S - wS = 1 - w^n \Leftrightarrow (1 - w)\, S = 1 - w^n \Leftrightarrow S = \frac{1 - w^n}{1 - w}. \qquad \blacksquare$$

LEMA 1.1.4 (Fatoração Polinomial II) *Se z e z_0 são números complexos e n é um número natural, então*

$$(z - z_0)\left(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + z^{n-3} z_0^2 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) = z^n - z_0^n. \tag{1.6}$$

PROVA Segue diretamente das operações em $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

CONSEQUÊNCIAS

A seguir apresentamos algumas consequências das propriedades e resultados estabelecidos. Recomendamos uma leitura cuidaddosa dos cálculos para melhor compreensão da teoria.

1. Usando as operações em $\mathbb{C}$ é fácil deduzir que $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ e que $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$. De fato, se $z = x + iy$ e $w = a + ib$, então $z \cdot w = ax - by + i\,(ay + bx)$ e, portanto:

$$|z \cdot w|^2 = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = |z|^2 \cdot |w|^2.$$

   Por outro lado, se $w \neq 0$, temos:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}\right| = \frac{|z \cdot \overline{w}|}{|w|^2} = \frac{|z|\,|\overline{w}|}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|}.$$

   Usando o processo indutivo, chegamos a:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot \ldots \cdot |z_n|.$$

2. Dado um número complexo z, então $|z - 1| < |z + 1| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) > 0$. De fato, considerando $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned} |z - 1| &< |z + 1| \Leftrightarrow |z - 1|^2 < |z + 1|^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < (x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow -2x < 2x \Leftrightarrow 0 < x \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) > 0. \end{aligned}$$

3. Se a e b são números reais, temos que $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$ e, consequentemente:

$$|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2} \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|\,. \tag{1.7}$$

Por outro lado, usando a desigualdade $2ab \leq a^2+b^2$, com $a = |\mathrm{Re}\,(z)|$ e $b = |\mathrm{Im}\,(z)|$, encontramos

$$\begin{aligned}(|\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|)^2 &= |\mathrm{Re}\,(z)|^2 + 2\,|\mathrm{Re}\,(z)|\,|\mathrm{Im}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)|^2 \\ &\leq 2\left(|\mathrm{Re}\,(z)|^2 + |\mathrm{Im}\,(z)|^2\right) = 2\,|z|^2\,.\end{aligned}$$

e daí resulta

$$|\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)| \leq \sqrt{2}\,|z|\,. \tag{1.8}$$

Combinando (1.7) e (1.8), chegamos às desigualdades:

$$|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)| \leq \sqrt{2}\,|z|\,. \tag{1.9}$$

4. Se z e w são números complexos, então

$$||z| - |w|| \leq |z-w|\,. \tag{1.10}$$

De fato, da Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned}|z| &= |z-w+w| \leq |z-w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z-w| \\ |w| &= |w-z+z| \leq |z-w| + |z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |z-w|\end{aligned}$$

e combinando essas desigualdades, encontramos

$$-|z-w| \leq |z| - |w| \leq |z-w| \Leftrightarrow ||z| - |w|| \leq |z-w|\,.$$

5. Dados os números complexos $z_1,\ z_2$ e z_3, com $|z_2| \neq |z_3|$, temos que

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}. \tag{1.11}$$

De fato, da desigualdade (1.10), segue que $||z_2| - |-z_3|| \leq |z_2+z_3|$ e, portanto,

$$\frac{1}{||z_2| - |z_3||} = \frac{1}{||z_2| - |-z_3||} \geq \frac{1}{|z_2+z_3|} \Rightarrow \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||} \geq \frac{|z_1|}{|z_2+z_3|}.$$

6. Sejam z e w números complexos, com $|z| \leq 1$ e $|w| \leq 1$. Temos que

$$|z+w| \leq |1+\overline{w}\cdot z| \tag{1.12}$$

e ocorre a igualdade se, e somente se, $|z|=1$ ou $|w|=1$. De fato, sendo $|z| \leq 1$ e $|w| \leq 1$, então $|w|^2\left(1-|z|^2\right) \leq 1-|z|^2$ e, consequentemente, $|z|^2+|w|^2 \leq 1+|z|^2|w|^2$. Agora,

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2+|w|^2+\overline{z}\cdot w+z\cdot\overline{w} \leq 1+|z|^2|w|^2+\overline{z}\cdot w+z\cdot\overline{w} \\ &= |1+z\cdot\overline{w}|^2 \end{aligned}$$

e daí resulta $|z+w| \leq |1+z\cdot\overline{w}|$. Por fim, observamos que se $|z| \neq 1$, então:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |1+z\cdot\overline{w}|^2 \Leftrightarrow |z|^2+|w|^2 = 1+|z|^2|w|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2\left(1-|w|^2\right) = 1-|w|^2 \Leftrightarrow |w|=1. \end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER (Exercícios 1.1)

1. Em cada caso, reduza a expressão à forma $a+ib,\ a,b \in \mathbb{R}$.

   (a) $(2-i)+(3+4i)$ **(b)** $(2+i)-i\cdot(3+4i)$ **(c)** $(1+i)\cdot(2+2i)$ **(d)** $(1-i)^{12}$
   (e) $(1-i)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)$ **(f)** $(2-i)\cdot(2+i)$ **(g)** $(1-2i)\cdot(3+2i)^{-1}$ **(h)** i^{-45}

2. Repita o exercício precedente com as expressões:

   (a) $\dfrac{2}{2-3i}$ **(b)** $\dfrac{2+i}{2-3i}$ **(c)** $\dfrac{1}{(1-i)^2}$ **(d)** $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$ **(e)** $\dfrac{5+5i}{3-4i}+\dfrac{20}{4+3i}$.

3. Encontre números reais x e y, tais que $3x+2iy-ix+5y=7+5i$.

4. Em cada caso, calcule o valor da expressão.

   (a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{2+i}\right)$ **(b)** $\operatorname{Im}\left(\dfrac{2+i}{3+4i}\right)$ **(c)** $\operatorname{Im}(1/z^2)$ **(d)** $\left|\dfrac{1+4i}{4+i}\right|$ **(e)** $|\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta|$.

5. Se z e w são números complexos e $w \neq 0$, comprove as seguintes propriedades:

   (a) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ **(b)** $\overline{\overline{z}}=z$ **(c)** $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$ **(d)** $\overline{(z/w)}=\overline{z}/\overline{w}$.

6. Qual número real λ faz com que o número complexo $\dfrac{2+\lambda i}{1-i}$ seja:

(a) Um número real **(b)** Um imaginário puro, isto é, com parte real nula.

7. Por substituição direta, verifique que $z = 1 \pm i$ satisfazem à equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

8. Se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais, mostre que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. Conclua a partir daí que se z é uma raiz de $P(z)$, o conjugado $\overline{z}$ também o é.

9. Se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais e $P(3+2i) = 1-2i$, qual o valor de $|P(3-2i)|$?

10. Mostre que um número complexo z é real se, e somente se, $z = \overline{z}$.

11. Se $z^2 = (\overline{z})^2$, mostre que o número complexo z ou é real ou é imaginário puro.

12. Dado $z \in \mathbb{C}$, mostre que $|1-z|^2 + |1+z|^2 = 2 + 2|z|^2$.

13. Use o Lema 1.1.3 e expresse o número complexo $1 + i + i^2 + \cdots + i^{179}$ na forma $a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.

14. Se $|z| = |w|$ e $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$, mostre que $z = w$ ou $z = \overline{w}$.

15. Dados os números complexos z e w, mostre que

$$|z \pm wz|^2 = |z|^2 \left[1 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(w)\right].$$

16. Dado um número inteiro n, quantos valores distintos a expressão $i^n + i^{-n}$ assume?

17. Dado z um número complexo, com $|\bar{z} - iz| \neq 0$, mostre que $w = \dfrac{z - i\bar{z}}{\bar{z} - iz}$ é um número real.

18. Se N é um inteiro ≥ 4, mostre que os possíveis valores de $1 + i + i^2 + \cdots + i^N$ são $1,\ 1+i,\ i$ ou 0, conforme o resto da divisão de N por 4 seja $3,\ 2,\ 1$ ou 0.

19. Dado um número real λ, mostre que $z^3 - i\lambda^3 = (z + i\lambda)\left(z^2 - i\lambda z - \lambda^2\right)$.

20. Usando o Método de Indução Finita, estabeleça a Fórmula Binomial:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + \cdots + z^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

21. Ainda com o Método de Indução, estabeleça a Desigualdade Triangular:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

1.2 Forma Exponencial (Polar)

Em Geometria Analítica, um ponto P no plano, de coordenadas retangulares (x, y), pode ser representado por suas *coordenadas polares*. Dado $z = x + iy$ um número complexo não nulo, sejam r e θ as *coordenadas polares* do *ponto* $P(x, y)$, isto é,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad \text{e} \quad \theta = \arctan(y/x).$$

Então

$$z = r\cos\theta + i\,(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,, \tag{1.13}$$

que é a *forma polar* do número complexo z. Para representar o número complexo (1.13) sob a forma exponencial, nos espelhamos nas séries reais e, formalmente, escrevemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{i^n\theta^n}{n!} + \cdots \\ &= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right] \\ &= \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta. \end{aligned}$$

Assim, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ e a *forma polar* de z é, portanto:

$$z = re^{i\theta} = r\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,, \quad \text{onde} \quad r = |z| \ \text{ e } \theta = \arctan(y/x).$$

Um ângulo θ, tal que $\tan\theta = y/x$ denomina-se um *argumento* de z e anota-se $\theta \in \arg(z)$. É claro que se θ_0 é um argumento de z, então, os ângulos $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, também são argumentos de z, tendo em vista que $\cos\theta$ e $\mathrm{sen}\,\theta$ são funções periódicas, de período fundamental 2π. O *argumento principal* de z, denotado por $\mathrm{Arg}(z)$, é o argumento θ, tal que $-\pi < \theta \leq \pi$. É claro que se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\mathrm{Arg}(\lambda) = 0$ e $\arg(\lambda) = \{\theta : \theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLO 1.2.1 *Das relações* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ *e* $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$, *deduzimos que*

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad e \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

EXEMPLO 1.2.2 *Para expressar o número complexo* $z = -1 - i$ *na forma polar, notamos que* $x = -1$, $y = -1$ *e* $r = \sqrt{2}$, *de modo que* $\arctan(y/x) = \pi/4$. *Como o ponto* $z = -1 - i$ *está no terceiro quadrante,*

a equação $\tan\theta = 1$ *nos dá* $\theta = 5\pi/4$ *ou* $\theta = -3\pi/4$. *Assim,* $\mathrm{Arg}\,(z) = -3\pi/4$ *e o argumento* $5\pi/4$ *é tal que* $5\pi/4 = -3\pi/4 + 2\pi$. *A forma polar do número complexo* z *é, portanto:*

$$z = \sqrt{2}[\cos(5\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(5\pi/4)] \quad \textit{ou} \quad \sqrt{2}[\cos(-3\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(-3\pi/4)] = \sqrt{2}e^{-3\pi i/4}.$$

EXEMPLO 1.2.3 *Se* $w = -3+3i$, *então* $y/x = -1$ *e teremos* $\arctan(y/x) = -\pi/4$. *Como* w *encontra-se no segundo quadrante, segue que* $\theta = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$ *e, desta forma:*

$$w = 3\sqrt{2}[\cos(3\pi/4) + i\,\mathrm{sen}\,(3\pi/4)] = 3\sqrt{2}e^{3\pi/4}.$$

Qualquer outro argumento de w *é da forma* $2k\pi+3\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}$, *isto é,* $\arg(w) = \{\theta = 2k\pi + 3\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

LEMA 1.2.4 *Dados* $z = re^{i\theta}$ *e* $w = \rho e^{i\varphi}$ *dois números complexos não nulos, então:*

$$\bar{z} = re^{-i\theta}, \quad z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}, \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi} \quad e \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Além disso, $z = w$ *se, e somente se,* $r = \rho$ *e* $\theta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

PROVA Considerando que $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $w = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= r(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = r[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(-\theta)] = re^{-i\theta} \quad \text{e} \\
z \cdot w &= r\rho[\cos\theta\cos\varphi - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + i(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi + \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)] \\
&= r\rho[\cos(\theta+\varphi) + i\,\mathrm{sen}\,(\theta+\varphi)] = (r\rho)\,e^{i(\theta+\varphi)}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{r\rho e^{i(\theta-\varphi)}}{\rho^2} = (r/\rho)\,e^{i(\theta-\varphi)}. \qquad \blacksquare$$

Veremos na sequência a importância do Lema 1.2.4 nos cálculos e operações com números complexos.

EXEMPLO 1.2.5 (Rotação) *Qual a ação geométrica da multiplicação pelo número complexo* $e^{i\varphi}$? *Dado um número complexo* $z = re^{i\theta}$, *temos que*

$$e^{i\varphi} \cdot z = e^{i\varphi} \cdot re^{i\theta} = re^{i(\theta+\varphi)},$$

de onde segue que o número complexo $w = e^{i\varphi} \cdot z$ *é tal que* $|w| = |z|$ *e* $\mathrm{Arg}\,(w) = \varphi + \mathrm{Arg}\,(z)$. *Geometricamente, o número* w *é determinado a partir do número* z *por uma rotação anti-horária de um ângulo* φ, *como sugere a Figura 1.3.*

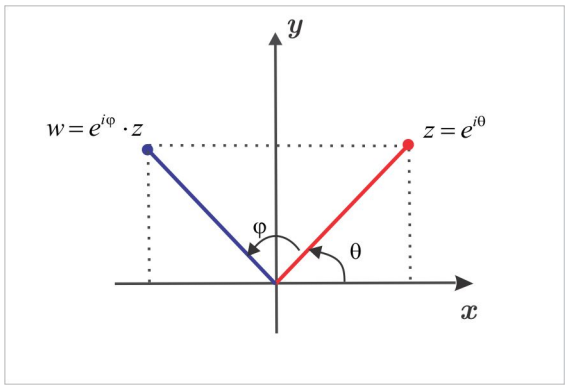


Figura 1.3: Rotação

LEMA 1.2.6 *Se z e w são dois números complexos não nulos, então*:

$$\alpha \in \arg(z \cdot w) \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma, \quad \textit{com} \quad \beta \in \arg(z) \;\; e \; \gamma \in \arg(w).$$

Em outras palavras:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w).$$

PROVA Sejam $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, com $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ e $\varphi = \operatorname{Arg}(w)$. Então:

$$z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$$

e dado qualquer argumento $\alpha \in \arg(z \cdot w)$, temos que $\alpha = \theta + \varphi + 2k\pi$, isto é, α é a soma do argumento θ, no conjunto $\arg(z)$, com o argumento $\varphi + 2k\pi$, no conjunto $\arg(w)$. Por outro lado, qualquer argumento ϕ do conjunto $\arg(z) + \arg(w)$ é da forma $\phi = (\theta + 2n\pi) + (\varphi + 2k\pi)$, isto é, $\phi = (\theta + \varphi) + 2(n + k)\pi$ é um argumento de $z \cdot w$. ■

EXEMPLO 1.2.7 *Dos exemplos precedentes, vemos que $\theta_1 = 5\pi/4$ e $\theta_2 = 3\pi/4$ são argumentos de $z_1 = -1 - i$ e $z_2 = -3 + 3i$, respectivamente, e $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$. Por outro lado,*

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 - i)(-3 + 3i) = 6$$

e, portanto, $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = 0 \neq \theta_1 + \theta_2$. *Este exemplo não viola o que estabelece o Lema 2.2.7, tendo em vista que naquele Lema a igualdade* $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ *deve ser entendida como uma igualdade entre conjuntos.*

COROLÁRIO 1.2.8 *Se $z \neq 0$, então*

$$\operatorname{Arg}(i \cdot z) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg}(z) \quad e \quad \operatorname{Arg}(1/z) = -\operatorname{Arg}(z).$$

PROVA Considerando que $\pi/2 = \operatorname{Arg}(i)$ e que $\operatorname{Arg}(\overline{z}) = -\operatorname{Arg}(z)$, resulta:

$$\operatorname{Arg}(iz) = \operatorname{Arg}(i) + \operatorname{Arg}(z) = \pi/2 + \operatorname{Arg}(z) \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg}(1/z) = \operatorname{Arg}\left(\overline{z}/\left|z\right|^2\right) = -\operatorname{Arg}(z). \qquad \blacksquare$$

1.2.1 Fórmula de De Moivre

Para generalizar o Lema 1.2.4, deixe-nos considerar n números complexos

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\operatorname{sen}\theta_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n$$

e comprovemos por indução a seguinte relação:

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n)\left[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)\right]. \tag{1.14}$$

No caso $n = 2$, a relação (1.14) é precisamente o Lema 1.2.4. Supondo a fórmula válida para $n > 2$, mostremos que ela continua válida ao substituirmos n por $n+1$. De fato, temos pelo Lema 1.2.4:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} z_k &= \left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) \cdot z_{n+1} = \left[(r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n) \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)}\right] \cdot \left(r_{n+1} \cdot e^{i\theta_{n+1}}\right) \\ &= (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot r_{n+1}) \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n+\theta_{n+1})}\end{aligned}$$

e com isso comprovamos a relação (1.14) para qualquer número natural n. Considerando em (1.14) $z_k = e^{i\theta}$, $k = 1, 2, 3, \ldots n$, chegamos à *Fórmula de De Moivre*:

$$\boxed{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta), \quad n = 1, 2, 3, \ldots} \tag{1.15}$$

EXEMPLO 1.2.9 *Calculemos o valor de $(1+i)^8$. Temos que $\operatorname{Arg}(1+i) = \pi/4$ e, portanto:*

$$(1+i)^8 = [\sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\operatorname{sen}\pi/4)]^8 = 16(\cos 2\pi + i\operatorname{sen} 2\pi) = 16.$$

EXEMPLO 1.2.10 *Ainda com a Fórmula de De Moivre, vamos calcular o valor de $(1-i)^6$. Temos:*

$$(1-i)^6 = 8[\cos(-\pi/4) + i\operatorname{sen}(-\pi/4)]^6 = 8[\cos(-3\pi/2) + i\operatorname{sen}(-3\pi/2)] = 8i.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 1.2)**

1. A partir do resultado da operação $(2+i)\cdot(3+i)$, deduza a identidade:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1/2) + \arctan(1/3).$$

2. Repita o exercício precedente com a expressão $(5-i)^4 \cdot (1+i)$ para chegar à identidade:

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239).$$

3. Calcule o valor da expressão $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$, sendo $z = 2-2i$ e $w = \left(\sqrt{3}-i\right)^6$.

4. Determine o argumento principal dos seguintes números complexos:

   (a) $z = 3$ (b) $z = 2-2i$ (c) $z = 1-i\sqrt{3}$ (d) $z = -4i$ (e) $z = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ (f) $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

5. Se $z = 2i$ e $w = 3e^{i\pi/3}$, represente no plano $\mathbb{C}$ os números complexos $z,\ z+w,\ z-w$ e $\overline{w}$.

6. Usando a forma polar, deduza que:

   (a) $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 2+2i\sqrt{3}$ (b) $\dfrac{5i}{2+i} = 1+2i$ (c) $(-1+i)^7 = -8(1+i)$

7. Use a Fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)$$

   e comprove as seguintes relações trigonométricas:

   (a) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

   (b) $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$.

8. Calcule o valor de $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

9. Em cada caso, reduza os números z e w à forma polar e encontre as formas polares de $z\cdot w$ e z/w.

   (a) $z = \sqrt{3}+3i$, $w = \frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)$ (b) $z = 1+i$, $w = \sqrt{3}+i$ (c) $z = 1+2i$, $w = 2+i$.

10. Usando a forma polar, mostre que $z = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ é raiz da equação $z^4 - (1+4i)z^2 + 4i = 0$.

11. Se $z \cdot w \neq 0$, mostre que $\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = |z|\,|w|$ se, e somente se, $\arg z - \arg w = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, tem-se $|z + w| = |z| + |w|$.

12. Demonstre a identidade
$$\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = e^{2i\theta}.$$

1.3 Potências & Raízes

Dados os números complexos $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, vimos que

$$z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)},$$

e, considerando $w = z$, obtemos indutivamente:

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Se definirmos $z^{-n} = (1/z)^n$, teremos:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left[(1/r)e^{i(-\theta)}\right]^n = (1/r)^n e^{in(-\theta)} = r^{-n}e^{i(-n)\theta}.$$

Assim, $z^n = r^n e^{in\theta},\ \forall n \in \mathbb{Z}$ e, em particular, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, isto é,

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

As potências racionais de um número complexo z são estabelecidas de forma natural:

$$z^{p/q} = \left(z^{1/q}\right)^p, \quad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,$$

onde $z^{1/q}$ é o número complexo w, tal que $w^q = z$. Temos as seguintes propriedades:

- **Produto** $z^r \cdot z^s = z^{r+s}, \quad r, s \in \mathbb{Q}.$
- **Quociente** $\left(\dfrac{z}{w}\right)^r = \dfrac{z^r}{w^r}, \quad r \in \mathbb{Q}, \quad w \neq 0.$

1.3.1 Raízes da Unidade

Uma raiz n-ésima (ou de ordem n) da unidade é qualquer número complexo z, tal que $z^n = 1$. Se considerarmos $z = re^{i\theta}$, teremos

$$z^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow r^n \left[\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\right] = 1$$

e daí resulta que $r^n = 1$ e $n\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$z^n = 1 \Leftrightarrow z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

e as n raízes distintas da equação $z^n = 1$ são, portanto,

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{i(2k\pi/n)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1.16}$$

Se considerarmos $w_n = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$, teremos $w_n^n = 1$ e as n raízes da equação $z^n = 1$ são precisamente $1,\ w_n,\ w_n^2,\ \ldots, w_n^{n-1}$.

EXEMPLO 1.3.1 *As raízes da equação $z^2 = 1$ são ± 1. No caso $n = 3$, resulta de (1.16) que as raízes da equação $z^3 = 1$ são:*

$$z_0 = e^0 = 1, \quad z_1 = e^{i(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad z_2 = e^{i(4\pi/3)} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

EXEMPLO 1.3.2 *Vamos encontrar as quatro raízes da equação $z^4 = 1$.*

SOLUÇÃO Neste caso, $n = 4$ e temos

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{1.17}$$

Considerando sucessivamente $k = 0, 1, 2, 3$ em (1.17), encontramos as raízes

$$z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -1,\ \text{e}\ z_3 = -i.$$

Na Figura 1.4 ilustramos graficamente as raízes de $z^2 = 1,\ z^3 = 1$ e $z^4 = 1$. Para $n \geq 3$, as n raízes da equação $z^n = 1$ são vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio 1.

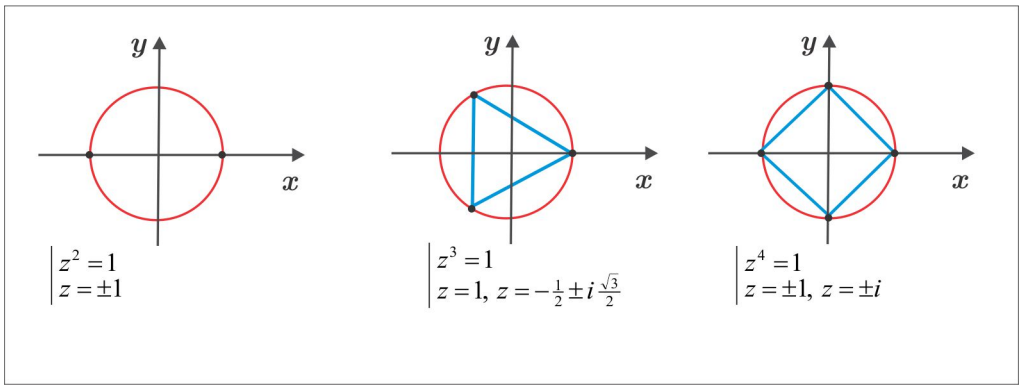


Figura 1.4: Raízes da unidade.

Em uma situação mais geral, dado um número complexo não nulo $w = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ temos que

$$\begin{aligned} z^n &= w \Leftrightarrow r^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi) \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

e as n raízes distintas da equação $z^n = 1$ são precisamente

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{1.18}$$

Se $w_n = \cos(2\pi/n) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi/n)$ e z_0 é uma solução particular da equação $z^n = w$, as n raízes complexas da equação $z^n = w$ são dadas por:

$$z_0,\ z_0 w_n,\ z_0 w_n^2,\ \ldots,\ z_0 w_n^{n-1}.$$

OBSERVAÇÃO 1.3.3 *Embora o cálculo de raízes utilizando a forma polar tenha caráter geral, o cálculo também pode ser feito utilizando a forma cartesiana. Por exemplo, para resolver a equação $z^2 = 2i$, escrevemos $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, e obtemos*

$$z^2 = 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 2i = -7 - 24i \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{array} \right.$$

e daí resulta $y = 1/x$ e $x^4 = 1$, isto é, $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Logo, $z = \pm(1 + i)$.

EXEMPLO 1.3.4 *Vamos encontrar as raízes da equação $z^2 = -7 - 24i$.*

SOLUÇÃO Considerando $z = x + iy$, temos

$$z^2 = -7 - 24i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24. \end{array} \right. \tag{1.19}$$

Resolvendo o sistema (1.19), encontramos $x = \pm 3$ e $y = -12/x$. Assim, as raízes são $z = \pm(3 - 4i)$.

EXEMPLO 1.3.5 *Neste exemplo vamos calcular o valor de* $\left|\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}\right|$, *sendo* $\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}$ *qualquer raiz da equação* $z^3 = 7 + i\sqrt{15}$.

SOLUÇÃO Seja $w = 7 + i\sqrt{15}$, com $\operatorname{Arg}(w) = \varphi$. Temos que $|w| = \sqrt{49 + 15} = 8$ e de (1.18) resulta

$$z = \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} \Leftrightarrow z^3 = 7 + i\sqrt{15} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i(\varphi + 2k\pi)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Logo, $|z| = \sqrt[3]{8} = 2$.

EXEMPLO 1.3.6 *Para encontrar as cinco raízes da equação* $z^5 = -32$, *notamos que:*

$$z_k = \sqrt[5]{32}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$$

isto é:

$$z_0 = 2e^{i\pi/5}, \quad z_1 = 2e^{i3\pi/5}, \quad z_2 = 2e^{i\pi} = -2, \quad z_3 = 2e^{i7\pi/5} \quad e \quad z_4 = 2e^{i9\pi/5}.$$

Os valores dessas raízes, indicados na Figura 1.5, estão igualmente espaçados ao longo da circunferência de centro na origem e raio $R = 2$ e constituem os vértices de um pentágono regular.

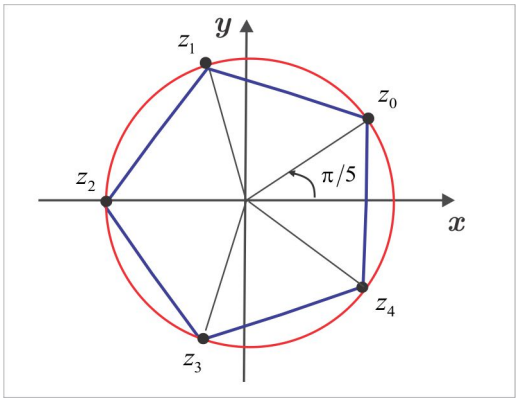


Figura 1.5: Raízes da equação $z^5 = -32$.

EXEMPLO 1.3.7 *Resolver a equação* $z^2 = -15 - 8i$.

SOLUÇÃO Temos que

$$\begin{aligned} x + iy &= \sqrt{-15-8i} \Leftrightarrow (x+iy)^2 = -15-8i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -15-8i \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = -15 \quad \text{e} \quad 2xy = -8. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = \pm 1$ e $y = \mp 4$. Assim, os valores de $\sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$.

EXEMPLO 1.3.8 *Resolver a equação quadrática* $az^2 + bz + c = 0$, *sendo* $a \neq 0$.

SOLUÇÃO Transpondo c para o 2º membro e dividindo a equação por a, encontramos:

$$z^2 + \frac{b}{a}z = \frac{-c}{a}. \tag{1.20}$$

Para completar o quadrado, adicionanmos $(b/2a)^2$ aos dois lados da equação (1.20) e obtemos:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

e, extraindo a raiz quadrada, resulta

$$z + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \text{isto é,} \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

EXEMPLO 1.3.9 *Resolver a equação quadrática* $z^2 + (2i-3)z + 5 - i = 0$.

SOLUÇÃO Considerando $a = 1$, $b = 2i - 3$ e $c = 5 - i$, temos, do Exemplo 1.3.8, que as raízes são:

$$z = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{(2i-3)^2 - 4(5-i)}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15-8i}}{2}.$$

Ora, $\sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$ (veja o Exemplo 1.3.7) e, portanto, as raízes são $z_1 = 2 - 3i$ ou $z_2 = 1 + i$.

EXEMPLO 1.3.10 *Resolver a equação biquadrada* $z^4 - (1+4i)z^2 + 4i = 0$.

SOLUÇÃO Efetuando o completamento do quadrado, vemos que a equação é equivalente a

$$\left[z^2 - \tfrac{1}{2}(1+4i)\right]^2 = \tfrac{1}{4}(-15-8i)$$

e daí resulta

$$z^2 = \tfrac{1}{2}(1+4i) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-15-8i}.$$

No Exemplo 1.3.7), encontramos $\sqrt{-15-8i} = \pm(1-4i)$ e, sendo assim,

$$z^2 = \tfrac{1}{2}(1+4i) \pm \tfrac{1}{2}(1-4i),$$

isto é, $z = \pm 1$ ou $z = \pm 2\sqrt{i}$. Para concluir, observamos que $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$ e obtemos as raízes $z = \pm 1$ e $z = \pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$.

EXEMPLO 1.3.11 *Vamos decompor o polinômio z^4+1 em fatores quadráticos com coeficientes reais.*

SOLUÇÃO Iniciamos com a fatoração $z^4+1 = \left(z^2-i\right)\left(z^2+i\right)$, que não atende ao que se pede, tendo em vista que os coeficientes não são todos reais. Se $w^2 = i$, então $\overline{w}^2 = -i$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
z^4+1 &= \left(z^2-i\right)\left(z^2+i\right) = \left(z^2-w^2\right)\left(z^2-\overline{w}^2\right) = (z-w)(z+w)(z-\overline{w})(z+\overline{w}) \\
&= [(z+w)(z+\overline{w})]\cdot[(z-w)(z-\overline{w})] \\
&= \left[z^2+(w+\overline{w})\cdot z+|w|^2\right]\cdot\left[z^2-(w+\overline{w})\cdot z+|w|^2\right] \\
&= \left[z^2+2\operatorname{Re}(w)\cdot z+|w|^2\right]\cdot\left[z^2-2\operatorname{Re}(w)\cdot z+|w|^2\right].
\end{aligned}$$

Para concluir, consideramos $w = \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e encontramos: $z^4+1 = \left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\cdot\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 1.3)**

1. Encontre todos os números complexos z, tais que $z^3 = \bar{z}$.

2. Encontre todos os valores inteiros de n para os quais $\left(1-\sqrt{3}i\right)^n$ é um número real.

3. Determine os valores principais de:

   (a) $(2i)^{1/2}$ (b) $(-i)^{1/3}$ (c) $8^{1/6}$ (d) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{3/2}$ (e) $(-1)^{-3/4}$

4. Se w é uma raiz n-ésima da unidade, $w \neq 1$, use a identidade (1.5) e mostre que

$$1+w+w^2+w^3+\cdots+w^{n-1} = 0.$$

   Agora, calcule o valor da soma: $S = 1+2w+3w^2+3w^3+\cdots+nw^{n-1}$.

5. Demonstre a identidade:

$$\sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|+\operatorname{Re}(z))}+i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|-\operatorname{Re}(z))}\,\right].$$

Use esta identidade e resolva as equações:

(a) $z^2 + z + 1 = i$ (b) $z^2 - 3z + 3 = i$ (c) $z^2 - (5+i)\,z + 8 + i = 0$.

6. Se N é um inteiro ≥ 4, mostre que os possíveis valores de $1 + i + i^2 + \cdots + i^N$ são $1,\ 1+i,\ i$ ou 0, conforme o resto da divisão de N por 4 seja $3,\ 2,\ 1$ ou 0.

7. Se $-\pi \leq \theta \leq \pi$, use a identidade (1.5) e estabeleça as relações:

   (a) $1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}[(n+1/2)\,\theta]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$.

   (b) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(2\theta) + \cdots + \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(\theta/2) - \dfrac{\cos[(n+1/2)\,\theta]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$.

8. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

   (a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$ **(b)** $z^4 = -16$ **(c)** $z^4 - (1-2i)\,z^2 - 1 - i = 0$

   (d) $z^7 = -1 - i$ **(e)** $(\overline{z})^3 = -i$ **(f)** $z^4 - (1-i)\,z^2 = i$

9. Mostre que as raízes n-ésimas do número complexo z formam um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio $R = \sqrt[n]{|z|}$.

10. Se z_1, z_2 e z_3 são as raízes complexas da equação $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$, com $a_3 \neq 0$, mostre que $z_1 + z_2 + z_3 = -a_2/a_3$ e $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -a_0/a_3$. Generalizando, prova-se que a soma e o produto das n raízes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ da equação polinomial

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

são, respectivamente:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = \frac{(-1)^n\,a_0}{a_n}.$$

11. Se w é uma raiz da equação $w^2 = \lambda i$, onde λ é um número real não nulo, imitando o que foi feito no Exemplo 1.3.11, obtemos a fatoração

$$z^4 + \lambda^2 = \left(z^2 + 2\operatorname{Re}(w)\cdot z + |w|^2\right)\cdot\left(z^2 - 2\operatorname{Re}(w)\cdot z + |w|^2\right).$$

Decomponha $z^4 + 9$ em fatores quadráticos, com coeficientes reais.

1.4 Topologia do Plano $\mathbb{C}$

Nos próximos capítulos apresentaremos os conceitos de limite, derivada e integral para funções de uma variável complexa $z = x + iy$, e é necessário apresentarmos os conceitos topológicos e terminologias com relação a determinados subconjuntos do plano complexo.

Fixemos um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ no plano $\mathbb{C}$ e consideremos $\delta > 0$. A δ-*vizinhança* de centro z_0 e raio δ é, por definição, o subconjunto

$$V_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \delta\}.$$

Considerando que a distância de um ponto $z = x + iy$ ao ponto z_0 é dada por

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

vemos que os pontos que satisfazem à desigualdade $|z - z_0| < \delta$, são internos ao círculo de centro em z_0 e raio δ. Geometricamente, $V_\delta(z_0)$ é um *disco* de centro z_0 e raio δ, como indica a Figura 1.6. A linha pontilhada indica que os pontos da circunferência não fazem parte da vizinhança.

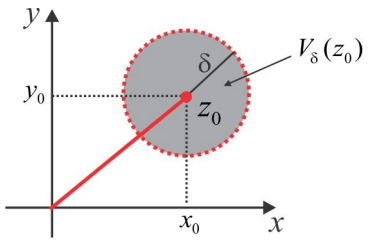


Figura 1.6: Vizinhança de raio δ.

Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$, a posição relativa do ponto z_0 em relação a S é caracterizada por:

(a) Existe uma δ-vizinhança de z_0 totalmente contida em S, isto é, existe um $\delta > 0$, tal que $V_\delta(z_0) \subset S$. Neste caso, diremos que z_0 é ponto *interior* ao conjunto S.

(b) Existe uma δ-vizinhança de z_0 inteiramente contida no *complementar*[1] de S, isto é, existe $\delta > 0$, tal que $V_\delta(z_0) \subset \mathbb{C}\backslash S$. Neste caso, z_0 é denominado ponto *exterior* ao conjunto S.

[1] O complementar de S, representado por $\mathbb{C}\backslash S$, é o conjunto dos números complexos que não pertencem a S.

(c) Qualquer δ-vizinhança de z_0 contém algum ponto de S e algum ponto do complementar de S, isto é, $V_\delta(z_0) \cap S \neq \varnothing$ e $V_\delta(z_0) \cap (\mathbb{C} \backslash S) \neq \varnothing$, $\forall \delta > 0$. Este é o caso em que o ponto z_0 é dito ponto de *fronteira* do conjunto S.

NOTAÇÃO O conjunto constituído de todos os pontos interiores ao conjunto S, será representado por $\text{int}(S)$ enquanto, $\text{ext}(S)$ indicará o conjunto de todos os pontos exteriores ao conjunto S. O conjunto dos pontos de fronteira de S será indicado por ∂S. É claro que $\text{int}(S) \subset S$ e que os subconjuntos , ∂S e $\text{ext}(S)$ são dois a dois disjuntos (sem ponto em comum), isto é,

$$\text{int}(S) \cap \partial S = \varnothing, \quad \text{ext}(S) \cap \partial S = \varnothing \quad \text{e} \quad \text{int}(S) \cap \text{ext}(S) = \varnothing.$$

DEFINIÇÃO 1.4.1 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ denomina-se aberto quando $S \cap \partial S = \varnothing$, isto é, todos os seus pontos são pontos interiores. Neste caso, se z_0 é um ponto de S, existe uma δ-vizinhança de z_0 inteiramente contida em S.*

DEFINIÇÃO 1.4.2 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ denomina-se fechado quando $\partial S \subset S$, ou seja, quando S contém todos os seus pontos de fronteira.*

EXEMPLO 1.4.3 *Uma vizinhança V_δ em $\mathbb{C}$ é um conjunto aberto e conexo*[2]*. Um conjunto aberto e conexo recebe a denominação de* ***domínio****. Seja $S = V_\delta(z_0)$ e mostremos que todo ponto z de S é um ponto interior. Se considerarmos $\delta^* = \delta - |z - z_0|$, então dado $w \in V_{\delta^*}(z)$, temos pela Desigualdade Triangular*

$$|w - z_0| \leq |w - z| + |z - z_0| < \delta^* + |z - z_0| = \delta,$$

e, portanto, $w \in S$. Logo, $V_{\delta^*}(z) \subset S$, mostrando que $z \in \text{int}(S)$.

EXEMPLO 1.4.4 *Para mostrar que conjunto $S = \{z \in \mathbb{C};\ \text{Im}(z) < 1\}$ é um domínio, seja $z = a + ib \in S$ dado. Temos que $b < 1$, e para construir uma δ-vizinhança de z contida em S consideramos $\delta = \min\{|b|, 1 - |b|\}$. Se $w = x + iy \in V_\delta(z)$, então*

$$|y - b| \leq \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |w - z| < \delta,$$

e, consequentemente,

$$y \leq |y| \leq |y - b| + |b| < \delta + |b| < 1 \Rightarrow w \in S.$$

[2] Um conjunto aberto A é conexo se quaisquer dois pontos em A podem ser ligados por uma poligonal inteiramente contida em A.

O seguinte resultado relaciona os conceitos de *conjunto aberto* e *conjunto fechado* e sua demonstração será apresentada de forma breve e merece reflexão.

LEMA 1.4.5 *Um subconjunto S é aberto se, e somente se, seu complementar $\mathbb{C}\backslash S$ é fechado.*

PROVA Suponhamos que S seja fechado e seja z_0 um ponto de $\mathbb{C}\backslash S$. Como $\partial S \subset S$, segue que $z_0 \notin \partial S$ e, sendo assim, $z_0 \in \operatorname{int}(\mathbb{C}\backslash S)$. Reciprocamente, se $\mathbb{C}\backslash S$ é aberto e $z_0 \in \partial S$, então $z_0 \notin \mathbb{C}\backslash S$, tendo em vista que

$$\partial S \cap (\mathbb{C}\backslash S) = \partial S \cap \operatorname{int}(\mathbb{C}\backslash S) = \varnothing.$$

Logo, $z_0 \in S$ e, portanto, $\partial S \subset S$, mostrando que S é fechado. ■

EXEMPLO 1.4.6 *O conjunto $S = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$ é fechado. Ressaltamos que sua fronteira ∂S é a reta $\operatorname{Im}(z) = 1$ e está inteiramente contida no conjunto S.*

DEFINIÇÃO 1.4.7 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ denomina-se limitado quando existir um raio $R > 0$, tal que $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, isto é,*

$$|z| \leq R, \quad \forall\ z \in S.$$

EXEMPLO 1.4.8 *Qualquer disco $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ é um subconjunto fechado e limitado. A fronteira do disco D_R é a circunferência*

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

Um subconjunto do plano $\mathbb{C}$ que é, ao mesmo tempo, limitado e fechado, recebe a denominação de "conjunto compacto".

DEFINIÇÃO 1.4.9 *Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é um ponto de acumulação de S quando toda vizinhança de z_0 contiver um ponto de S, distinto de z_0. O conjunto dos pontos de acumulação de S será indicado por S'. Em símbolos*

$$z_0 \in S' \Leftrightarrow \forall\ \delta > 0,\ V_\delta(z_0) \cap (S\backslash\{z_0\}) \neq \varnothing.$$

EXEMPLO 1.4.10 *Para deduzir que origem $z = 0$ é o único ponto de acumulação do conjunto*

$$S = \{i, i/2, i/3, \ldots\}$$

observamos que $0 \notin S$*, mas, dado um raio* $\varepsilon > 0$*, se considerarmos* n *suficientemente grande teremos* $|i/n| < \varepsilon$ *e, portanto,* $i/n \in V_\varepsilon \cap S$*. Por outro lado, dado* $z_0 = x_0 + iy_0 \neq 0$*,* $z_0 \notin S$*, se considerarmos* $\delta = \dfrac{|x_0|}{2}$*, teremos* $V_\delta(z_0) \cap S = \varnothing$*. Finalmente, se* $z_0 = 1/n_0$ *e considerarmos* $\delta < 1/n_0(n_0+1)$*, teremos* $V_\delta(z_0) \cap S = \{z_0\}$*. Assim,* $S' = \{0\}$*.*

EXEMPLO 1.4.11 *Observemos os subconjuntos*

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \quad e \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \ e \ |z| > 1\},$$

ilustrados graficamente na Figura 1.7, onde observamos que

$$S_1' = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \quad e \quad S_2' = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \quad e \quad |z| \geq 1\}.$$

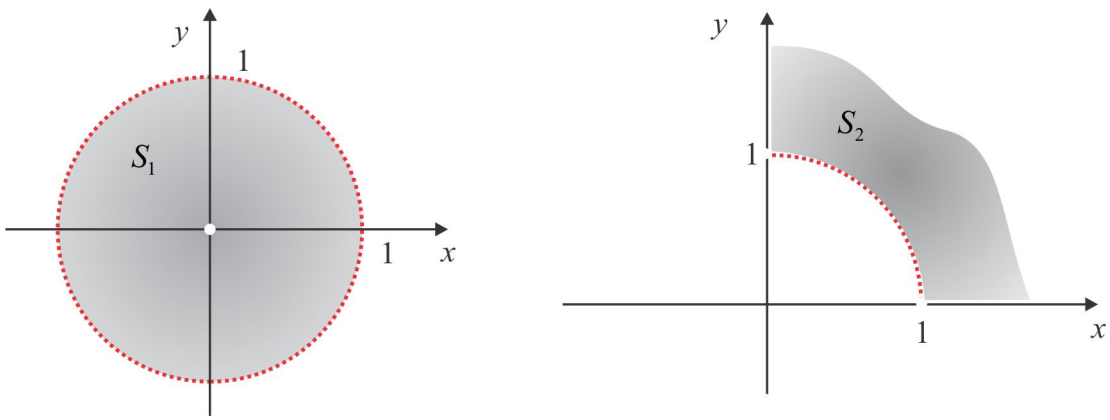


Figura 1.7: Conjuntos S_1 e S_2 do Exemplo 1.4.11

1.4.1 Convergência × Topologia

Por *sequência de números complexos* entendemos uma função

$$z : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$$

que associa a cada número natural n um número complexo $z(n) = z_n$, denominado *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência. Faremos referência ao termo geral z_n como sendo a sequência $z : n \mapsto z_n$. A cada sequência complexa (z_n) corresponde um par de sequências reais (x_n, y_n), sendo $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$

e $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$, de modo que as propriedades básicas estabelecidas para sequências reais são herdadas pelas sequências complexas. No Exercício 8 a seguir, veremos que:

$$\lim z_n = z \Leftrightarrow \lim [\operatorname{Re}(z_n)] = \operatorname{Re}(z) \quad \text{e} \quad \lim [\operatorname{Im}(z_n)] = \operatorname{Im}(z).$$

e a convergência da sequência complexa (z_n) se reduz à convergência de duas sequências reais.

DEFINIÇÃO 1.4.12 (Conceito de Limite) *A sequência (z_n) tem limite z ou converge para z, e anota-se $z = \lim z_n$ ou $z_n \to z$, quando a cada raio $\varepsilon > 0$ corresponder um índice $N \in \mathbb{N}$, tal que:*

$$z_n \in V_\varepsilon(z), \quad \forall\, n \geq N.$$

Dito de outra forma, temos:

$$z = \lim z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq N.$$

As propriedades básicas de convergência, no caso complexo, decorrem das propriedades do limite no caso real. Por exemplo, se $z_n \to z$ e $w_n \to w$, então a sequência $(z_n + \lambda w_n)$ converge para o número complexo $z + \lambda w$, sendo λ qualquer número complexo fixado. De fato, basta notar que:

$$z_n + \lambda w_n = (x_n + iy_n) + (\lambda u_n + i\lambda v_n) \to (x + iy) + \lambda(u + iv) = z + \lambda w.$$

As demais propriedades podem ser comprovadas de forma similar ao caso real. Temos:

(a) $|z_n| \to |z|$.

(b) $z_n w_n \to zw$.

(c) $z_n/w_n \to z/w, \quad w \neq 0$ e $w_n \neq 0,\ \forall\, n$.

PROPOSIÇÃO 1.4.13 *Com respeito a um subconjunto $F \subset \mathbb{C}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *F é fechado.*

(b) *Se (z_n) é uma sequência de pontos de F, convergindo para z, então $z \in F$.*

DEMONSTRAÇÃO Para mostrar que (a) $\Rightarrow$ (b), suponhamos que F seja fechado e consideremos uma sequência (z_n) em F, com $\lim z_n = z$. Se z não fosse um ponto de F, então z estaria no complementar $\mathbb{C}\backslash F$, que é aberto, e, portanto, existiria um raio $\varepsilon > 0$, tal que $V_\varepsilon(z) \subset \mathbb{C}\backslash F$. Desde que

$z_n \to z$, a partir de certa ordem N temos que $z_n \in V_\varepsilon(z)$ e isto contradiz o fato de $z_n \in F$, $\forall n$. Por outro lado, se F não fosse fechado, então $\mathbb{C}\backslash F$ não seria aberto e existiria um ponto $z \notin F$, tal que

$$V_{1/n}(z) \cap F \neq \varnothing, \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

e, escolhendo para cada n um número complexo z_n na interseção $V_{1/n} \cap F$, a sequência (z_n) assim construida estaria em F e convergiria para z, contradizendo a hipótese (b). ■

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 1.4)**

1. Esboce e classifique em Aberto (A) ou Fechado (F) os subconjuntos do plano complexo caracterizados por:

   (a) $|\mathrm{Re}\, z| < 2$ **(b)** $|\mathrm{Im}\, z| > 1$

   (c) $|z - 4| > |\overline{z}|$ **(d)** $0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2$

   (e) $\mathrm{Re}\, z > 0 \quad \text{e} \quad 1 < |z - 2i| < 2$ **(f)** $0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, \quad z \neq 0$

   (g) $\mathrm{Re}\,(1/z) < 1/2.$ **(h)** $\mathrm{Im}\,(1/\overline{z}) \geq 1/2$

   (i) $\mathrm{Re}\left(z^2\right) \geq 0.$ **(j)** $\mathrm{Im}\left(z^3\right) < 0.$

2. Identifique as curvas do plano complexo descritas por:

   (a) $|z - 2| = |z - 3i|$ **(b)** $|z - 1 + i| = |3 + i - z|$ **(c)** $|z - i| + |z + 2| = 3$

   (d) $|z + 1| = 2\,|z - i|$ **(e)** $\mathrm{Re}\,(1 - z) = |z|$ **(f)** $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 < \theta \leq 2\pi$

3. Dado um número real λ, identifique o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \lambda\,|z| = |z - 1|\}$.

4. Sejam R uma constante positiva e z_0 um número complexo fixado. Identifique o subconjunto do plano complexo descrito pela equação $|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$.

5. Por que o conjunto vazio $\varnothing$ é aberto? Por que ele é um conjunto fechado?

6. Mostre que a união e a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto. O que se pode dizer sobre a união e a interseção de dois conjuntos fechados?

7. Dê exemplo de uma família infinita $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abertos do plano $\mathbb{C}$, cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ não é um conjunto aberto.

8. Mostre que $\lim z_n = z$ se, e somente se, $\lim [\mathrm{Re}\,(z_n)] = \mathrm{Re}\,(z)$ e $\lim [\mathrm{Im}\,(z_n)] = \mathrm{Im}\,(z)$. Em particular, se a sequência (z_n) é constante, digamos, $z_n = z$, $\forall\, n$, então $\lim z_n = z$.

9. Com base no Exercício precedente, calcule os limites:

   (a) $\lim \left(\dfrac{n+1+in}{n+1} \right)$ (b) $\lim \left(\dfrac{1+i\ln n}{n} \right)$.

10. Mostre que $\lim |z_n| = 0$ se, e somente se, $\lim z_n = 0$. Dê exemplo de uma sequência divergente (z_n), com $(|z_n|)$ convergente.

11. Se $|z| < 1$, mostre que $\lim (z^n) = 0$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

1.1 NÚMEROS COMPLEXOS

1. Das operações com números complexos, resulta:

   (a) $(2-i)+(3+4i) = 5+3i$.

   (b) $(2+i)-i\,(3+4i) = 2+i-3i+4 = 6-2i$.

   (c) $(1+i)\cdot(2+2i) = 0+4i = 4i$.

   (d) $(1-i)^{12} = \left[(1-i)^2\right]^6 = (-2i)^6 = 64i$.

   (e) $(1-i)\,(\sqrt{3}+i) = 1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i$.

   (f) $(2-i)\cdot(2+i) = 2^2 - i^2 = 5$.

   (g) $(1-2i)\,(3+2i)^{-1} = \dfrac{1-2i}{3+2i} = \dfrac{(1-2i)\cdot(3-2i)}{13} = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{8}{13}i$.

   (h) $i^{-45} = i^{-44}\cdot i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

2. Usando a relação

$$\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\overline{w}}{|w|^2},$$

   encontramos:

   (a) $\dfrac{2}{2-3i} = \dfrac{4}{13} + \dfrac{6}{13}i$.

(b) $\dfrac{2+i}{2-3i} = \dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}i.$

(c) $\dfrac{1}{(1-i)^2} = \dfrac{i}{2}.$

(d) Considerando que $i^{30} = -1$ e $i^{19} = -i$, obtemos:[3]

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i-1} = 1 + i.$$

(e) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{3+4i} = 3 - i.$

3. Os números x e y formam a solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{array} \right. ,$$

isto é, $x = -1$ e $y = 2$.

4. Dado um número compexo $z = x + iy$, recordemos que

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \left| re^{i\theta} \right| = r.$$

(a) $z = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{5} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 2/5.$

(b) $z = \dfrac{2+i}{3+4i} = \dfrac{(2+i)\cdot(3-4i)}{25} = \dfrac{10-5i}{25} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = -1/5.$

(c) Se $z = x + iy$, então:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{|z^4|} - \frac{2xyi}{|z^4|} \Rightarrow \operatorname{Im}\left(1/z^2\right) = -\frac{2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)}{|z|^4}.$$

(d) $\left|\dfrac{1+4i}{4+i}\right| = \dfrac{|1+4i|}{|4+i|} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 1.$

(e) $|\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1.$

5. Como ilustração, faremos os ítens (c) e (d). Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, então:

(c) $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - i(ad + bc) \quad \text{e} \quad \overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)\cdot(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc).$

[3] De forma geral, temos: $i^n = (-1)^k$, se $n = 2k$, e $i^n = (-1)^k \cdot i$, se $n = 2k+1$.

(d) Primeiro, mostremos que $1/\overline{w} = \overline{(1/w)}$. De fato, notando que $1/w = \overline{w}/|w|^2$ e $1/\overline{w} = w/|w|^2$, temos:

$$1/\overline{w} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{\overline{\overline{w}}}{|w|^2} = \overline{\left(\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right)} = \overline{(1/w)}.$$

Agora, temos:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

6. Se $z = \dfrac{2+\lambda i}{1-i}$, então $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{2-\lambda}{2}$ e $\mathrm{Im}\,(z) = -\dfrac{2+\lambda}{2}$. Sendo assim, z é real se $\lambda = -2$ e será imaginário puro quando $\lambda = 2$.

7. Use as propriedades da conjugação dadas no Exercício 5 da Seção 1.1.

8. Se $z = 3+2i$, então $P\,(3-2i) = P\,(\overline{z}) = \overline{P\,(z)} = 1+2i$. Logo, $|P\,(3-2i)| = |1+2i| = \sqrt{5}$.

9. Primeiro observamos que $z = a+ib$ é um número real se, e somente se, $\mathrm{Im}\,(z) = 0$, isto é, $b = 0$. Ora,

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a+ib = a-ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

10. Considerando $z = x+iy$, temos que $z^2 = x^2-y^2+2xyi$ e $\overline{z}^2 = x^2-y^2-2xyi$. Assim,

$$z^2 = \overline{z}^2 \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi = x^2-y^2-2xyi \Leftrightarrow 2xy = 0.$$

Ora, $2xy = 0$ se, e só se, $x = 0$ (neste caso, z é imaginário puro) ou $y = 0$ (neste caso, z é real).

11. Das propriedades algébricas em $\mathbb{C}$ e lembrando que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, temos:

$$\begin{aligned} |1-z|^2 + |1+z|^2 &= (1-z)\cdot(1-\overline{z}) + (1+z)\cdot(1+\overline{z}) \\ &= 1 - z - \overline{z} + z\cdot\overline{z} + 1 + z + \overline{z} + z\cdot\overline{z} = 2 + 2\,|z|^2. \end{aligned}$$

12. Considerando $n = 179$ e $z = i$, temos:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{179} = \frac{1-i^{180}}{1-i} = \frac{1-\left(i^2\right)^{90}}{1-i} = \frac{1-1}{1-i} = 0.$$

13. Se $z = a+ib$ e $w = c+id$, as igualdades $|z| = |w|$ e $\mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(w)$ nos conduz ao sistema:

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2 = a^2+b^2 \\ x = a \end{array}\right.$$

de onde deduzimos que $y = \pm b$. Logo, $z = a \pm ib$.

14. Utilizando os Produtos Notáveis (Lema 1.1.2), obtemos:

$$\begin{aligned} |z \pm w \cdot z|^2 &= |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z} \cdot \overline{zw}\right) + |zw|^2 = |z|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\left(|z|^2 \cdot \overline{w}\right) + |z|^2\,|w|^2 \\ &= |z|^2 \pm 2\,|z|^2\,\mathrm{Re}\left(\overline{w}\right) + |z|^2\,|w|^2 = |z|^2\left[1 \pm 2\,\mathrm{Re}\left(w\right) + |w|^2\right]. \end{aligned}$$

15. Um cálculo direto nos conduz a:

$$i^n + i^{-n} = \frac{i^{2n}+1}{i^n} = \frac{(-1)^n+1}{i^n} = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2/\left(-1\right)^k, & \text{se } n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Logo, os possíveis valores assumidos por $i^n + i^{-n}$ são: 0 e ± 2.

16. Sabemos do Exercício 10 da Seção 1.1 que w é real se, e somente se, $w = \overline{w}$. Temos:

$$\overline{w} = \frac{\overline{z} - i\overline{\overline{z}}}{\overline{\overline{z}} - i\overline{z}} = \frac{\overline{z} + iz}{z + i\overline{z}} = \frac{i\left(-i\overline{z} + z\right)}{i\left(-iz + \overline{z}\right)} = w.$$

17. Tendo em vista que $|\lambda| < 1$, então $|\lambda|^2\left(1 - |z|^2\right) \leq 1 - |z|^2$ e, sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned} |z+\lambda| &\leq \left|1 + \bar{\lambda}z\right| \Leftrightarrow |z+\lambda|^2 \leq \left|1+\bar{\lambda}z\right|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \leq 1 + |\lambda|^2\,|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |\lambda|^2\left(1 - |z|^2\right) \leq 1 - |z|^2. \end{aligned}$$

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} |z+\lambda| &= \left|1 + \bar{\lambda}z\right| \Leftrightarrow |z+\lambda|^2 = \left|1+\bar{\lambda}z\right|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} = 1 + |\lambda|^2\,|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |z|^2\left(1 - |\lambda|^2\right) \leq 1 - |\lambda|^2 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

18. Efetue a operação do lado direito para concluir.

19. Os possíveis valores de N são $4k,\ 4k+1,\ 4k+2$ e $4k+3\ \ k \in \mathbb{N}$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 0, 1, 2 ou 3. Use o Exercicio 1.3.4 da Seção 1.1 para concluir. Por exemplo, se o resto da divisão é 2, então $N = 4k+2$ e encontramos:

$$\begin{aligned} 1 + i + i^2 + \cdots + i^N &= \frac{1 - i^{N+1}}{1-i} = \frac{1 - i^{4k+2}}{1-i} = \frac{1 - \left(i^2\right)^{2k+1}}{1-i} \\ &= \frac{2}{1-i} = \frac{2\left(1+i\right)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)} = \frac{2\left(1+i\right)}{2} = 1 + i. \end{aligned}$$

20. Com a notação binomial, devemos mostrar que:

$$(1+z)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n-k+1}.$$

Admitindo a sentença válida pra $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned}(1+z)^{n+1} &= (1+z)(1+z)^n = (1+z)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k+1}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} z^{n-k+1} &= 1 + z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] z^{n-k+1} \\ &= \left[1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1} z^{n-k+1}\right] + \left[z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k+1}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} z^{n-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{n-k+1} = (1+z)^{n+1}.\end{aligned}$$

21. Admitindo a sentença válida para $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|.\end{aligned}$$

1.2 FORMA POLAR

1. Se $\theta_1 = \operatorname{Arg}(2+i)$ e $\theta_2 = \operatorname{Arg}(3+i)$, então $\theta_1 = \arctan(1/2)$ e $\theta_2 = \arctan(1/3)$ e teremos:

$$\arg[(2+i)\cdot(3+i)] = \theta_1 + \theta_2.$$

Por outro lado, $(2+i)\cdot(3+i) = 5+5i$ e, portanto,

$$\pi/4 = \arg[(2+i)\cdot(3+i)] = \theta_1 + \theta_2.$$

2. Se $\theta = \operatorname{Arg}(5-i)$, então $4\theta = \operatorname{Arg}(5-i)^4$ e $\arctan\theta = -1/5$ e teremos:

$$\arg\left[(5-i)^4 \cdot (1+i)\right] = 4\arctan(-1/5) + \pi/4.$$

Para concluir, use $(5-i)^4 \cdot (1+i) = 956 - 4i$ e, portanto:

$$\arg\left[(5-i)^4 \cdot (1+i)\right] = \arctan(-4/956) = -\arctan(1/239).$$

3. Temos

$$\operatorname{Arg}(2-2i) = -\pi/4 \quad \text{e} \quad \operatorname{Arg}\left(\sqrt{3}-i\right)^6 = 6\operatorname{Arg}\left(\sqrt{3}-i\right) = -\pi.$$

Logo, $\operatorname{Arg}(2-2i) + \operatorname{Arg}\left(\sqrt{3}-i\right)^6 = -5\pi/4$.

4. Expresse o número complexo sob a forma $z = re^{i\theta}$, para descobrir o argumento.

(a) 0 **(b)** $-\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$ **(d)** $-\pi/2$ **(e)** $5\pi/6$ **(f)** $-\pi$.

5. Veja a ilustração na Figura 1.8.

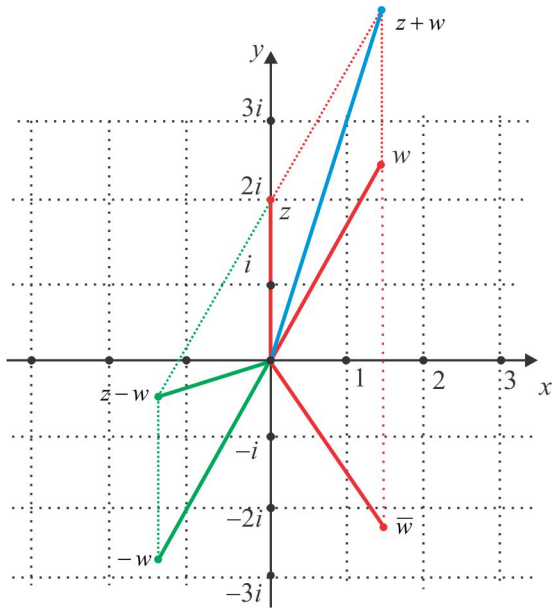


Figura 1.8:

6. Como ilustração faremos os ítens **(b)** e **(c)**.

(b) Se $\varphi = \operatorname{Arg}(2+i)$, então $2+i = \sqrt{5}e^{i\varphi}$ e, portanto:

$$\frac{5i}{2+i} = \sqrt{5}\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \sqrt{5}\operatorname{sen}\varphi + i\sqrt{5}\cos\varphi.$$

Como $\operatorname{tg}\varphi = 1/2$, segue que $\operatorname{sen}\varphi = 1/\sqrt{5}$ e $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ e obtemos o resultado.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} z &= -1+i=\sqrt{2}\ e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z^7=\left(\sqrt{2}\right)^7\ e^{\frac{21\pi}{4}i}=8\sqrt{2}\ e^{\left(6\pi-\frac{3\pi}{4}\right)i} \\ &= 8\sqrt{2}\ e^{-\frac{3\pi}{4}i}=8\sqrt{2}\left(\cos\left(3\pi/4\right)-i\operatorname{sen}\left(3\pi/4\right)\right)=-8\left(1+i\right). \end{aligned}$$

7. Considere na Fórmula de De Moivre $n=2$ e $n=3$ para chegar aos resultados.

(a) No caso $n=2$, temos:

$$\begin{aligned} \left(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\right)^2 &= \cos\left(2\theta\right)+i\operatorname{sen}\left(2\theta\right) \Leftrightarrow \cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta+2i\operatorname{sen}\theta\cos\theta=\cos\left(2\theta\right)+i\operatorname{sen}\left(2\theta\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(2\theta\right)=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\left(2\theta\right)=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

(b) No caso $n=3$, proceda de forma similar!

8. Considerando que $1\pm\sqrt{3}i=2e^{\pm i\pi/3}$, encontramos $z=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$.

9. **(a)** Na forma exponencial, temos $z=2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$ e $w=\sqrt{3}e^{-i\pi/3}$, de modo que:

$$z\cdot w=6e^{2k\pi i} \quad \text{e} \quad z/w=2e^{(2\pi/3+2k\pi)i}.$$

10. Temos que $z=2e^{-i3\pi/4}$ e substituindo na equação, encontramos:

$$\begin{aligned} z^4-\left(1+4i\right)z^2+4i &= 16\ e^{i3\pi}-\left(1+4i\right)\ 4e^{i3\pi/2}+4i \\ &= -16-\left(1+4i\right)\left(-4i\right)+4i=0. \end{aligned}$$

11. Se fizermos $z=re^{i\theta}$ e $w=z=\rho e^{i\varphi}$, teremos:

$$z\cdot\overline{w}=r\rho e^{i(\theta-\varphi)}=r\rho\left[\cos\left(\theta-\varphi\right)+i\operatorname{sen}\left(\theta-\varphi\right)\right]$$

e, consequentemente,

$$\operatorname{Re}\left(z\overline{w}\right)=r\rho\cos\left(\theta-\varphi\right)=\left|z\right|\left|w\right|\cos\left(\theta-\varphi\right).$$

Da última relação, resulta:

$$\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=\left|z\right|\left|w\right| \Leftrightarrow \cos\left(\theta-\varphi\right)=1 \Leftrightarrow \theta-\varphi=2k\pi.$$

Neste caso, temos:

$$\left|z+w\right|=\left|re^{i\theta}+\rho e^{i(\theta+2n\pi)}\right|=\left(r+\rho\right)=\left|z\right|+\left|w\right|.$$

12. Usando identidades trigonométricas, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} &= \frac{1-\tan^2\theta+2i\tan\theta}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta+2i\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= \cos(2\theta)+i\operatorname{sen}(2\theta)=e^{2i\theta}.\end{aligned}$$

1.3 POTÊNCIS & RAÍZES

1. Considerando $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$, temos:

$$z^3=\overline{z}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x^3-3xy^2=x\\ y^3-3x^2y=y\end{array}\right. \tag{1.21}$$

Considerando que o sistema do lado direito de (1.21) não tem solução (real), no caso em que $x\neq 0$ e $y\neq 0$, obtemos:

$$\left|\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=0 \quad \text{ou} \quad y=\pm 1\\ y=0\Rightarrow x=0 \quad \text{ou} \quad x=\pm 1.\end{array}\right.$$

Assim, as solções de $z^3=\overline{z}$ são: $z=0,\ z=\pm 1$ e $z=\pm i$.

2. Temos que

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^n=\left(2\ e^{-i\pi/3}\right)^n=2^n\left[\cos(n\pi/3)-i\operatorname{sen}(n\pi/3)\right]$$

e $\left(1-i\sqrt{3}\right)^n$ será um número real quando $\operatorname{sen}(n\pi/3)=0$, isto é, n for múltiplo inteiro de 3.

3. Recordemos que $w=z^{p/q}$ se, e somente se, $z^p=w^q$.

(a) $z^2=2i\Leftrightarrow z=\sqrt{2}\left[\cos\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\pm(1+i)$.

(b) $z^3=-i\Leftrightarrow z=\cos\left(\dfrac{2k\pi-\pi/2}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k\pi-\pi/2}{3}\right)\Leftrightarrow z=i \quad \text{ou} \quad z=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3}-i\right)$.

(c) $z^6=8\Leftrightarrow z=\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)+i\operatorname{sen}\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)\right]$, $\quad k=0,1,2,3,4,5$. Logo:

$$z=\pm\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right) \quad \text{ou} \quad z=\frac{1}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right).$$

(d) $z=\left(-\sqrt{3}+i\right)^{3/2}\Leftrightarrow z^2=\left(-\sqrt{3}+i\right)^3=\left(2e^{i5\pi/6}\right)^3=8e^{i\pi/2}$. As raízes são: $z=\pm 2(1+i)$.

(e) A equação $z=(-1)^{3/4}$ é equivalente a $z^4=-1$, cujas raízes são: $z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$.

4. Considerando que $w^n = 1$, por ser w uma raiz da unidade, e $w \neq 1$, obtemos

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0.$$

Para calclular o valor da soma $S = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \cdots + nw^{n-1}$, observamos que:

$$S - wS = 1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} - nw^n = -n$$

e daí resulta $S = \dfrac{-n}{1 - w}$.

5. Mostrar que $\sqrt{w} = \pm\xi$ é equivalente a mostar que $w = \xi^2$. Se fizermos

$$\xi = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| + \operatorname{Re}(w)\right)} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| - \operatorname{Re}(w)\right)}\,\right]$$

teremos

$$\begin{aligned}
\xi^2 &= \tfrac{1}{2}\left(|w| + \operatorname{Re}(w)\right) - \tfrac{1}{2}\left(|w| - \operatorname{Re}(w)\right) \pm i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w))\sqrt{|w|^2 - \operatorname{Re}(w)^2} \\
&= \operatorname{Re}(w) \pm i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w))\sqrt{\operatorname{Im}(w)^2} = \operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w) = w.
\end{aligned}$$

(a) Temos

$$z^2 + z + 1 = i \Leftrightarrow \left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\tfrac{3}{4} + i \Leftrightarrow z + \tfrac{1}{2} = \sqrt{w}, \quad w = -\tfrac{3}{4} + i.$$

Logo,

$$z + \tfrac{1}{2} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| + \operatorname{Re}(w)\right)} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| - \operatorname{Re}(w)\right)}\,\right] = \pm\left(\tfrac{1}{2} + i\right)$$

Assim, as raízes da equação $z^2 + z + 1 = i$ são precisamente $z = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$, isto é, $z = i$ ou $z = -1 - i$.

6. Os possíveis valores de N são $4k,\ 4k+1,\ 4k+2$ e $4k+3\ \ k \in \mathbb{N}$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 0, 1, 2 ou 3. Use o Exemplo 1.3.4 da Seção 1.1 para concluir. Por exemplo, se o resto da divisão é 2, então $N = 4k + 2$ e encontramos:

$$\begin{aligned}
1 + i + i^2 + \cdots + i^N &= \frac{1 - i^{N+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{4k+2}}{1 - i} = \frac{1 - \left(i^2\right)^{2k+1}}{1 - i} \\
&= \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i.
\end{aligned}$$

7. Como ilustração, faremos a parte (a). Usando a identidade

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1,$$

com $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $\theta \neq 0$, encontramos

$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \cdots + e^{in\theta} = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i \operatorname{sen}(n+1)\theta}{(1 - \cos\theta) - i \operatorname{sen}\theta},$$

de onde resulta:

$$\begin{aligned} 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(n+1)\theta \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\theta \cdot \operatorname{sen}(\theta/2)}{1 - \cos\theta}. \end{aligned}$$

onde usamos a identidade $\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right)$. Para concluir a parte (a), use a identidade $1 - \cos\theta = 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$. A identidade (b) é deduzida de forma similar, igualando as partes imaginárias.

8. No caso das equações biquadradas, podemos proceder como no Exemplo 1.3.10.

(a) Considerando $z = re^{i\theta}$ temos:

$$z^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{2}\right)\right], \quad k = 0,\ 1,$$

isto é, $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - i\right)$.

(b) As raízes são: $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$.

(c) Efetuando o completamento do quadrado, chegamos a:

$$\left(z^2 - \frac{1}{2} + i\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow z^2 = 1 - i \quad \text{ou} \quad z^2 = -i.$$

As raízes são, portanto: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt[4]{2}\left[\pm\cos(\pi/8) \mp \operatorname{sen}(\pi/8)\right]$.

(d) Considerando que $|-1 - i| = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4$, temos:

$$z^7 = -1 - i \Leftrightarrow z^7 = \sqrt{2}\, e^{-i3\pi/4}$$

e as raízes são dadas por:

$$z_k = 2^{1/14}\left[\cos\left(\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{7}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{7}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 6.$$

(e) Temos que $\overline{z}^3 = -i$ se, e somente se, $z^3 = i$ e as raízes desta última equação são:

$$z_k = \left[\cos\left(\pi/6 + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi/6 + 2k\pi\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

(f) A equação é equivalente a $\left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + i\right) = 0$ e as 4 raízes são: $z = \pm 1$ ou $z = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$.

9. As n raízes complexas de $z = re^{i\theta}$ são

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

e como $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, segue que as n raízes z_k estão igualmente espaçadas ao longo da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Ressaltamos que $\arg(z_k) - \arg(z_{k-1}) = 2\pi/n$ e o comprimento do arco entre essas raízes é $s = 2\pi\sqrt[n]{r}/n$.

10. Temos que $a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$ e efetuando diretamente o cálculo, chegamos a:

$$\begin{aligned} 0 &= a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= a_3\left[z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3\right] = 0. \end{aligned}$$

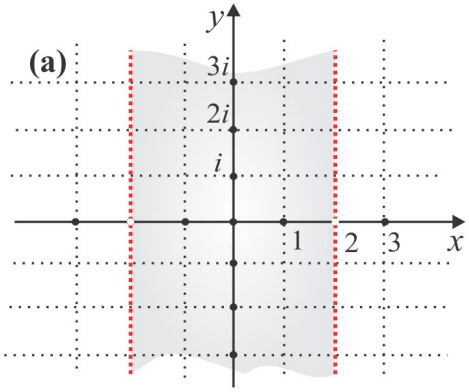
Daí resulta que:

$$-a_3(z_1 + z_2 + z_3) = a_2 \quad \text{e} \quad -a_3(z_1z_2z_3) = a_0.$$

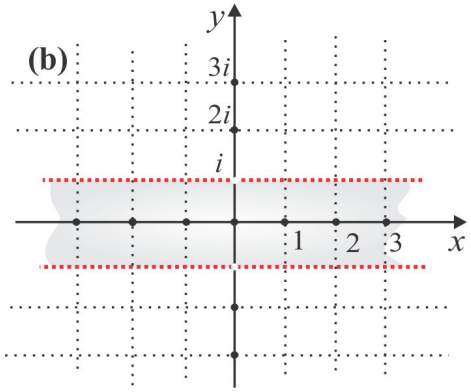
11. $z^4 + 9 = \left(z^2 + \sqrt{6}z + 3\right) \cdot \left(z^2 - \sqrt{6}z + 3\right)$.

1.4. TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

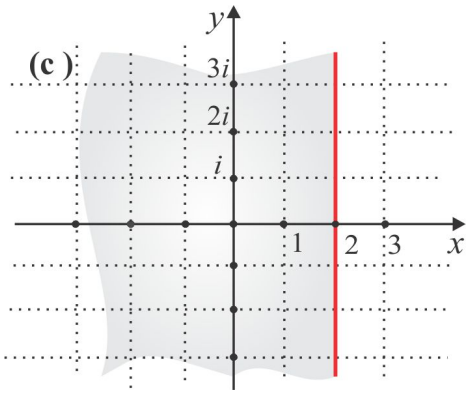
1. Podemos olhar a descrição do conjunto em coordenadas cartesiana, considerando $z = x + iy$.



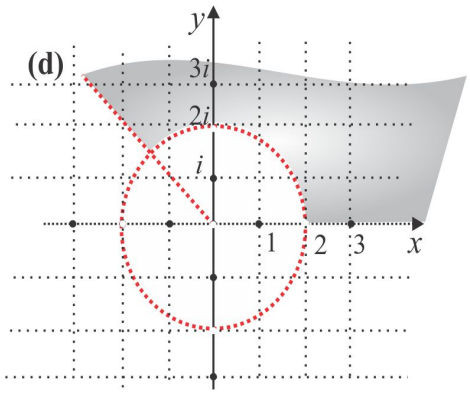
$|\mathrm{Re}(z)| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2$ (A)



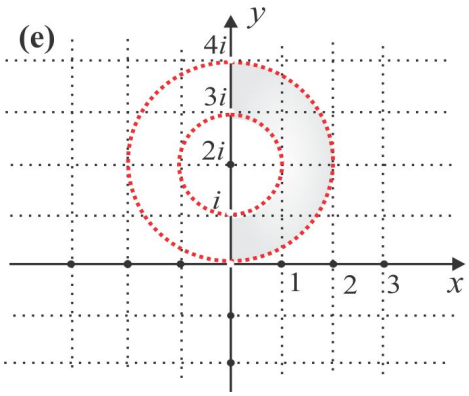
$|\mathrm{Im}(z)| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1$ (A)



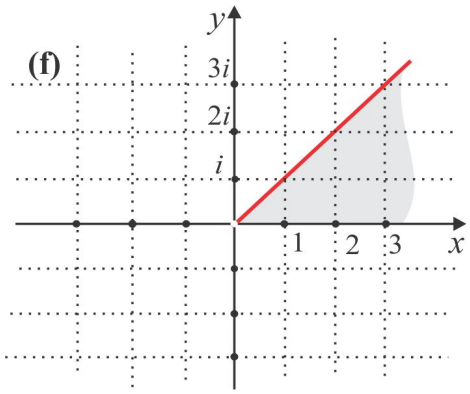
$|z-4| \leq \overline{z} \Leftrightarrow |x| \leq 2$ (F)



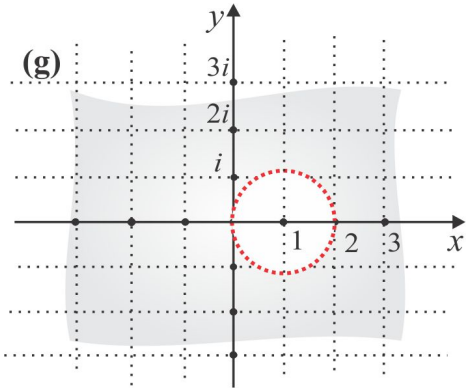
$0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2$ (A)



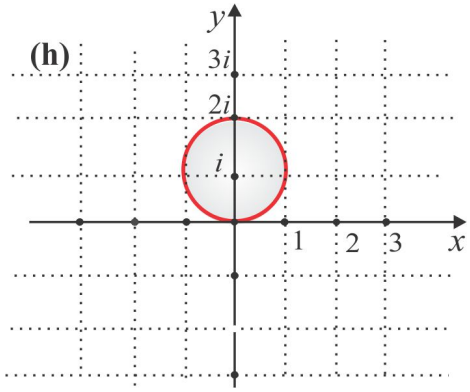
$\mathrm{Re}(z) > 0, \quad 1 < |z-2i| < 2$ (A)



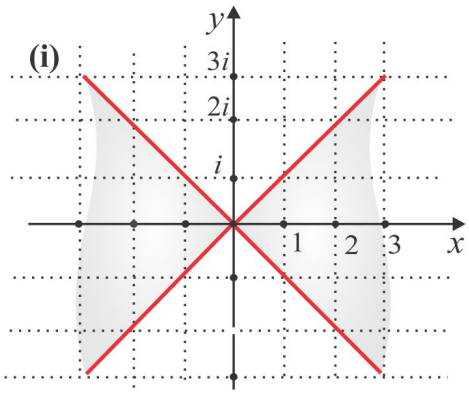
$0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, \; z \neq 0$



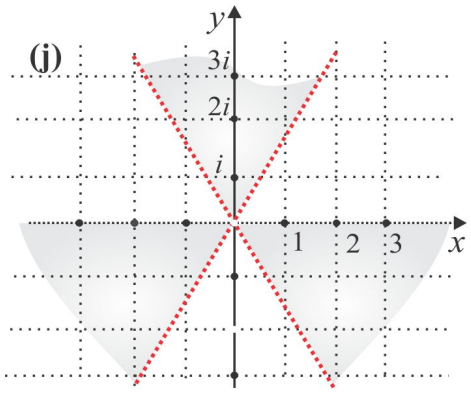
$|z-1| < 1$ (A)



$|z-i| \leq 1$ (F)



$\mathrm{Re}\left(z^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$ (F)



$\mathrm{Im}\left(z^3\right) < 0 \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 < 0$ (A)

2. Em alguns casos, podemos considerar $z = x + iy$ e olhar a equação na forma cartesiana.

   (a) $|z-2| = |z-3i| \Leftrightarrow 4x - 6y + 5 = 0.$ (Reta)

   (b) $|z-1+i| = |3+i-z| \Leftrightarrow 4x + 4y + 5 = 0.$ (Reta)

   (c) $|z-i| + |z+2| = 3.$ (Elipse com Focos: $z_1 = i$ e $z_2 = -2$)

   (d) $|z+1| = 2\,|z-i|\,.$ (Circunferência de centro $z_0 = 1+2i$ e raio $R = \sqrt{7}$)

   (e) $\mathrm{Re}\,(1-z) = |z| \Leftrightarrow 1 - 2x = y^2.$ (Parábola com Foco: $z_0 = -i/2$)

   (f) $z = z_0 + re^{i\theta} \Leftrightarrow |z - z_0| = r.$ (Circunferência de centro z_0 e raio r)

3. Se $z = x + iy$, a equação se reduz a:

$$\left(\lambda^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2\right) + 2x = 1.$$

   - Se $\lambda = 0$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1$.
   - Se $\lambda = 1$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1/2$.
   - Se $\lambda = -1$, o conjunto é vazio.
   - Nos demais casos, o conjunto é a circunferência

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 + a^2, \quad a = \left(\lambda^2 - 1\right)^{-1}.$$

4. Considerando $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e passando a equação $|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$ para coordenadas cartesianas, encontramos

$$(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2,$$

   que representa uma circunferência de centro z_0 e raio R.

5. O plano $\mathbb{C}$ é o complementar do conjunto vazio. Considerando que o plano $\mathbb{C}$ é, ao mesmo tempo, um conjunto aberto e também fechado, deduzimos que o conjunto vazio $\varnothing$ é aberto e fechado!

6. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos do plano $\mathbb{C}$ e sejam $A = S_1 \cap S_2$ e $B = S_1 \cup S_2$.

   (i) Se S_1 e S_2 são abertos, entãoA e B são abertos. De fato, dado z_0 em A, então $z_0 \in S_1 \cap S_2$ e, portanto, existem δ_1 e δ_2 posiitivos, tais que

   $$V_{\delta_1}(z_0) \subset S_1 \quad \text{e} \quad V_{\delta_2}(z_0) \subset S_2.$$

   Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos $V_\delta(z_0) \subset S_1 \cap S_2$, isto é, $V_\delta(z_0) \subset A$. Por outro lado, dado z_1 em B, então $z_1 \in S_1$ ou $z_1 \in S_2$ e, portanto, $V_\delta(z_0) \subset B$.

   (ii) Se S_1 e S_2 são fechados, então A e B são fechados. Passando aos complementares, temos:

   $$\begin{aligned} \mathbb{C}\backslash A &= \mathbb{C}\backslash(S_1 \cap S_2) = (\mathbb{C}\backslash S_1) \cup (\mathbb{C}\backslash S_2) \quad \text{é aberto (união de dois abertos)} \\ \mathbb{C}\backslash B &= \mathbb{C}\backslash(S_1 \cup S_2) = (\mathbb{C}\backslash S_1) \cap (\mathbb{C}\backslash S_2) \quad \text{é aberto (interseção de dois abertos)} \end{aligned}$$

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos (discos) abertos $A_n = \{z \in \mathbb{R} : |z| < 1/n\}$. Não é difícil deduzir que

   $$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

   não é um conjunto aberto.

8. Consequência da definição de limite e do fato: $|z_n| \leq |\mathrm{Re}(z_n)| + |\mathrm{Im}(z_n)| \leq 2|z_n|$.

9. Do exercício 9, segue que $\lim z_n = \lim \mathrm{Re}(z_n) + i \lim \mathrm{Im}\, z_n$. Assim, temos:

   (a) $\lim \left(1 + \dfrac{in}{n+1}\right) = 1 + i \cdot \lim \dfrac{n}{n+1} = 1 + i.$

   (b) $\lim \left(\dfrac{1 + i \ln n}{n}\right) = \lim \dfrac{1}{n} + i \cdot \lim \dfrac{\ln n}{n} = 0.$

10. Seja $z_n = x_n + iy_n$. Temos que

    $$z_n \to 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_n \to 0 \quad \text{e} \\ y_n \to 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow |z_n| = \left(x_n^2 + y_n^2\right)^{1/2} \to 0.$$

11. Se $z = 0$, o resultado é óbvio. Suponhamos que $z \neq 0$ e seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos:

$$|z|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln |z| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|}. \tag{1.22}$$

Se N é o primeiro inteiro maior do que $\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln |z|}$, segue de (1.22) que:

$$|z^n - 0| = |z|^n < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

2. Funções Analíticas

2.1 Exemplos de Funções Complexas

Como no caso de variável real, o conceito de *função complexa de uma variável complexa* é uma regra f que associa a cada número complexo z, de um subconjunto $D \subset \mathbb{C}$, um único complexo $w = f(z)$. Em símbolos, escrevemos

$$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto w = f(z).$$

Neste caso, $D = D(f)$ é denominado *domínio* da função f e $w = f(z)$ é a *imagem* do número complexo z pela função f. A Figura 2.1 ilustra o conceito de função de uma variável complexa.

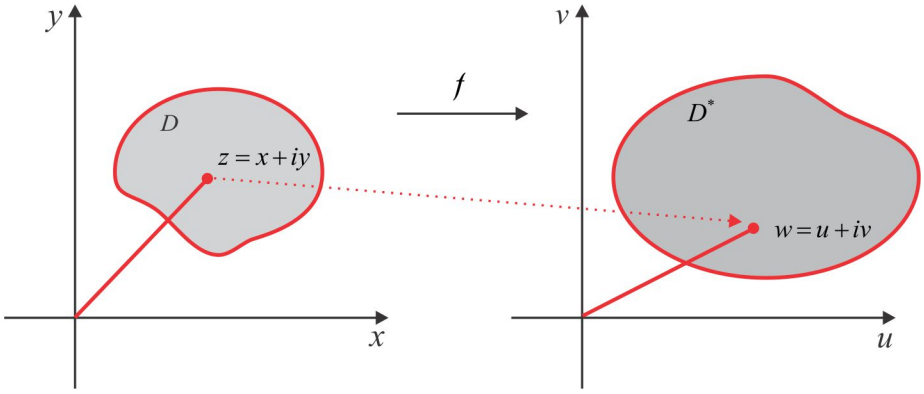


Figura 2.1: Função Complexa $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Cada função $f : D(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é determinada por um par de funções reais de duas variáveis $u(x, y)$ e $v(x, y)$, definidas por

$$u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z)) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z)), \quad z = x + iy \in D.$$

EXEMPLO 2.1.1 *Não havendo restrições para o cálculo de z^2, como número complexo, a função f definida pela regra $f(z) = z^2$ tem para domínio todo o plano complexo $\mathbb{C}$. Neste caso, temos:*

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad u(x, y) = x^2 - y^2 \quad e \quad v(x, y) = 2xy.$$

EXEMPLO 2.1.2 *O domínio da função* $f(z) = 1/z$ *é o subconjunto* $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ *e, neste caso, temos:*

$$u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad e \quad v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z)) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

EXEMPLO 2.1.3 *O domínio da função* $f(z) = |z|^2$ *é todo o plano complexo. A parte real e a parte imaginária de* $f(z)$ *são, neste caso*:

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \quad e \quad v \equiv 0.$$

EXEMPLO 2.1.4 *A função* $g(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}dt + i\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\right)$ *tem para domínio o conjunto*

$$D(g) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0 \ e \ |\mathrm{Im}(z)| < 1\},$$

no qual a integral imprópria e a série numérica são convergentes.

EXEMPLO 2.1.5 *O domínio da função racional* $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, *onde* $P(z)$ *e* $Q(z)$ *são polinômios complexos, é o conjunto* $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

EXEMPLO 2.1.6 *O domínio da função* $g(z) = \sqrt{x^2+y^2} - iy$ *é o plano* $\mathbb{C}$ *e ela transforma circunferências em segmentos de reta. De fato, se* $\gamma_R : |z| = R$ *é a circunferência de centro na origem e raio* $R > 0$, *temos que*

$$z = x + iy \in \gamma_R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad e \quad |y| \leq R$$

e, portanto, a imagem $g(z) = u + iv$ *é tal que* $u = \sqrt{x^2+y^2} = R$ *e* $|v| = |y| \leq R$. *Assim,* $g(\gamma_R)$ *é o segmento de reta* $L_R = \{u + iv \in \mathbb{C} : u = R \ e \ |v| \leq R\}$.

EXEMPLO 2.1.7 *Para identificar a imagem do disco* $D : |z| < \sqrt{2}$ *pela função* $w = z^2$, *notamos que um ponto do disco* D *é da forma* $z = re^{i\theta}$, *com* $0 \leq r < \sqrt{2}$ *e* $0 < \theta \leq 2\pi$, *e sendo* $w = z^2$, *segue que* $\mathrm{Arg}(w) = 2\theta$ *e* $|w| = r^2 < 2$. *Assim, a imagem de* D *é o disco* $D^* : |w| < 2$, *como ilustra a Figura 2.2. A imagem pode ser identificada, também, usando coordenadas cartesianas. Se* $z = x + iy$, *então o disco* D *é descrito por* $x^2 + y^2 < 2$ *e designando* $w = u + iv$, *temos*

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{array} \right.$$

e, portanto, $|w| = u^2 + v^2 = \left(x^2+y^2\right)^2 < 4$. *Vemos, então, que a imagem é o disco aberto* $u^2 + v^2 < 4$, *do plano* uv, *de centro na origem e raio* 2.

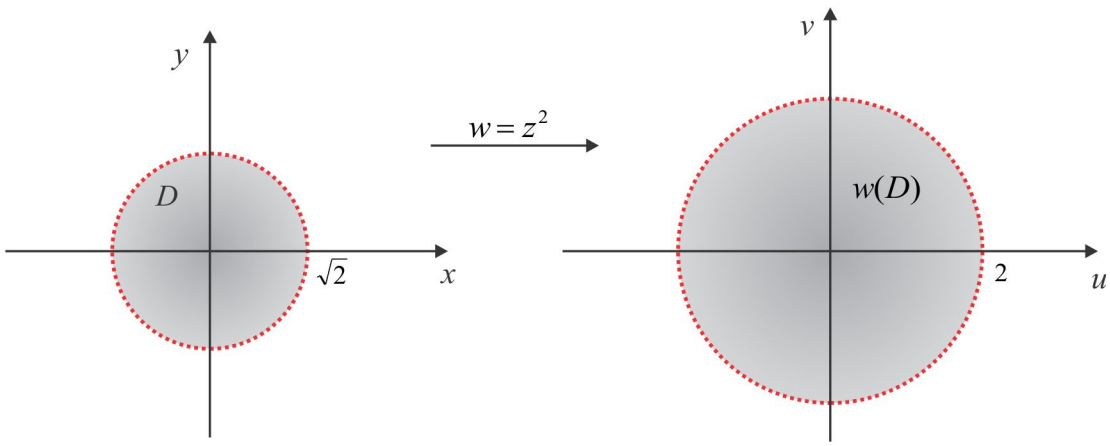


Figura 2.2: Função Complexa $w = z^2$.

EXEMPLO 2.1.8 *Vejamos a imagem do conjunto* $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$ *pela função* $w = 1/z$. *Fazendo* $z = re^{i\theta}$, $0 < r \leq 1$ *e* $-\pi < \theta \leq \pi$, *temos que*

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, \ -\pi \leq \theta < \pi, \quad e \quad |w| = \frac{1}{r} \geq 1$$

e vemos que a imagem $w(S)$ *é o exterior do disco de raio 1 e centro na origem. Veja a ilustração gráfica na Figura 2.3.*

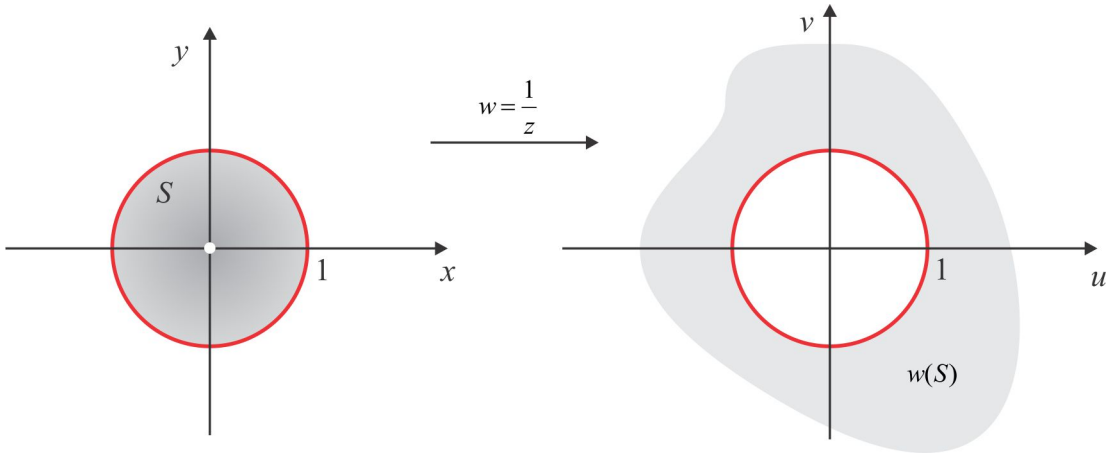


Figura 2.3: Função Complexa $w = 1/z$.

EXEMPLO 2.1.9 *A imagem do conjunto* $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi/4\}$ *pela função* $w = \bar{z}$ *é o*

conjunto $w(S) = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/4 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq 0\}$. *Isto decorre do fato que* $\operatorname{Arg}(\bar{z}) = -\operatorname{Arg}(z)$. *Veja a ilustração ne Figura 2.4.*

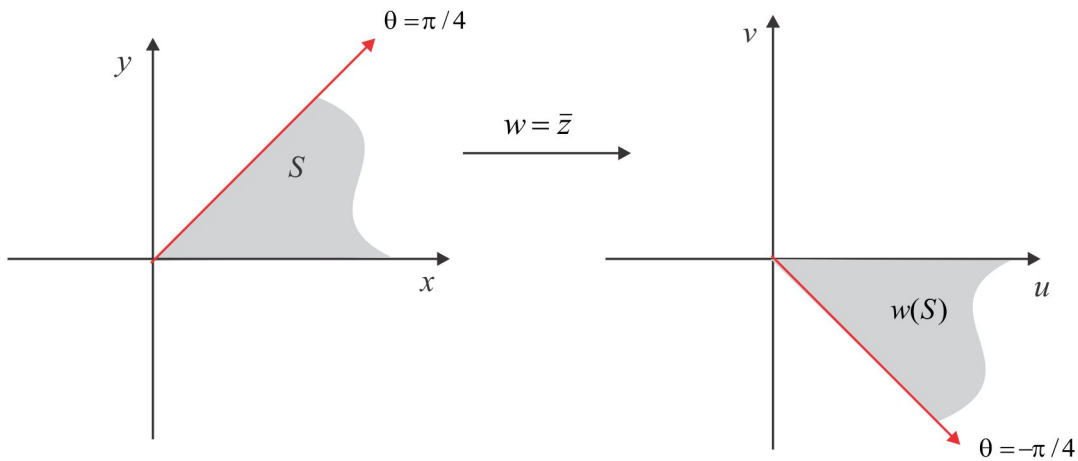


Figura 2.4: Função Complexa $w = \bar{z}$.

EXEMPLO 2.1.10 *Na Figura 2.5 ilustramos a imagem do disco* $S : |z-1| < 1$ *e da imagem* $w(S)$ *pela função* $w = 1/z$.

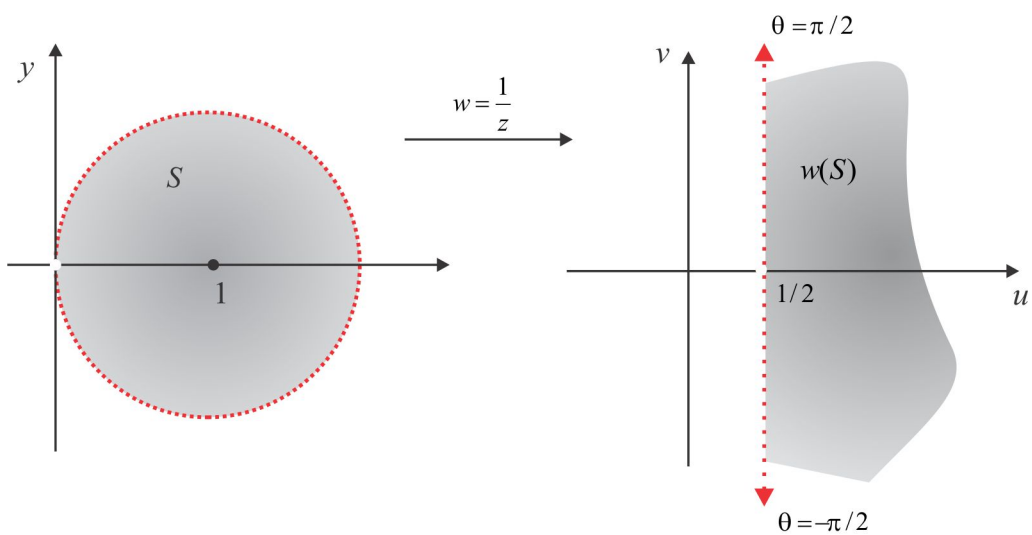


Figura 2.5: Imagem de $|z-1| < 1$ pela função $w = 1/z$.

Um ponto $z = re^{i\theta}$ *do disco* D *é tal que* $0 < r < 2\cos\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, *de modo que a imagem* $w = (1/r)\, e^{-i\theta}$ *é descrita por:* $-\pi/2 < \operatorname{Arg}(w) < \pi/2$ *e* $|w| = 1/r$. *Considerando que* $1/r =$

$1/(2\cos\theta) > 1/2$, *temos:*

$$w(S) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/2 \ \ e \ \ |w| > 1/2\} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > 1/2\}$$

Em coordenadas cartesianas, o disco S é descrito por $x^2+y^2 < 2x$ e se designarmos $w = u+iv$, teremos

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}$$

de onde resulta que

$$u(x,y) > \frac{1}{2} \quad e \quad \lim_{x\to 0} v(x, \pm x) = \mp\infty.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 2.1)**

1. Calcule o valor de $f(z) = 3z^2 + z$ em $z = 2+i$ e $z = 3i$.

2. Se $z = x+iy$, como se expressa a função $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$ em termos de z?

3. Considerando $z = x+iy$, determine o domínio máximo das seguintes funções:

   (a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\operatorname{sen} y}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z^2+(z-i)^3}{(e^{iy}-1)\cos y}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{i}{1-y}$.

4. Determine a parte real e a parte imaginária de $w = f(z)$.

   (a) $w = 2z^2 - 3z$ **(b)** $w = |z| + z\operatorname{Re}(z)$ **(c)** $w = \dfrac{1}{1-z}$ **(d)** $w = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{z^2-i}$.

5. Em cada caso, esboce o domínio D da função $w = f(z)$.

   (a) $w = z^2+1$; $D : |z| \le 2$ **(b)** $w = 3z$; $D : |\arg(z)| < \pi/2$ **(c)** $w = z^2$; $D : |z| > 3$
   (d) $w = \dfrac{1}{z}$; $D : \operatorname{Re}(z) \ge 1$ **(e)** $w = \dfrac{1}{z^2}$; $D : |z| > 1$ **(f)** $w = |z| - \dfrac{iy^2}{\operatorname{Im}(z)}$; $D : \operatorname{Im}(z) > 1$.

6. Em cada caso, identifique a imagem do conjunto S pela função $w = f(z)$.

   (a) $w = 3z$; $S : |\arg(z)| < \pi/2$ **(b)** $w = z^2$; $S : |z| > 3$
   (c) $w = \dfrac{1}{z^2}$; $S : |z| > 1$ e $|\arg z| \le \pi/4$ **(d)** $w = \dfrac{1}{z}$; $S : \operatorname{Re}(z) > 0$.

7. Qual a imagem da faixa horizontal $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ pela função $w(x+iy) = e^x \cdot e^{iy}$? Se $\mathcal{R}$ é o retângulo

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$$

qual a imagem $w(\mathcal{R})$?

8. Se $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1,\ 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\}$, qual a imagem de S pela função $w = z + 1/z$?

2.2 Limite e Continuidade

Vamos considerar a função complexa $f(z) = \overline{z}$ definida em todo o plano complexo. Quando z se aproxima do número complexo $z_0 = 2 - 3i$, indicamos isto escrevendo $z \to (2-3i)$, é fácil observar que os números complexos $f(z)$ se aproximam do número $w = 2 + 3i$. Em símbolos excrevemos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w \quad \text{ou} \quad \lim_{z \to 2-3i} (\overline{z}) = 2 + 3i.$$

CONCEITO DE LIMITE Seja $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa e fixemos z_0 um ponto de acumulação de D. Anotamos $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, para indicar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad z \in D \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

É oportuno ressaltar que esse δ, que em princípio depende de ε e de z_0, não é único; uma vez encontrado um tal δ, qualquer outro menor do que ele também atenderá à definição de limite.

Em termos de vizinhanças, escrever $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ significa que a cada raio $\varepsilon > 0$ dado, existe, em correspondência um raio $\delta > 0$, tal que:

$$f(z) \in V_\varepsilon(w_0), \quad \text{sempre que} \quad z \in D \cap V_\delta(z_0), \quad z \neq z_0. \tag{2.1}$$

É claro que a sentença (2.1) é equivalente a $f[D \cap (V_\delta(z_0) - \{z_0\})] \subset V_\varepsilon(w_0)$ e que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{|z - z_0| \to 0} |f(z) - w_0| = 0. \tag{2.2}$$

EXEMPLO 2.2.1 *Como primeira ilustração, vamos encontrar um raio $\delta > 0$, tal que:*

$$\left|z^2 + 1\right| < 0.03, \quad \textit{sempre que} \quad |z - i| < \delta.$$

SOLUÇÃO Temos que:

$$\left|z^2+1\right| < 0.03 \Leftrightarrow |z+i|\,|z-i| < 0.03 \tag{2.3}$$

e como o δ procurado deve ser tal que $|z-i| < \delta$, sendo essa a única informação que temos, o termo $|z+i|$ que figura em (2.3) deve ser substituido por uma constante. Temos

$$|z+i| = |z-i+2i| \leq |z-i| + |2i| = |z-i| + 2$$

e se supusermos $\delta < 1$, teremos $|z+i| < 3$, sempre que $|z-i| < \delta$. Assim,

$$\left|z^2+1\right| = |z-i|\,|z+i| < 3\,|z-i| < 3\delta, \quad \text{sempre que} \quad |z-i| < \delta,$$

e para chegarmos a $\left|z^2+1\right| < 0.03$, basta escolher δ de modo que $3\delta = 0.03$, isto é, $\delta = 0.01$.

EXEMPLO 2.2.2 *Ainda para ilustrar o conceito, provemos que* $\lim\limits_{z\to i}(z+2i) = 3i$.

SOLUÇÃO Neste caso, $f(z) = z+2i$, $z_0 = i$ e $w_0 = 3i$ e dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z-i| < \delta \Rightarrow |f(z) - 3i| < \varepsilon.$$

Ora,

$$|f(z) - 3i| = |z+2i-3i| = |z-i|$$

se $|z-i| < \delta$, então $|f(z) - 3i| < \delta$ e para chegarmos a $|f(z) - 3i| < \varepsilon$, basta escolher $\delta = \varepsilon$.

EXEMPLO 2.2.3 *Mostremos que* $\lim\limits_{z\to 2i}(2x+iy^2) = 4i$, *sendo* $z = x+iy$. *De fato, se considerarmos na definição de limite* $f(z) = 2x+iy^2$, $z_0 = 2i$ *e* $w_0 = 4i$, *teremos:*

$$|f(z) - w_0| = \left|2x+iy^2-4i\right| \leq 2\,|x| + |i|\,\left|y^2-4\right| = 2\,|x| + |y+2|\,|y-2|\,,$$

e, considerando que, $|z-2i| < \delta \Leftrightarrow |x+i(y-2)| < \delta$, *resulta:*

$$|y-2| \leq |x+i(y-2)| < \delta \quad e \quad |x| \leq |x+i(y-2)| < \delta.$$

Se escolhermos $\delta < 1$, *teremos* $|y+2| \leq |y-2+4| < |y-2| + 4 < 5$ *e, portanto,*

$$|f(z) - w_0| \ < 2\delta + 5\delta = 7\delta, \quad com \quad \delta < \min\{1, \varepsilon/7\}.$$

OBSERVAÇÃO 2.2.4 *Decorre da definição de limite que:*

(a) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z) - w_0| = 0.$

(b) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Rightarrow \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$. *De fato, basta notar que* $||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$.

(b) *Se* $f(z)$ *é limitada*[4] *em uma vizinhança de* z_0 *e* $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0$, *então* $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)\, g(z)] = 0$, *mesmo que* $f(z)$ *não tenha limite no ponto* z_0. *De fato, basta notar que nessa vizinhança tem-se:*

$$|f(z) \cdot g(z)| \leq C\,|g(z)| \to 0, \quad \textit{com} \quad z \to z_0.$$

2.2.1 Lemas Técnicos e Propriedades do Limite

Dada uma função complexa $w = f(z)$, $z \in D$, deixe z_0 ser um ponto de acumulação do conjunto D. Se em (1.9) usarmos $f(z) - w_0$ no lugar do z, teremos:

$$|f(z) - w_0| \leq |\mathrm{Re}\,(f(z) - w_0)| + |\mathrm{Im}\,(f(z) - w_0)| \leq \sqrt{2}\,|f(z) - w_0| \tag{2.4}$$

e de (2.4) resulta:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{z\to z_0} [\mathrm{Re}\,(f(z))] = \mathrm{Re}\,(w_0) \quad \text{e} \\ \lim\limits_{z\to z_0} [\mathrm{Im}\,(f(z))] = \mathrm{Im}\,(w_0)\,. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Como consequência temos o seguinte resultado:

LEMA 2.2.5 (Redução ao Caso Real) *No caso em que* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *e considerando* $z_0 = x_0 + iy_0$ *e* $w_0 = u_0 + iv_0$, *então:*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad e \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0. \end{array} \right. \qquad \blacksquare$$

LEMA 2.2.6 (Unicidade do Limite) *Se* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_1$ *e* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_2$, *então* $w_1 = w_2$.

PROVA Seja $\varepsilon > 0$ dado e suponhamos que $|f(z) - w_j| < \varepsilon$, $j = 1, 2$, com z em uma vizinhança de z_0. Em tal vizinhança, temos:

$$|w_1 - w_2| = |f(z) - w_2 - (f(z) - w_1)| \leq |f(z) - w_2| + |f(z) - w_1| < 2\varepsilon$$

e, fazendo $\varepsilon \to 0$, resulta $|w_1 - w_2| \leq 0$, isto é, $w_1 = w_2$. $\blacksquare$

[4] $f(z)$ é limitada em D quando existir uma constante C, tal que $|f(z)| \leq C$, $\forall\, z \in D$.

LEMA 2.2.7 (Limitação Local) *Se* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$, *então existem uma constante positiva* C *e um raio* $\delta > 0$, *tais que*

$$|f(z)| \leq C, \quad \forall\, z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \tag{2.6}$$

Além disso, se $w \neq 0$ *podemos escolher a constante* C *e o raio* δ, *de modo que*

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq C, \quad \forall\, z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \tag{2.7}$$

PROVA Considerando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, encontramos um raio $\delta_1 > 0$, tal que

$$|f(z) - w| \leq 1, \quad \forall\, z \in D(f) \cap V_{\delta_1}(z_0)$$

e daí resulta que

$$|f(z)| \leq |f(z) - w| + |w| \leq 1 + |w|, \quad \forall\, z \in D(f) \cap V_\delta(z_0).$$

Por outro lado, supondo $w \neq 0$ e considerando $\varepsilon = |w|/2$, encontramos um raio $\delta_2 > 0$, tal que

$$|f(z) - w| \leq \frac{|w|}{2}, \quad \forall\, z \in D(f) \cap V_{\delta_2}(z_0).$$

e, portanto, se $z \in D(f) \cap V_{\delta_2}(z_0)$, então:

$$|w| - |f(z)| \leq |f(z) - w| \leq \frac{|w|}{2} \Rightarrow |f(z)| \geq \frac{|w|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{2}{|w|}.$$

Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $C = \max\{C_1, C_2\}$, onde $C_1 = 1 + |w|$ e $C_2 = 2/|w|$, teremos:

$$|f(z)| \leq C \quad \text{e} \quad \frac{1}{|f(z)|} \leq C, \quad \forall\, z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.2.8 (Propriedades Algébricas) *Sejam* $f, g : D \to \mathbb{C}$ *duas funções complexas e seja* z_0 *um ponto de acumulação de* D. *Se* $w_1 = \lim_{z \to z_0} f(z)$ *e* $w_2 = \lim_{z \to z_0} g(z)$ *então:*

(a) $\lim_{z \to z_0} [f(z) + \lambda g(z)] = w_1 + \lambda w_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$ **(Linearidade)**

(b) $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_1 \cdot w_2.$ **(Produto)**

(c) $\lim_{z \to z_0} \left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{w_1}{w_2}; \quad w_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad g(z) \neq 0,\ z \in D.$ **(Quociente)**

(d) $\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n; \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Se $z_0 \neq 0$, então a propriedade vale $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. **(Potência)**

(e) Se $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios e $Q(z_0) \neq 0$, então $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{P(z)}{Q(z)} = \dfrac{P(z_0)}{Q(z_0)}$. **(Função Racional)**

DEMONSTRAÇÃO As demonstrações são semelhantes ao caso real, de modo que as apresentaremos de forma breve, deixando alguns detalhes a cargo do leitor, que deverá fazê-los. Nas conclusões usaremos a equivalência (2.2).

(a) Temos

$$0 \leq |f(z) + \lambda g(z) - w_1 - \lambda w_2| \leq |f(z) - w_1| + |\lambda| \, |g(z) - w_2| \to 0, \quad \text{com } z \to z_0.$$

(b) Inicialmente, observamos que:

$$|f(z)| \leq |f(z) - w_1 + w_1| \leq |f(z) - w_1| + |w_1| \leq 1 + |w_1|,$$

com z variando em certa vizinhaça de z_0, de modo que:

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| &= |f(z)(g(z) - w_2) + f(z)w_2 - w_1 w_2| \\ &\leq |f(z)| \, |g(z) - w_2| + |w_2| \, |f(z) - w_1| \\ &\leq (1 + |w_1|) \, |g(z) - w_2| + |w_2| \, |f(z) - w_1| \longrightarrow 0, \quad \text{com } z \to z_0. \end{aligned}$$

(c) Usando as limitações locais de $f(z)$ e de $1/g(z)$ determinadas no Lema 2.2.7, deduzimos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{w_1}{w_2} \right| &= \left| \frac{f(z)w_2 - w_1 g(z)}{w_2 g(z)} \right| = \left| \frac{f(z)(w_2 - g(z)) - (w_1 - f(z)) g(z)}{|w_2| \, |g(z)|} \right| \\ &\leq \underbrace{\left(\frac{|f(z)|}{|w_2| \, |g(z)|} \right)}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{|w_2 - g(z)|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{|w_2|} \right)}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{|w_1 - f(z)|}_{\downarrow 0} \longrightarrow 0, \quad \text{com } z \to z_0. \end{aligned}$$

(d) Basta observar que $\lim\limits_{z \to z_0} z = z_0$ e usar a propriedade do produto.

(e) Consequência das propriedades anteriores. ■

EXEMPLO 2.2.9 *Das propriedades algébricas, resulta que* $\lim\limits_{z \to -2i} (z - 3 + 2i) = -3$.

EXEMPLO 2.2.10 *Usando fatoração polinomial, calcular* $\lim\limits_{z \to 3-2i} \dfrac{z^2 - 6z + 13}{z - 3 + 2i}$.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que a propriedade algébrica (c) não pode ser aplicada. Porém, usando a fatoração$z^2 - 6z + 13 = (z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i)$, obtemos:

$$\lim_{z\to 3-2i} \frac{z^2 - 6z + 13}{z - 3 + 2i} = \lim_{z\to 3-2i} \frac{(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i)}{z - 3 + 2i} = \lim_{z\to 3-2i} (z - 3 - 2i) = -4i.$$

EXEMPLO 2.2.11 *Com argumento análogo ao Exemplo (2.2.10), vamos calcular* $\lim\limits_{z\to -2i} \dfrac{z^3 - 8i}{z + 2i}$.

SOLUÇÃO Considerando a fatoração $z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2zi - 4)$, obtemos:

$$\lim_{z\to -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z^2 - 2zi - 4)(z + 2i)}{z + 2i} = \lim_{z\to -2i} (z^2 - 2zi - 4) = -12.$$

LEMA 2.2.12 (Da Função Composta) *Sejam $f : D \to \mathbb{C}$ e $g : D^* \to \mathbb{C}$ duas funções complexas, com $f(D) \subset D^*$, e suponhamos que z_0 e w_0 sejam pontos de acumulação de D e D^*, respectivamente, e que*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad e \quad \lim_{w\to w_0} g(w) = \xi_0.$$

Então, $\lim\limits_{z\to z_0} g[f(z)] = \xi_0$.

PROVA Dado $\varepsilon > 0$, existem δ e δ^* positivos, tais que:

$$|f(z) - w_0| < \delta^*, \quad \forall\, z \in D \cap V_\delta(z_0), \quad \text{com } z \neq z_0.$$
$$|g(w) - \xi_0| < \varepsilon, \quad \forall\, w \in D^* \cap V_{\delta^*}(w_0), \quad \text{com } w \neq w_0.$$

Ora, se $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ e $z \neq z_0$, então $w = f(z) \in D^* \cap V_{\delta^*}(w_0)$ e, consequentemente,

$$|g(f(z)) - \xi_0| < \varepsilon, \quad \forall\, z \in D \cap V_\delta(z_0), \quad \text{com } z \neq z_0. \qquad \blacksquare$$

2.2.2 Continuidade

Vimos que o limite de uma função $f(z)$ em um ponto z_0 pode existir, sem que a função f esteja definida no ponto z_0. No conceito de limite exige-se apenas que z_0 seja um ponto de acumulação do domínio da função $f(z)$. A seguir, apresentaremos uma classe importante de funções complexas: a classe C^0 das *Funções Contínuas*. Uma função desta classe tem limite em qualquer ponto z_0 de seu domínio e o valor do limite é $f(z_0)$. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.2.13 *Uma função $f : D \to \mathbb{C}$ é contínua no ponto z_0, se:*

(i) *A função f está definida no ponto z_0, isto é, $z_0 \in D$.*

(ii) *A função f tem limite finito no ponto z_0.*

(iii) *O valor do limite de f em z_0 é igual a $f(z_0)$.*

EXEMPLO 2.2.14 *A função $f(z) = |z|$ é contínua em qualquer $z \in \mathbb{C}$. De fato:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} |z| = |z_0| = f(z_0).$$

EXEMPLO 2.2.15 *As funções $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ e $g(z) = \mathrm{Im}(z)$ são contínuas em todo plano $\mathbb{C}$. De fato, basta observar que*

$$|\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)| \leq |z - z_0| \quad e \quad |\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z_0)| \leq |z - z_0|$$

e considerar na definição de limite $\delta = \varepsilon$.

EXEMPLO 2.2.16 *Uma função polinomial $P(z)$ é contínua em todo ponto z_0 do plano $\mathbb{C}$. Isto resulta do fato que $\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$. Já uma função racional $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ é contínua no ponto z_0 se, e somente se, $Q(z_0) \neq 0$.*

EXEMPLO 2.2.17 *Segue diretamente do Lema 2.2.12 que se $f(z)$ é contínua em z_0 e $g(w)$ é contínua em $w_0 = f(z_0)$, então a função composta $g(f(z))$ é contínua em z_0.*

EXEMPLO 2.2.18 *Decorre das propriedades do limite que a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$ se, e somente se, as funções reais $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$ forem contínuas em (x_0, y_0).*

EXEMPLO 2.2.19 *A função $f(z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} + iy$, $z \neq 0$, e $f(0) = 0$, não é contínua em $z_0 = 0$, porque a componente (parte real) $u(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $u(0,0) = 0$ não é contínua em $(0,0)$, já que não tem limite em $(0,0)$. Ao longo das trajetórias $\gamma_1 : \mathrm{Im}(z) = 0$ e $\gamma_2 : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ os limites são, respectivamente:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0 \quad e$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLO 2.2.20 *Vamos estudar a continuidade da função* $f(z) = \dfrac{i\,\mathrm{Re}(z)}{|z|}$, *se* $z \neq 0$, *e* $f(0) = 0$, *em que as componentes são* $u(x,y) \equiv 0$ *e* $v(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *se* $(x,y) \neq (0,0)$, *e* $v(0,0) = 0$. *Ao longo da trajetória* $\gamma_1 : \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$, *temos:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{2x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

e isto indica que não existe $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ *e, portanto,* f *não é contínua em* $z = 0$.

EXEMPLO 2.2.21 *Seja, agora, a função* $f(z) = \dfrac{(\mathrm{Re}(z))^2}{|z|}$, *se* $z \neq 0$, *e* $f(0) = 0$ *e calculemos* $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$. *Considerando* $z = e^{i\theta}$ *e expressando* $f(z)$ *na forma polar, temos:*

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = \lim_{r\to 0}\left(r\cos^2\theta\right) = 0,$$

e o último limite independe do ângulo θ. *Logo,* $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0 = f(0)$, *de onde concluimos a continuidade de* f *em* $z_0 = 0$.

EXEMPLO 2.2.22 *Como consequência do Lema 2.2.12, temos que se* $f : D \to D^*$ *é contínua em* z_0 *e* $g : D^* \to \mathbb{C}$ *é contínua em* $w_0 = f(z_0)$, *então* $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ *é contínua em* z_0.

LEMA 2.2.23 *Se* $w = f(z)$ *é uma função contínua em* z_0 *e* $f(z_0) \neq 0$, *existe* $\delta > 0$, *tal que*

$$f(z) \neq 0, \quad \forall\ z \in V_\delta(z_0) \cap D(f).$$

PROVA Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(z_0)|$ na definição de continuidade, encontramos $\delta > 0$, tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \tfrac{1}{2}|f(z_0)|, \quad \forall\ z \in D(f) \cap V_\delta(z_0), \tag{2.8}$$

e de (2.8) resulta:

$$|f(z)| > \tfrac{1}{2}|f(z_0)| > 0, \quad \forall\ z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \qquad \blacksquare$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 2.2)**

1. Se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, mostre que $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.

2. Usando a definição, prove que a função $f(z) = z^2$ é contínua.

3. Usando a definição de limite, prove que:

   (a) $\lim\limits_{z\to i}\left(z^3-i\right)=-2i.$

   (b) $\lim\limits_{z\to i}\left(z^2+1\right)=0.$

   (c) $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\mathrm{Re}\,(z)+|z|\right)=\mathrm{Re}\,(z_0)+|z_0|\,.$

   (d) $\lim\limits_{z\to 1-i}\left[x+i\,(2x+y)\right]=1+i.$

   (e) $\lim\limits_{z\to z_0}\sqrt{z}=\sqrt{z_0}.$

4. Usando as propriedades básicas do limite, verifique que:

   (a) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1}{z^2}=-1$ **(b)** $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{iz^3-1}{z-i}=0$ **(c)** $\lim\limits_{z\to -2i}\dfrac{z^3-8i}{z+2i}=-12.$

5. Se $f\,(z)=1/z,\ z\neq 0$, calcule o limite

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f\,(z)-f\,(z_0)}{z-z_0},\quad z_0\neq 0.$$

   E se fosse $f\,(z)=z^n,\ n\in\mathbb{N}$, qual seria o valor do limite?

6. Verifique se a função $f\,(z)=\dfrac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0}$, definida para $z\neq z_0$, tem limite quando $z\to z_0$.

7. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{1/4}-1}{z}.$$

8. Verifique se a função

$$f\,(z)=\frac{\bar{z}^2+4}{z-2i}$$

   tem limite quando $z\to 2i$.

9. Estude a continuidade, no ponto $z=0$, da função $w=f\,(z)$, sendo $f\,(0)=0$ e, para $z\neq 0$:

   (a) $f\,(z)=\dfrac{\mathrm{Re}\,(z)}{|z|}$ **(b)** $f\,(z)=\dfrac{\mathrm{Im}\,(z)}{1+|z|}$ **(c)** $f\,(z)=\dfrac{[\mathrm{Re}\,(z)]^2}{|z|}$ **(d)** $f\,(z)=\dfrac{\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{|z|^2}.$

10. Mostre que $\lim\limits_{z\to z_0}f\,(z)=w_0$ se, e somente se, $\lim\limits_{z\to z_0}f\,(z_n)=w_0$, seja qual for a sequência (z_n) no domínio de $f\,(z)$, com $z_n\to z_0$. Como consequência deduza que $f\,(z)$ é contínua em z_0 se, e somente se, $\lim f\,(z_n)=f\,(z_0)$, seja qual for a sequência (z_n) convergindo para z_0.

11. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por:

$$f(z) = \left| \begin{array}{ll} 1 + |z|, & \text{se} \quad |z| \leq \sqrt{2} \\ 0, & \text{se} \quad |z| > \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Mostre que a função $f(z)$ não é contínua no ponto $z_0 = 1 + i$. E no ponto $z = i$, a função é contínua?

12. Construa uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ descontínua em todos os pontos do conjunto $S : |z| = 1$.

13. Dado $z = x + iy$, defina a função $w = f(z)$ por:

$$f(z) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^3 y (y - ix)}{(x^6 + y^2)(x + iy)}, & \text{se} \quad z \neq 0 \\ 0, \quad \text{se} \quad z = 0. \end{array} \right.$$

Se $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$ é qualquer reta do plano $\mathbb{C}$, tal que $\lim\limits_{t \to 0} z(t) = 0$, mostre que $\lim\limits_{t \to 0} f(z(t)) = 0$ e, contudo, a função $f(z)$ não tem limite quando $z \to 0$.

2.3 Derivação no Plano $\mathbb{C}$

A função complexa $f(z) = |z|^2$, com domínio $D = \mathbb{C}$, é contínua e tem componentes $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v \equiv 0$ infinitamente diferenciáveis[5], ou de classe C^∞, no plano $\mathbb{R}^2$. A pergunta natural é: a função $f(z)$ é derivável e o que seria a derivada $f'(z)$?

Imitando o caso real, em que se tem uma função de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vamos eleger para derivada de $f(z)$, no ponto z_0, o valor, caso exista, do limite:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

É claro que o valor do limite, caso exista, não deve depender da direção sobre a qual Δz se aproxima de zero. Mostremos que para a função $f(z) = |z|^2$ esse limite existe apenas se $z_0 = 0$. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} \\ &= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) - |z_0|^2}{\Delta z} = z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \end{aligned}$$

[5] Uma função é infinitamente diferenciável, ou de Classe C^∞, se suas derivadas parciais, de todas as ordens, são contínuas.

e para concluir observamos que:

(i) No ponto $z_0 = 0$, temos $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left(\overline{\Delta z}\right) = 0$ e, portanto, $f'(0) = 0$.

(ii) Se $z_0 \neq 0$, mostremos que a razão $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ não tem limite, com $\Delta z \to 0$. De fato, ao longo do eixo real, isto é, com $\Delta z \in \mathbb{R}$, encontramos:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \in \mathbb{R}}} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z}\right) = z_0 + \overline{z_0}$$

e ao longo do eixo imaginário, isto é, com $\mathrm{Re}\,(\Delta z) = 0$, obtemos:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \mathrm{Re}(\Delta z)=0}} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z}\right) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \mathrm{Re}(\Delta z)=0}} \left[z_0 \left(\frac{-\Delta z}{\Delta z}\right) + \overline{z_0} - \Delta z\right] = -z_0 + \overline{z_0}.$$

Como $z_0 \neq 0$, segue que $z_0 + \overline{z_0} \neq -z_0 + \overline{z_0}$ e, portanto, $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ não tem limite, com $\Delta z \to 0$. Logo, f não é derivável em z_0, se $z_0 \neq 0$.

Pelo exposto, concluímos que:

(a) Uma função complexa pode ser derivável em um único ponto z_0 do plano $\mathbb{C}$.

(b) As partes real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$ de uma função complexa $f\,(z)$ podem ser infinitamente diferenciáveis em $V_\delta(z_0)$, sem que $f\,(z)$ seja derivável em ponto algum dessa vizinhança.

(c) Uma função complexa pode ser contínua em um ponto z_0 sem ser derivável nesse ponto.

DEFINIÇÃO 2.3.1 *Uma função $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é derivável (ou diferenciável) no ponto z_0, interior ao conjunto D, quando existir o limite:*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Este limite, caso exista, é a derivada da função $f\,(z)$, no ponto z_0, e é indicado por $\dfrac{df}{dz}\,(z_0)$ ou $f'\,(z_0)$.

EXEMPLO 2.3.2 *Se $f(z) = z^2$, então*

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z \to 2z, \quad \textit{com } \Delta z \to 0$$

de onde resulta que f é derivável em z e $f'(z) = 2z$.

EXEMPLO 2.3.3 *Mostremos que a função $f(z) = 2x + 8yi$ não é diferenciável em ponto algum do plano complexo. De fato, temos que*

$$f(z+\Delta z) - f(z) = 2(x+\Delta x) + 8(y+\Delta y)i - 2x - 8yi = 2\,(\Delta x) + 8\,(\Delta y)\,i,$$

de onde resulta:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\,(\Delta x) + 8\,(\Delta y)\,i}{\Delta x + (\Delta y)\,i}.$$

Ao longo das trajetórias $\gamma_1 : \Delta z = \Delta x$ e $\gamma_2 : \Delta z = i\Delta y$, obtemos, respectivamente:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\,(\Delta x)}{\Delta x} = 2 \quad e \quad \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{8i\,(\Delta y)}{i\,(\Delta y)} = 8.$$

Portanto, não existe $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, seja qual for o número complexo z.

TEOREMA 2.3.4 *Se $f : D \to \mathbb{C}$ é derivável no ponto $z_0 \in \operatorname{int}(D)$, então f é contínua em z_0.*

DEMONSTRAÇÃO Basta observar que

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = 0. \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.3.5 (Regras Básicas de Derivação) *Sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ duas funções complexas deriváveis em um ponto z_0, interior ao conjunto D, e seja λ uma constante (complexa).*

(a) $(f + \lambda \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda \cdot g'(z_0)$. **(Linearidade)**

(b) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$. **(Produto)**

(c) $(f/g)'(z_0) = \dfrac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}, \quad g(z_0) \neq 0.$ **(Quociente)**

(d) Se $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, então $f'(z) = nz^{n-1}$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. **(Potência)**

DEMONSTRAÇÃO De forma geral, as Regras de Derivação decorrem das propriedades do limite.

(a) Temos

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) + \lambda g(z) - (f(z_0) + \lambda g(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) + \lambda g(z) - \lambda g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lambda \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&= f'(z_0) + \lambda g'(z_0).
\end{aligned}$$

(b) Sendo $g(z)$ contínua em z_0, então $\lim_{z\to z_0} g(z) = g(z_0)$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)g(z)-f(z_0)g(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{[f(z)-f(z_0)]\,g(z)+f(z_0)\,[g(z)-g(z_0)]}{z-z_0}\\ &= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}g(z)\right]+f(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\\ &= f'(z_0)\,g(z_0)+f(z_0)\,g'(z_0)\,.\end{aligned}$$

(c) Este caso é similar ao anterior. Temos

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)/g(z)-f(z_0)/g(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{[f(z)-f(z_0)]\,g(z_0)-f(z_0)\,[g(z)-g(z_0)]}{(z-z_0)\,g(z)\,g(z_0)}\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{g(z)\,g(z_0)}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}g(z_0)-f(z_0)\,\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}\right]\\ &= \frac{f'(z_0)\,g(z_0)+f(z_0)\,g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}.\end{aligned}$$

(d) Se n é um número inteiro positivo, usando a identidade (1.6), chegamos a

$$\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0} = z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1}$$

e tomando o limite, com $z\to z_0$, obtemos

$$\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0} = \underbrace{z_0^{n-1}+z_0^{n-2}z_0+\cdots+z_0z_0^{n-2}+z_0^{n-1}}_{n\text{ parcelas}} = nz_0^{n-1}.$$

No caso em que n é um inteiro negativo e $z\neq 0$, temos da Regra do Produto

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d}{dz}\left(z^n\cdot z^{-n}\right) = \frac{d}{dz}\left(z^n\right)\cdot z^{-n}+z^n\cdot\frac{d}{dz}\left(z^{-n}\right)\\ &= \frac{d}{dz}\left(z^n\right)\cdot z^{-n}+z^n\cdot\left(-nz^{-n-1}\right) = \frac{d}{dz}\left(z^n\right)\cdot z^{-n}-nz^{-1}\end{aligned}$$

e daí resulta que

$$\frac{d}{dz}\left(z^n\right)\cdot z^{-n}-nz^{-1}=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dz}\left(z^n\right)=nz^{n-1}. \qquad \blacksquare$$

TEOREMA 2.3.6 (Regra da Cadeia) *Se $f(z)$ é derivável em z_0 e $g(w)$ é derivável em $w_0=f(z_0)$, então a função composta $g(f(z))$ é derivável em z_0 e*

$$\frac{d}{dz}\left[g\left(f(z)\right)\right](z_0) = g'(w_0)\cdot f'(z_0)\,. \qquad \text{(Regra da Cadeia)}$$

DEMONSTRAÇÃO Se $F(w)$ é a função definida por

$$F(w) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} - g'(w_0), & w \neq w_0 \\ 0, & w = w_0, \end{array} \right.$$

então $\lim\limits_{w \to w_0} F(w) = g'(w_0) - g'(w_0) = 0$ e temos que

$$\begin{aligned} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} &= \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} \times \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \\ &= \left[F(f(z)) + g'(f(z_0))\right] \times \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}. \end{aligned}$$

Fazendo $z \to z_0$ na última igualdade e observando que $\lim\limits_{z \to z_0} F(f(z)) = F(w_0) = 0$, encontramos

$$\frac{d}{dz}\left[g\left(f\left(z\right)\right)\right]\left(z_0\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{z-z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0). \qquad \blacksquare$$

DEFINIÇÃO 2.3.7 *Uma função $w = f(z)$ é **analítica**, ou **holomorfa**, em z_0, quando sua derivada existir em todos os pontos de alguma vizinhança de z_0. Quando f for analítica em todo ponto z_0 de $\mathbb{C}$ ela é denominada **função inteira**.*

EXEMPLO 2.3.8 *Todo polinômio $P(z)$ é uma função inteira.*

EXEMPLO 2.3.9 *Uma função racional $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ é analítica em todo ponto z_0 onde $Q(z_0) \neq 0$. De fato, se $Q(z_0) \neq 0$, existe, de acordo com o Lema 2.2.23, uma vizinhança $V_\delta(z_0)$, na qual $Q(z) \neq 0$. Nesta vizinhança, a função racional $f(z)$ é derivável.*

EXEMPLO 2.3.10 *No início desta seção, verificamos que a função $f(z) = |z|^2$ é derivável apenas em $z = 0$. Daí concluímos que ela não é analítica em ponto algum do plano $\mathbb{C}$, embora as componentes $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sejam de classe C^∞ em todo plano $\mathbb{R}^2$.*

EXEMPLO 2.3.11 *Resulta das Regras de Derivação que a soma, o produto, o quociente e a composição de funções analiticas é uma função analítica.*

OBSERVAÇÃO 2.3.12 *Não é óbvio, embora seja verdadeiro, que uma função analítica em um ponto z_0 é infinitamente derivável no ponto z_0 e que suas componentes $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são classe C^∞ em uma vizinhança de z_0. Este fato, que será demonstrado depois, nos autoriza derivar $f(z)$ e suas componentes $u(x,y)$ e $v(x,y)$ tantas vezes quantas forem necessárias, como também usar a igualdade entre as derivadas parciais mistas das funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$.*

2.3.1 Equações de Cauchy-Riemann

Conforme ficou estabelecido nas seções anteriores, o limite (e a continuidade como consequência) de uma funçaõ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ é determinado pelo limite das componentes $u(x,y)$ e $v(x,y)$ no ponto (x_0, y_0). Uma questão crucial que se apresenta no momento é: se uma função complexa $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é derivável no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, há alguma relação entre a derivada $f'(z_0)$ e as derivadas parciais de $u(x,y)$ e $v(x,y)$, no ponto (x_0, y_0)?

Suponhamos que a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ e designemos $\Delta z = \Delta x + i(\Delta y)$, $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0, y_0)$ e $\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0, y_0)$. Temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i\left[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)\right]}{\Delta x + i(\Delta y)} \end{aligned}$$

e se considerarmos a trajetória $\Delta y = 0$, isto é, $\Delta z = \Delta x$, obteremos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Procedendo de forma similar, agora considerando a trajetória $\Delta x = 0$, isto é , $\Delta z = i\Delta y$, encontramos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i(\Delta y)} + i \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i(\Delta y)} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Das expressões encontradas para a derivada $f'(z_0)$, decorrem as equações

$$\left| \begin{array}{l} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{array} \right. \tag{2.9}$$

que são denominadas equações de *Cauchy-Riemann*. Em resumo, se $f(z)$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, então as equações de Cauchy-Riemann (2.9) são satisfeitas no ponto (x_0, y_0).

EXEMPLO 2.3.13 *A função $f(z) = \overline{z}$ não é derivável em ponto algum do plano $\mathbb{C}$. De fato, temos*

$$f(z) = x - iy; \quad u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y,$$

de modo que $u_x \neq v_y$, em qualquer ponto $z = x + iy$ do plano $\mathbb{C}$.

EXEMPLO 2.3.14 *Com auxílio das equações de Cauhy-Riemann, torna-se mais fácil verificar que a função $f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$ não é derivável nos pontos $z \neq 0$. Neste caso, $u(x,y) = x^2+y^2$ e $v(x,y) = 0$ e, portanto:*

$$\left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Como as equações de Cauchy-Riemann não são válidas nos pontos $z \neq 0$, concluímos que f só é derivável, possivelmente, em $z = 0$.

Os teoremas dados a seguir fornecem condições necessárias e suficientes para uma dada função complexa $w = f(z)$ ser derivável em ponto z_0, interior ao seu domínio.

TEOREMA 2.3.15 (Condição Necessária) *Se a função $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ é derivável no ponto $z_0 = x_0+iy_0$, então as derivadas parciais u_x, u_y, v_x e v_y existem em (x_0,y_0) e, nesse ponto, são válidas as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO 2.3.16 *A validade das equações de Cauchy-Riemann em certo ponto (x_0,y_0) do domínio da função $f(z)$ não assegura a derivabilidade de $f(z)$ no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$. Como exemplo, consideremos a função $w = f(z)$, definida por*

$$f(z) = \left| \begin{array}{l} (\bar{z})^2/z, \quad se\ z \neq 0 \\ 0, \quad se\ z = 0. \end{array} \right.$$

(a) As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z_0 = 0$.

Se $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$, um cálculo direto nos dá:

$$u(x,y) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}, \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se } (x,y) = (0,0). \end{array} \right. \quad \text{e} \quad v(x,y) = \left| \begin{array}{l} -\dfrac{3x^2y-y^3}{x^2+y^2}, \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \quad \text{se } (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3} = 1 \quad \text{e} \quad u_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0,\Delta y)}{\Delta y} = 0 \\ v_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(0,\Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3} = 1 \quad \text{e} \quad v_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(\Delta x,0)}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

e vemos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas em $(0,0)$.

(b) A função f não é derivável em $(0,0)$. De fato, ao longo do eixo real ($\Delta y = 0$), temos

$$\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 1$$

e, ao longo da reta $\Delta x = \Delta y$, isto é, $\Delta z = \Delta x + i\Delta x$, temos

$$\frac{f(0+\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta x + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta x} = \frac{(\Delta x - i\Delta x)^2}{(\Delta x + i\Delta x)^2} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)^2} = -1.$$

Isto mostra que $f(z)$ não é derivável em $z = 0$.

TEOREMA 2.3.17 (Condição Suficiente) *Suponha que as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ tenham derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $P_0(x_0,y_0)$ e que nesse ponto as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas. Nestas condições a função complexa $f(z) = u + iv$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ e a derivada $f'(z_0)$ pode ser calculada por:*

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) \quad ou \quad f'(z_0) = v_y(x_0,y_0) - iu_y(x_0,y_0). \tag{2.10}$$

DEMONSTRAÇÃO Por simplicidade, em algumas passagens da demonstração omitiremos o ponto $P_0(x_0,y_0)$. Sendo as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ diferenciáveis no ponto P_0, temos:

$$\Delta u = u_x(P_0)\Delta x + u_y(P_0)\Delta y + E_1 \quad \text{e} \quad \Delta v = v_x(P_0)\Delta x + v_y(P_0)\Delta y + E_2$$

onde os restos E_1 e E_2, que dependem de Δx e Δy, são tais que:

$$\frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{E_2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \longrightarrow 0, \qquad \text{com } (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \frac{u_x\Delta x + u_y\Delta y + E_1 + i(v_x\Delta x + v_y\Delta y + E_2)}{\Delta z} \\
&= \frac{u_x\cdot(\Delta x + i\Delta y) + iv_x\cdot(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta z} + \frac{E_1 + iE_2}{\Delta z} \\
&= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \frac{E_1 + iE_2}{\Delta z}
\end{aligned}$$

e fazendo $\Delta z \to 0$, o que equivale a $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, encontramos

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{E_1 + iE_2}{\Delta z}\right) \\
&= u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

COROLÁRIO 2.3.18 *Uma função $w = f(z)$, analítica em um domínio D, será constante em qualquer das situações abaixo:*

(a) $f'(z) = 0$, *para todo z no domínio D.*

(b) $|f(z)|$ *é constante em D.*

(c) $f(z)$ *assume apenas valores reais.*

PROVA Uma função analítica $f(z) = u + iv$ é constante em D se, e somente se, as componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem nulas em D.

(a) Se $f'(z) = 0$ no domínio D, então $u_x + iv_x = 0$ em D e daí resulta que u_x e v_x são nulas em D. Das equaçãoes de Cauchy-Riemann deduzimos que u_y e v_y também se anulam em D.

(b) Se $|f(z)|$ é constante, digamos $|f(z)| = k$, $\forall\ z \in D$, então $u^2 + v^2 = k^2$ e por derivação implícita, obtemos:

$$\left| \begin{array}{l} u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0 \\ u \cdot u_y + v \cdot v_y = 0 \end{array} \right.$$

e daí resulta:

$$\left| \begin{array}{ll} \left(u^2 + v^2\right) \cdot \left(u_x^2 + v_x^2\right) = 0, & \text{em } D \\ \left(u^2 + v^2\right) \cdot \left(u_y^2 + v_y^2\right) = 0, & \text{em } D. \end{array} \right. \tag{2.11}$$

Das equações (2.11) segue que ou $u^2 + v^2 = 0$, e isto acarreta $f \equiv 0$, ou as derivadas u_x, u_y, v_x e v_y são todas nulas em D o que nos dá u e v constantes e, portanto, $f(z)$ constante.

(c) Se $f(z)$ assume apenas valores reais, então $v \equiv 0$ em D, de onde resulta que $v_x \equiv 0$ e $v_y \equiv 0$ e das equações de Cauchy-Riemann concluímos que $u_x \equiv 0$ e $u_y \equiv 0$. Logo, f é constante. ■

EXEMPLO 2.3.19 *A função $f(z) = z^2$ é inteira. De fato, as componentes*

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad e \quad v(x, y) = 2xy$$

têm derivadas parciais contínuas e satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann em todo z do plano $\mathbb{C}$.

EXEMPLO 2.3.20 *Seria a função $f(x + iy) = e^{iy}$ derivável em algum ponto do plano $\mathbb{C}$? Temos*

$$f(z) = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

e, portanto:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = \cos y \quad e \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sen} y.$$

Se f fosse derivável em algum ponto z as equações de Cauchy-Riemann seriam válidas nesse ponto e teríamos:

$$u_x = v_y \quad e \quad u_y = -v_x \Leftrightarrow \cos y = 0 \quad e \quad \operatorname{sen} y = 0.$$

Ocorre que, não existe um número real y que satisfaça, ao mesmo tempo, às equações $\operatorname{sen} y = 0$ e $\cos y = 0$. Com isto concluímos que a função $f(z)$ não é derivável em ponto algum do plano $\mathbb{C}$.

EXEMPLO 2.3.21 *A função $f(z) = |z|^2$, do Exemplo 2.3.14 é derivável em $z = 0$, porque suas componentes $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 0$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann na origem. Temos que*

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0.$$

EXEMPLO 2.3.22 (A função $\exp(z)$) *A função*

$$f(z) = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

será indicada por $\exp(z)$ ou e^z, com partes real e imaginária dadas por

$$\operatorname{Re}[f(z)] = u(x,y) = e^x \cos y \quad e \quad \operatorname{Im}[f(z)] = v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

É claro que u e v são de classe C^1 e as equações de Cauchy-Riemann são válidas em todo plano $\mathbb{R}^2$. Assim, f é derivável em todo ponto z do plano complexo $\mathbb{C}$ e a derivada é:

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^x e^{iy} = f(z).$$

EXEMPLO 2.3.23 (Derivada de 2ª ordem) *Se em certa vizinhança do ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ possuem derivadas parciais contínuas até a 2ª ordem e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, então a função $f = u + iv$ é duas vezes derivável em z_0 e temos*

$$f''(z_0) = u_{xx}(x_0,y_0) + iv_{xx}(x_0,y_0).$$

De fato, a função $g(z) = u_x + iv_x$ atende às condições do Teorema 2.3.17 e, portanto, $g(z)$ é derivável em z_0, com $g'(z_0) = u_{xx}(x_0,y_0) + iv_{xx}(x_0,y_0)$. Para concluir, notamos que $f''(z_0) = g'(z_0)$.

2.3.2 Equações de Cauchy-Riemann na Forma Polar

Se (r, θ) são as coordenadas polares de um ponto $P(x, y)$, então

$$\left| \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \end{array} \right.$$

e temos as seguintes fórmulas de derivação da transformação inversa:

$$\begin{aligned} r_x &= (1/r)\, y_\theta = \cos\theta, \quad r_y = -(1/r)\, x_\theta = \mathrm{sen}\,\theta, \\ \theta_x &= -(1/r)\, y_r = -(1/r)\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \text{e} \quad \theta_y = (1/r)\, x_r = (1/r)\cos\theta. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Agora, usando a Regra da Cadeia e (2.12), encontramos:

$$u_x = u_r \cdot r_x + u_\theta \cdot \theta_x = u_r \cdot \cos\theta - (1/r)\, u_\theta \cdot \mathrm{sen}\,\theta$$

$$u_y = u_r \cdot r_y + u_\theta \cdot \theta_y = u_r \cdot \mathrm{sen}\,\theta + (1/r)\, u_\theta \cdot \cos\theta$$

$$v_x = v_r \cdot r_x + v_\theta \cdot \theta_x = v_r \cdot \cos\theta - (1/r)\, v_\theta \cdot \mathrm{sen}\,\theta$$

$$v_y = v_r \cdot r_y + v_\theta \cdot \theta_y = v_r \cdot \mathrm{sen}\,\theta + (1/r)\, v_\theta \cdot \cos\theta.$$

Supondo $f(z) = u + iv$ derivável, usaremos as derivadas acima para passar as equações de Cauchy-Riemann (2.9) para a forma polar. Temos

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_r \cos\theta - \frac{1}{r} u_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = v_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r} v_\theta \cos\theta \tag{2.13}$$

e, de modo similar, temos

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow u_r\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{r} u_\theta \cos\theta = -v_r \cos\theta + \frac{1}{r} v_\theta\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2.14}$$

Multiplicando a equação (2.13) por $\cos\theta$ e a equação (2.14) por $\mathrm{sen}\,\theta$, e, em seguida, somando os resultados, obtemos:

$$u_r \cos^2\theta + u_r\,\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1}{r} v_\theta (\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta),$$

isto é, $u_r = \dfrac{1}{r} v_\theta$. Procedendo de forma análoga, multiplicando a equação (2.13) por $-\mathrm{sen}\,\theta$ e a equação (2.14) por $\cos\theta$, e, em seguida, somando os resultados, obtemos $-\dfrac{1}{r} u_\theta = v_r$. Combinando esses resultados, chegamos às equações de Cauchy-Riemann na forma polar:

$$u_\theta = -r v_r \quad \text{e} \quad v_\theta = r u_r. \tag{2.15}$$

A derivada $f'(z_0)$ vem dada por:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x + iv_x = u_r \cos\theta - \frac{1}{r} u_\theta \operatorname{sen}\theta + i(v_r \cos\theta - \frac{1}{r} v_\theta \operatorname{sen}\theta) \\ &= u_r \cos\theta + v_r \operatorname{sen}\theta + i(v_r \cos\theta - u_r \operatorname{sen}\theta) = (u_r + iv_r)(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

e daí resulta a fórmula de derivação

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r). \tag{2.16}$$

Usando as equações (2.15), obtemos a fórmula de derivação equivalente

$$f'(z_0) = \frac{1}{r} e^{-i\theta}(v_\theta - iu_\theta). \tag{2.17}$$

EXEMPLO 2.3.24 *Dado $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$, a função $F(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ é derivável em todo z fora do semi-eixo $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ e $F'(z) = \dfrac{1}{2\sqrt{F(z)}}$. De fato, temos:*

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \sqrt{r}\cos(\theta/2) \Rightarrow u_r = \frac{\cos(\theta/2)}{2\sqrt{r}} \quad e \quad u_\theta = -\frac{\sqrt{r}\operatorname{sen}(\theta/2)}{2} \\ v(r,\theta) &= \sqrt{r}\operatorname{sen}(\theta/2) \Rightarrow v_r = \frac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{2\sqrt{r}} \quad e \quad v_\theta = \frac{\sqrt{r}\cos(\theta/2)}{2} \end{aligned}$$

onde vemos que as componentes $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ são de classe C^1, no domínio considerado, e as equações de Cauchy-Riemann (2.15) são facilmente comprovadas. A derivada é dada por:

$$F'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}}[\cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2)] = \frac{1}{2\sqrt{r}\cdot e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2F(z)}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 2.3)**

1. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a função definida por $f(z) = |z + i|^2$.

   (a) Qual o conjunto imagem da função f?

   (b) Usando a definição de derivada, calcule $f'(-i)$.

   (c) A função $f(z)$ é derivável em algum outro ponto $z \neq -i$?

2. Em cada caso, mostre que a função $w = f(z)$ não é derivável em ponto algum do plano $\mathbb{C}$.

   (a) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ **(b)** $f(z) = e^x(\cos y - i\operatorname{sen} y)$ **(c)** $f(z) = z - \overline{z}$ **(d)** $f(z) = \exp(|z|)$.

3. Em cada caso, calcule $f''(z)$, sendo:

   (a) $f(z) = iz + 2$ (b) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$ (c) $f(z) = z^3$

4. Determine, onde existir, a derivada da função $f(z)$.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ (b) $f(z) = x^2 + iy^2$ (c) $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$ (d) $f(z) = z^2 + 1$ (e) $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$.

5. Para a função $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$, mostre que $u_x + iv_x = 3x^2$. Por que $3x^2$ representa a derivada dessa função apenas em $z = i$?

6. Mostre que a função $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ é derivável apenas na origem e calcule $f'(0)$.

7. Mostre que as funções $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ e $g(z) = \left(z^2 - z\right) e^{-x} e^{-iy}$ são inteiras.

8. As funções $f(x+iy) = e^y e^{ix}$ e $g(x+iy) = xy + iy$ são analíticas em algum ponto?

9. Se uma função complexa $w = f(z)$ é analítica em uma vizinhança de um ponto z_0, exceto em z_0, o ponto z_0 recebe o nome de *singularidade* ou *ponto singular* da função f.

   (i) Um polinômio $P(z)$ não tem ponto singular, por ser uma função inteira.

   (ii) As singularidades de uma função racional $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ são as raízes do polinômio $Q(z)$.

   (iii) A função $f(z) = \bar{z}$ não tem singularidade, porque não é analítica em ponto algum. O mesmo ocorre com a função $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$.

   Determine, caso exista alguma, as singularidades das seguintes funções:

   (a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ **(b)** $g(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ **(c)** $h(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} - i \operatorname{Im}(z)$.

10. Calcule a derivada e as singularidades da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)(z^2+i)}$.

11. Dado $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, designe $F(z) = \ln r + i\theta$. Mostre que a função F assim definida é analítica no domínio indicado e $F'(z) = 1/z$.

12. Se $f(z) = z^2$ e k é uma constante real, verifique que as curvas $u(x,y) = k$ e $v(x,y) = k$, onde $u = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v = \operatorname{Im}[f(z)]$, são ortogonais. Idem para a função $g(z) = 1/z$.

13. Se $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ é uma função analítica em um domínio D, que não contém a origem, use o sistema de Cauchy-Riemann e prove que as funções u e v satisfazem à equação de Laplace:

$$r^2\Phi_{rr} + r\Phi_r + \Phi_{\theta\theta} = 0.$$

14. Se as funções $f(z)$ e $\overline{f(z)}$ são analíticas em um domínio D, mostre que f é constante.

15. O Corolário 2.3.18 sugere algumas situações em que uma função analítica $f(z)$ torna-se constante em um domínio D. Se $\mathrm{Re}[f(z)]$ for constante em D é correto afirmar que $f(z)$ é constante em D?

16. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica:

(a) $f(z) = z^3 + z$ **(b)** $f(z) = (1-z)^{-1}$ **(c)** $f(z) = z^{-2}$ **(d)** $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$.

17. Verifique que a função $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$ é inteira e calcule $f'(a+ib)$.

18. Seja $f(z)$ uma função inteira. Mostre que $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ também é uma função inteira.

19. Se $f(z)$ é analítica em $z = 0$ e $h(z) = \overline{f(z)}$, mostre que $h(z)$ é derivável em $z = 0$ se, e só se, $f'(0) = 0$.

20. Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$ satisfaz às equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$, mas, não é derivável, e muito menos analítica, em $z = 0$.

21. Se $f = u + iv$ é uma função holomorfa em z_0 e θ representa o ângulo de uma direção $\vec{\eta}$ com o eixo positivo dos x, mostre que:

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right).$$

22. Se f e g são funções deriváveis em z_0, com $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, mostre que:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Use o resultado e calcule $\lim\limits_{z\to i}\left(\dfrac{|z-i|^2}{z^3+z^2+i+1}\right)$.

2.4 Funções Harmônicas

Nesta seção usaremos a teoria de *funções harmônicas* para construir, a partir de uma função real $u(x,y)$, uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Na construção usaremos o seguinte resultado, admitido, por enquanto, sem demonstração.

TEOREMA 2.4.1 *Se f é analítica em z_0, então f possui derivada de todas as ordens em z_0.* ■

Recordemos que uma função real de duas variáveis reais $\varphi(x,y)$, com derivadas parciais até a ordem k, contínuas em um domínio D, denomina-se de *classe* C^k, ou k-vezes diferenciável em D. No caso em que $k = \infty$, a função φ denominar-se-á *infinitamente diferenciável*, ou de classe C^∞, no domínio D.

DEFINIÇÃO 2.4.2 *Uma função $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, ou de classe C^2, que satisfaz, no domínio D, à equação de Laplace*

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

é denominada função harmônica em D. Se u e v são harmônicas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (2.9) em D, diremos que u e v são harmônicas conjugadas.

TEOREMA 2.4.3 *Para que uma função complexa $f(z) = u + iv$ seja analítica em D é necessário e suficiente que v seja harmônica conjugada de u, no domínio D.*

DEMONSTRAÇÃO Se $f(z)$ é analítica, são válidas as equações de Cauchy-Riemann

$$\left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x, \end{array} \right. \tag{2.18}$$

e do Teorema 2.4.1 segue que as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são de classe C^∞ e por derivação das equações (2.18), chegamos a:

$$\left| \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0, \end{array} \right.$$

de onde resulta que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são harmônicas conjugadas. Reciprocamente, se v é harmônica conjugada de u, então u e v são de classe C^2, satisfazem às equações de Cauchy-Riemann e do Teorema 2.3.17 segue que $f = u + iv$ é analítica. ■

EXEMPLO 2.4.4 (Construindo uma Harmônica Conjugada) *Construir, a partir das equaçãoes de Cauchy-Riemann, uma harmônica conjugada de* $u = x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Em primeiro lugar, observamos que $u(x,y) = x^2 - y^2$ é harmônica em todo plano $\mathbb{C}$ e usando a primeira equação do sistema de Cauchy-Riemann, temos

$$v_x = -u_y = 2y \Rightarrow v(x,y) = 2xy + C(y) \tag{2.19}$$

e derivando (2.19) com relação a y e usando a relação $v_y = u_x$, encontramos

$$2x + C'(y) = v_y = u_x = 2x$$

resultando, dessa forma, $C(y) = k$. Assim,

$$v(x,y) = 2xy + k,$$

e, considerando, por exemplo, $k = 0$, encontramos a função inteira

$$f = u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

EXEMPLO 2.4.5 *Se $f(z)$ é analítica e $|f(z)|$ é constante em D, então $f(z)$ é constante em D. De fato, dado que f uma função analítica, segue do Teorema 2.4.3 que u e v são harmônicas conjugadas, isto é,*

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad e \quad \left| \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right. \quad em\ D.$$

Ora, sendo $|f(z)| = C$, temos que

$$u^2 + v^2 = |f(z)|^2 = C^2, \tag{2.20}$$

e, derivando implicitamente a equação (2.20) com relação a x e depois em relação a y, chegamos, respectivamente, a

$$\left| \begin{array}{l} uu_x + vv_x = 0 \quad e \\ uu_y + vv_y = 0. \end{array} \right. \tag{2.21}$$

Agora, derivamos $(2.21)_1$ em relação a x e $(2.21)_2$ em relação a y e somamos membro a membro os resultados, para chegarmos a

$$u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx} + u_y^2 + uu_{yy} + v_y^2 + vv_{yy} = 0,$$

isto é:

$$u_x^2 + u_y^2 + u\Delta u + v\Delta v + v_x^2 + v_y^2 = 0.$$

Como $\Delta u = \Delta v = 0$, *segue da última igualdade que* $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ *e, portanto,* u *e* v *são constantes. Logo,* $f(z) = u + iv$ *é constante.*

EXEMPLO 2.4.6 *Seja* $u(x, y)$ *um polinômio do segundo grau, homogêneo e harmônico, digamos*

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Da relação $u_{xx} + u_{yy} = 0$, *resulta* $c = -a$ *e, portanto,* $u(x, y)$ *é da forma:*

$$u(x, y) = a\left(x^2 - y^2\right) + bxy, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A função complexa conjugada $v(x, y)$ *é dada por:*

$$v(x, y) = 2axy - \tfrac{b}{2}\left(x^2 - y^2\right) + k,$$

sendo k *constante, e a função inteira* $f(z) = u + iv$ *correspondente é:*

$$\begin{aligned} f(z) &= a\left(x^2 - y^2\right) + bxy + i\left[2axy - \tfrac{b}{2}\left(x^2 - y^2\right) + k\right] \\ &= a\left[x^2 - y^2 + 2xyi\right] - i\tfrac{b}{2}\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) + ik \\ &= \left(a - \tfrac{b}{2}i\right)z^2 + ik. \end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 2.4)**

1. Mostre que $u = x - 5xy$ é harmônica em todo plano, determine sua conjugada $v(x, y)$ e expresse $f = u + iv$ em termos de $z = x + iy$.

2. Repita o exercício precedente com a função $u(x, y) = e^x \cos y$.

3. Mostre que a função $v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ é harmônica e construa uma função analítica $f(z)$, com $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$.

4. Repita o exercício precedente com a função $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

5. Mostre que a forma mais geral dos polinômios do terceiro grau, homogêneos e harmônicos é

$$u(x,y) = ax^3 - 3bx^2y - 3axy^2 + by^3.$$

Determine a harmônica conjugada $v(x,y)$ e a função inteira correspondente $f(z) = u + iv$.

6. Se $f(z)$ é uma função de classe C^2 em um domínio D, mostre que

$$\Delta\left(|f(z)|^2\right) = 4\left|f'(z)\right|^2, \quad \text{nos pontos de } D.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

2.1 EXEMPLOS DE FUNÇÕES COMPLEXAS

1. $f(2+i) = 11 + 13i$ e $f(3i) = -27 + 3i$.

2. Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2ix - 2xy \\ &= (x - iy)^2 + 2i(x + iy) = \overline{z}^2 + 2iz. \end{aligned}$$

3. Sendo $z = x + iy$, temos:

(a) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : z \neq i \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) \neq k\pi\}$.

(b) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \operatorname{Im}(z) \neq k\pi + \pi/2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) \neq 2k\pi\}$.

(c) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) \neq 1\}$.

4. Considerando $u(x,y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v(x,y) = \operatorname{Im}[f(z)]$, com $z = x + iy$, temos:

(a) $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x$ e $v(x,y) = 4xy - 3y$.

(b) $u(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2$ e $v(x,y) = xy$.

(c) $u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2 + y^2}$ e $v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2 + y^2}$.

(d) $u(x,y) = \dfrac{x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^2 - 4xy + 1}$ e $v(x,y) = \dfrac{y - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2 - 4xy + 1 - 4xy + 1}$.

5. Figuras em Construção

6. Figuras em Construção

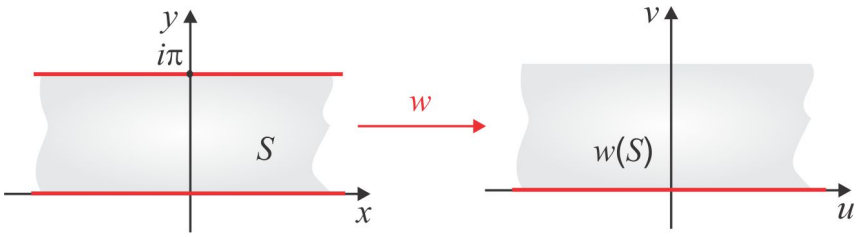
7. As partes real e imaginária da função $w = f(x+iy) = e^x \cdot e^{iy}$ são, respectivamente:

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

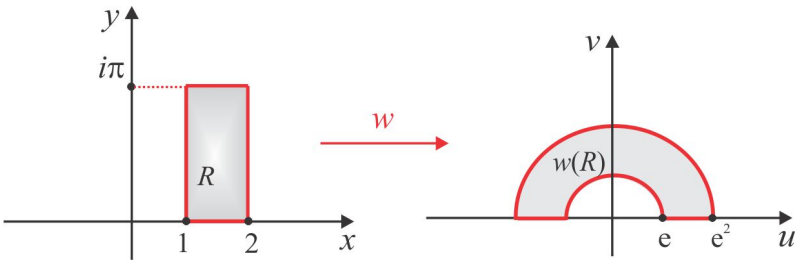
de modo que $u^2 + v^2 = e^{2x}$ (circunferência de centro $z_0 = 0$ e raio $r = e^x$). É oportuno ressaltar que y é, ao mesmo tempo, a parte imaginária de z e o argumento de w. No caso da faixa horizontal S, vemos que:

$$|w| = e^x \to +\infty, \quad \text{com } x \to \infty, \quad \text{e} \quad 0 \leq \operatorname{Arg}(w) \leq \pi.$$

e a imagem $w(S)$ é o subconjunto $\{w = u + iv,\ v \geq 0,\ w \neq 0\}$.



No caso do retângulo R, a imagem está ilustrada na figura abaixo.

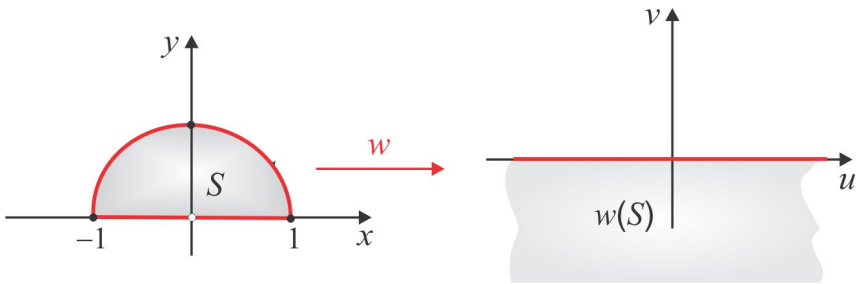


8. Olhando as componentes $u(x,y) = \operatorname{Re}(w)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im}(w)$ ao longo do eixo real e imaginário, respectivamente, vemos que:

$$u(x,0) = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{e} \quad v(0,y) = \operatorname{Im}(w) = y\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$$

de onde resulta $\lim\limits_{x \to 0} u(x,0) = \pm\infty$ e $v(x,y) \leq 0$, com $\lim\limits_{y \to 0^+} v(0,y) = -\infty$. A imagem $w(S)$ é o

semiplano inferior $v \leq 0$.



2.1 LIMITE & CONTINUIDADE

1. Use a definição de limite e a desigualdade $||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$.

2. É suficiente provar que $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, seja qual for o ponto z_0 do plano $\mathbb{C}$. Seja, então, $\varepsilon > 0$ dado e determinemos $\delta > 0$, tal que:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon.$$

O raio δ procurado pode depender do ε dado e do ponto z_0 e, considerando $\delta < 1$, teremos:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| < \delta + |z_0| < 1 + |z_0|.$$

Assim, se $|z - z_0| < \delta$, então:

$$\left|z^2 - z_0^2\right| = |z + z_0|\,|z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot |z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot \delta$$

Para concluir, basta escolher o raio δ de modo que:

$$\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + |z_0|)\}.$$

3. Comprovar limite pela definição torna-se uma caçada ao δ. Para que se tenha $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, procuramos, a partir de um $\varepsilon > 0$ dado, um $\delta > 0$, tal que:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

(a) Se $f(z) = z^3 - i$, então:

$$|f(z) + 2i| = \left|z^3 + i\right| = \left|(z-i)\cdot\left(z^2 + iz - 1\right)\right| \leq |z-i|\,|z|\,|z+i| + |z-i|\,. \tag{2.22}$$

Considerando $\delta < 1$, então $|z-i| < \delta$ acarreta:

$$|z| < |z-i| + 1 < 2 \quad \text{e} \quad |z+i| < |z-i| + 2 < 3$$

e de (2.22) chegamos a:

$$|f(z) + 2i| < 7\,|z-i| < 7\delta$$

e para concluir, basta escolher $\delta < \min\{1, 7/\varepsilon\}$.

(b) Se $\delta < 1$, temos:

$$\left|z^2 + 1\right| = |z-i|\,|z+i| < 3\delta, \quad \text{se} \quad |z-i| < \delta$$

e dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta < \min\{1, \varepsilon/3\}$ para concluir que $|z-i| < \delta \Rightarrow \left|z^2+1\right| < \varepsilon$.

(c) Supondo $|z - z_0| < \delta$ e considerando $\delta < 1$, temos

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}(z) + |z|| &= |\mathrm{Re}(z - z_0) + \mathrm{Re}(z_0) + |z - z_0 + z_0|| \\ &\leq |\mathrm{Re}(z - z_0)| + |\mathrm{Re}(z_0)| + |z - z_0| + |z_0| \\ &\leq |z - z_0| + 2\,|z_0| < 1 + 2\,|z_0|\,. \end{aligned}$$

Escolha $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + 2\,|z_0|)\}$.

(d) Se $z_0 = 1 - i,\ w_0 = 1 + i$ e $f(z) = x + i(2x + y)$, então:

$$|f(z) - w_0| = |z - z_0 + 2i\,\mathrm{Re}(z = z_0)| \leq |z - z_0| + 2\,|\mathrm{Re}(z - z_0)| \leq 3\,|z - z_0|$$

e para concluir, seja $\delta = \varepsilon/3$.

(e) Temos

$$\left|(\overline{z})^2 - (\overline{z_0})^2\right| = |z - z_0|\,|z + z_0|$$

e considerando $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + 2\,|z_0|)\}$ comprovamos a definição.

4. Em alguns casos, o resultado é obtido por substituição direta; em outros é necessário fatoração.

(a) $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{i^2} = -1.$

(b) $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{iz^3-1}{z-i}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{i\,(z-i)\left(z^2+iz-1\right)}{z-i}=\lim\limits_{z\to i}i\left(z^2+iz-1\right)=-3.$

(c) Usando a fatoração do Exercício 19 do Capítulo 1, temos:

$$\lim_{z\to -2i}\frac{z^3-8i}{z+2i}=\lim_{z\to -2i}\frac{(z+2i)\left(z^2-2iz-4\right)}{z+2i}=\lim_{z\to -2i}\left(z^2-2iz-4\right)=-12.$$

5. Um cálculo direto nos dá:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{-1}{z\cdot z_0}=-\frac{1}{z_0^2}.$$

No caso em que $f(z)=z^n$, usamos a identidade (1.6) e chegamos a:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0}=nz_0^{n-1}.$$

6. O limite não existe, tendo em vista que:

(i) sobre a trajetória $\gamma_1:\operatorname{Re}(z)=x_0$ o valor do limite é -1.

(ii) sobre a trajetória $\gamma_2:\operatorname{Im}(z)=y_0$ o valor do limite é 1.

7. Se $w=(1+z)^{1/4}$ então $z=w^4-1$ e, portanto:

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{1/4}-1}{z}=\lim_{w\to 1}\frac{w-1}{w^4-1}=\lim_{w\to 1}\frac{1}{(w-i)(w+i)(w+1)}=\frac{1}{4}.$$

8. Considere as trajetórias $\gamma_1:\operatorname{Re}(z)=0$ e $\gamma_2:\operatorname{Im}(z)=2$, ao longo das quais o limite tem valores $4i$ e $-4i$, respectivamente. Daí conclui-se que o limite não existe.

9. A função $f(z)$ será contínua em $z=0$ quando $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$. Sejam $u(x,y)=\operatorname{Re}[f(z)]$ e $v(x,y)=\operatorname{Im}[f(z)]$, sendo $z=x+iy$.

(a) $u(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não tem limite em $(0,0)$ e $f(z)$ é descontínua em $z=0$.

(b) Neste caso, $u(x,y)\equiv 0$ e, na forma polar, $v(x,y)=\dfrac{r\operatorname{sen}\theta}{1+r}\to 0$, com $r\to 0$. A função é contínua em $z=0$.

(c) Temos $u(x,y)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$, com $z\to 0$, e $v(x,y)\equiv 0$. Assim, $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=0$ e a função é contínua em $z=0$.

(d) A componente $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não tem limite em $(0,0)$ e a função é descontínua em $z=0$.

10. Suponha que $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ e seja (z_n) uma sequência no domínio de, convergindo para z_0. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e um número natural n_0, tais que:

$$\left|\begin{array}{lll} \text{(i)} & |f(z) - w_0| < \varepsilon, & \text{se} \quad z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ \text{(i)} & |z_n - z_0| < \delta, & \text{se} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n \geq n_0. \end{array}\right.$$

e daí resulta que $|f(z_n) - w_0| < \varepsilon$, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, e isto nos diz que $\lim f(z_n) = w_0$. Para provar a recíproca, raciocinamos por contradição supondo que $f(z)$ não tem limite w_0, com $z \to z_0$. Assim, existe um raio $\varepsilon_0 > 0$ e podemos escolher para cada índice n um número complexo z_n no domínio de f, tal que:

$$|z_n - z_0| < 1/n \quad \text{e} \quad |f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon_0.$$

Dessa forma, construímos uma sequência (z_n) no domínio de f, convergindo para z_0, sem que $f(z_n)$ convirja para w_0, contradizendo a hipótese.

11. A sequência $z_n = (1 + 1/n) + i(1 + 1/n)$ converge para $z_0 = 1 + i$ e, contudo, a sequência imagem $(f(z_n))$ não converge para $f(z_0)$, já que $f(z_n) \to 0$ e $f(z_0) = 2$. Esse mesmo argumento pode ser usado para mostrar que a função é descontínua em qualquer ponto da circunferência $|z| = \sqrt{2}$. Nos pontos interiores ou exteriores à circunferência $|z| = \sqrt{2}$ a função é contínua.

12. Considere, por exemplo, a função $w = f(z)$, definida por:

$$f(z) = \left|\begin{array}{lll} z & \text{se} & |z| \leq 1 \\ 2 & \text{se} & |z| > 1. \end{array}\right.$$

Dado $z_0 = a + ib$, com $a^2 + b^2 = 1$, a sequência $z_n = (a + 1/n) + i(b + 1/n)$ converge para z_0 e, ainda assim, $(f(z_n))$ não converge para $f(z_0) = a + ib$, porque $f(z_n) = 2$, $\forall n$, e $|f(z_0)| = 1$.

13. Primeiro, notamos que para $z \neq 0$ temos $f(z) = -\dfrac{ix^3y}{x^6 + y^2}$, de modo que o limite ao longo da trajetória $x^3 = y$ é igual a $-i/2$. Por outro lado, ao longo da família de retas $y = mx$, temos:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = -i \cdot \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(x^4 + m^2)} = 0.$$

2.3. DERIVAÇÃO NO PLANO $\mathbb{C}$

1. Temos $f(x+iy) = x^2 + (y+1)^2$ e as componentes de $f(z)$ são:

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) \equiv 0.$$

(a) O conjunto imagem de $w = f(z)$ é:

$$\mathcal{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}.$$

(b) No ponto $z_0 = -i$, temos:

$$f'(-i) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(-i+\Delta z) - f(-i)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{(\Delta z)} = 0.$$

2. Basta comprovar que o sistema de Cauchy-Riemann não é satisfeito em ponto algum do plano $\mathbb{C}$.

(a) Temos $u(x,y) = y$, $v(x,y) = 0$ e, portanto, $u_y \neq -v_x$ em todo ponto z.

(b) Temos $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$ e o sistema é, neste caso:

$$\left| \begin{array}{l} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \cos y = -\cos y \\ -\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y \end{array} \right. \Leftrightarrow \cos y = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} y = 0.$$

um tal y não existe!

(c) Neste caso, $u(x,y) \equiv 0$ e $v(x,y) = 2y$. A equação $u_x = v_y$ não é satisfeita em ponto algum.

3. O cálculo pode ser feito via regras de derivação ou com a fórmula (2.10).

(a) $f(z) = iz + 2 \Rightarrow f''(z) = 0$.

(b) $f(z) = \exp(-z) \Rightarrow f''(z) = \exp(-z)$.

Para usar a fórmula (2.10), notamos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = U + iV \Rightarrow f''(z) = U_x + iV_x = u_{xx} + iv_{xx} \quad \text{ou} \\ f''(z) &= V_y - iU_y = v_{xy} - iu_{xy}. \end{aligned}$$

(c) $f(z) = z^3 \Rightarrow f''(z) = 6z$.

4. Usando regras de derivação ou a fórmula (2.10), temos:

(a) Se $z \neq 0$, então $f'(z) = \dfrac{-1}{z^2}$.

(b) A derivada existe nos pontos da reta $S : \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z)$ e é dada por: $f'(z) = 2x + 2iy$.

(c) As componentes de $f(z)$ são as funções $u = xy$ e $v = y^2$, de classe C^∞, e o sistema de Cauchy-Riemann é atendido apenas em $z = 0$. Temos $f'(0) = 0$.

(d) $f'(z) = 2z, \quad z \in \mathbb{C}$. **(função inteira)**

(e) Se $z \neq 1$, então $f'(z) = \dfrac{-1}{(z-1)^2}$.

5. As componentes $u = x^3$ e $v = -(y-1)^3$ são de classe C^1 em todo plano $\mathbb{C}$, mas, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em $z = i$ e neste ponto temos $f'(i) = 0$.

6. Temos $f(z) = x^2 + ixy$ e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em $z = 0$. A derivada é $f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$.

7. Verifique que o sistema de Cauchy-Riemann é satisfeito em cada ponto (x, y) do plano $\mathbb{C}$. Note que a função $g(z)$ é o produto da função inteira $z^2 - z$ pela função e^{-z}, também inteira.

8. As componentes da função $f(z)$ são $u = e^y \cos x$ e $v = e^y \operatorname{sen} x$, que não satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann em ponto algum, já que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ não se anulam simultaneamente. A funçao $f(z)$ não é derivável, e muito menos analítica, em ponto algum. Já a função $g(z)$ é derivável apenas em $z = i$, mas, não é analítica em ponto algum.

9. A simples inexistência da derivada em um ponto não indica singularidade nesse ponto. Recorde-se que z_0 é uma singularidade de $f(z)$ quando f for analítica em alguma vizinhança de z_0, exceto no ponto z_0.

   (a) $z = 0$ e $z = \pm i$ são as singularidades de $f(z)$.

   (b) $z = 0$ e $z = 2$ são as singularidades de $g(z)$.

   (c) A função $h(z)$ não é analítica em ponto algum e, portanto, não tem singularidade.

10. A derivada pode ser calculada por meio de regras de derivação. As singularidades são: $z = 0$, $z = i$ e $z = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$.

11. Sendo $F(z) = \ln r + i\theta$, então as componentes $u(r,\theta) = \ln r$ e $v(r,\theta) = \theta$ são de classe C^1 e facilmente comprovam-se as equações de Cauchy-Riemann:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad \text{e} \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

A derivada é dada por:

$$F'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

12. No caso de $f(z) = z^2$, temos $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. As curvas $u(x,y) = k$ e $v(x,y) = k$ são ortogonais se, e só se, $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$. Temos:

$$\left| \begin{array}{l} \nabla u(x,y) = (2x)\ \vec{i} - (2y)\ \vec{j} \\ \nabla v(x,y) = (2y)\ \vec{i} + (2x)\ \vec{j} \end{array} \right. \Rightarrow \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 4xy - 4xy = 0.$$

Repita o processo com a função $g(z) = 1/z$, nos pontos $z \neq 0$.

13. Partindo das equações de Cauchy-Riemann, encontramos:

$$\begin{aligned} &u_r = \tfrac{1}{r} v_\theta \Rightarrow u_{rr} = -\frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{1}{r} v_{\theta r} \Rightarrow r^2 u_{rr} = -v_\theta + r v_{\theta r} \\ &u_\theta = -r v_r \Rightarrow u_{\theta\theta} = -r v_{\theta r} \end{aligned}$$

e daí resulta:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = (-v_\theta + r v_{\theta r}) + v_\theta + (-r v_{\theta r}) = 0.$$

Procedimento similar se adota para a função $v(r,\theta)$.

14. Como $f(z) = u + iv$ e $g(z) = u - iv$ são analíticas no domínio D, resulta das equações de Cauchy-Riemann que:

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad &\text{e} \quad v_x = -u_y \\ u_x = -v_y \quad &\text{e} \quad v_x = u_y \end{aligned}$$

e daí segue que as derivadas primeiras de u e v são nulas em D. Logo, u e v (e portanto $f(z)$) são constantes em D.

15. Se $u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)]$ for constante, digamos $u = k$, teremos $u_x = u_y = 0$ e, consequentemente, $v_x = -u_y = 0$ e $v_y = u_x = 0$. Logo, $f(z)$ é constante.

16. Se $\mathcal{A}$ representa o conjunto onde $f(z)$ é analítica, então:

(a) $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, isto é, $f(z)$ é uma função inteira.

(b) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$.

(c) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$.

(d) $\mathcal{A} = \varnothing$, isto é, $f(z)$ não é analítica em ponto algum.

17. As componentes $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ e $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ são funções polinomiais e, portanto, de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo plano. Logo, $f(z)$ é uma função inteira. A derivada no ponto $z = a + ib$ é igual a:

$$f'(a+ib) = 3\left(a^2 - b^2\right) + (6ab)\, i.$$

18. Basta observar que se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, então $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = U(x,y) + iV(x,y)$, onde $U(x,y) = u(x,-y)$ e $V(x,y) = -v(x,-y)$. Agora, comprovemos as equações de Cauchy-Riemann.

$$\left|\begin{array}{l} U_x(x,y) = u_x(x,-y) = v_y(x,-y) = V_y(x,y) \\ V_x(x,y) = -v_x(x,-y) = u_y(x,-y) = -U_y(x,y). \end{array}\right.$$

19. Se $f = u + iv$, então $h = u - iv$ e supondo que $h(z)$ seja derivável em $z = 0$, teremos:

$$\left|\begin{array}{l} u_x(0,0) = -v_y(0,0) \\ u_y(0,0) = v_x(0,0). \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Mas, sendo $f(z)$ analítica em $z = 0$, temos:

$$\left|\begin{array}{l} u_x(0,0) = v_y(0,0) \\ u_y(0,0) = -v_x(0,0). \end{array}\right. \tag{2.24}$$

Comparando (2.23) e (2.24) deduzimos que u_x, u_y, v_x e v_y são nulas em $(0,0)$ e, portanto, $f'(0) = 0$. Reciprocamente, se $f'(0) = 0$, então:

$$\lim_{z\to 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(0)}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{\left[\frac{f(z) - f(0)}{z}\right]} \cdot \left(\frac{\overline{z}}{z}\right) = 0.$$

Logo, $h(z)$ é derivável em $z = 0$ e $h'(0) = 0$.

20. Temos que $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ e $v(x,y) \equiv 0$, de modo que:

$$u_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0 = v_y(0,0)$$
$$u_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0 = -v_x(0,0).$$

Por outro lado, no ponto $z = 0$, temos

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}$$

e para comprovar que o último limite não existe, considere a trajetória $\gamma : \Delta x = \Delta y$, ao longo da qual o limite pode ser $\pm\frac{1}{2}(1-i)$, conforme $\Delta x > 0$ ou $\Delta x < 0$.

21. A partir das equações de Cauchy-Riemann e notando que $\vec{\eta} = (\cos\theta)\,\vec{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla u \cdot \vec{\eta} = u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta = u_x \cos\theta - v_x \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla v \cdot \vec{\eta} = v_x \cos\theta + v_y \operatorname{sen}\theta = v_x \cos\theta + u_x \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

e daí resulta:

$$e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right) = e^{-i\theta}\left[e^{i\theta}(u_x + iv_x)\right] = u_x + iv_x = f'(z_0).$$

22. Considerando que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, temos:

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

No cálculo do limite

$$\lim_{z\to i}\frac{|z-i|^2}{z^3+z^2+i+1}$$

consideramos $f(z) = |z-i|^2$ e $g(z) = z^3+z^2+i+1$ para encontrar

$$\lim_{z\to i}\frac{|z-i|^2}{z^3+z^2+i+1} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{0}{-3+2i} = 0.$$

2.4. FUNÇÕES HARMÔNICAS

1. As harmônicas conjugadas são $v(x,y) = \frac{5}{2}\left(x^2-y^2\right) + y + k$. Considerando $k = 0$, temos a função analítica correspondente

$$\begin{aligned}f(z) &= x - 5xy + i\left[\tfrac{5}{2}\left(x^2-y^2\right) + y\right] = x + iy + i\tfrac{5}{2}\left(x^2-y^2+2xyi\right) \\ &= z + \tfrac{5}{2}iz^2.\end{aligned}$$

2. Harmônica conjugada $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ e a função analítica é $f(z) = \exp(z)$.

3. A harmônica conjugada $u(x,y) = \cos x \cosh y$ e a função analítica é $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

4. $v(x,y) = 3x^2 - y^3$ e $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$.

5. Considerando o polinômio do terceiro grau homogêneo e harmônico:

$$u(x,y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2$$

e usando a equação de Laplace $\Delta u = 0$, obtemos:

$$(6a + 2d)\,x + (6b + 2c)\,y = 0 \tag{2.25}$$

e de (2.25) chegamos a $d = -3a$ e $c = -3b$. O polinômio é $u(x,y) = ax^3 + by^3 - 3bx^2y - 3axy^2$, com harmônica conjugada $v(x,y) = bx^3 + 3ax^2y - 3bxy^2 - ay^3$, e a função inteira correspondente é $f(z) = (a + ib)\,z^3$.

6. Se $f(z) = u + iv$ é analítica em D, então u e v são harmônicas conjugadas e $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$. Logo:

$$\begin{aligned}\Delta\left(|f(z)|^2\right) &= \Delta\left(u^2\right) + \Delta\left(v^2\right) = 2\left(u_x^2 + u_y^2\right) + 2\left(u_x^2 + u_y^2\right)\\ &= 2\left(u_x^2 + v_x^2\right) + 2\left(u_y^2 + v_y^2\right) = 4\left|f'(z)\right|^2.\end{aligned}$$

3. Funções Elementares

Além dos polinômios $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ e das funções racionais (quocientes de polinômios), já tratadas nos capítulos anteriores, outras funções $w = f(z)$, de uma variável complexa, merecem destaques. Neste capítulo abordaremos funções do tipo:

(a) Exponencial: $w = \exp(z)$.

(b) Trigonométricas: $w = \cos z$, $w = \operatorname{sen} z$, $w = \tan z$, etc.

(c) Logarítmica: $w = \operatorname{Log} z$.

(d) Expoentes Complexos: $w = z^\lambda$ e $w = \lambda^z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ fixo.

Estas funções, combinadas com polinômios e funções racionais, são denominadas *funções elementares*.

3.1 A Função $w = \exp(z)$

Dado um número complexo $z = x + iy$, a *exponencial de* z, indicada por $\exp(z)$ ou e^z, é definida pela relação:

$$\exp(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{3.1}$$

Dessa forma, obtemos a função complexa

$$\begin{aligned} \exp: \quad & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z \longmapsto \exp(z), \end{aligned}$$

onde identificamos as partes real $u(x,y) = e^x \cos y$ e imaginária $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ como funções de classe C^1 e que satisfazem às equações de Cauchy-Riemann em todo ponto z do plano complexo. Em outras palavras, a função $f(z) = \exp(z)$ é uma função inteira (veja o Exemplo 2.3.22). A derivada de $\exp(z)$ é dada por:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como consequência direta da definição, temos as seguintes propriedades:

(a) Dado $z = x + iy$, temos $|e^z| = e^x > 0$ e $\operatorname{Arg}(e^z) = y$.

(b) Se $k \in \mathbb{Z}$, então $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$.

(c) Dado um número complexo z, então $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

EXEMPLO 3.1.1 *É claro que a equação* $\exp(z) = 0$ *não tem solução, já que* $|e^z| = e^x > 0$, $\forall\ z$. *Por outro lado, ao contrário do que ocorre no caso real, a equação* $\exp(z) = -1$ *tem solução. De fato:*

$$\exp(z) = -1 \Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} e^x = 1, \quad \textit{isto é, } x = 0 \\ y = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Assim, $\exp(z) = -1$ *tem uma infinidade de soluções, dadas por* $z = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 3.1.2 *Dado um número complexo não nulo* w, *a equação* $\exp(z) = w$ *tem uma infinidade de soluções. De fato, considerando* $z = x + iy$ *e* $w = \rho^{i\phi}$, *temos:*

$$\exp(z) = w \Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} e^x = \rho, \quad \textit{isto é, } x = \ln\rho \\ y = \phi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Daí resulta que as soluções da equação $e^z = w$ *são dadas por* $z_k = \ln\rho + (\phi + 2k\pi)\, i,\ k \in \mathbb{Z}$.

OBSERVAÇÃO 3.1.3 *Levando em conta que* $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Arg}(e^z)$, *segue dos Exemplos 3.1.1 e 3.1.2 que a função* $w = \exp(z)$ *é uma bijeção do conjunto* $S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ *sobre a imagem* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, *com inversa determinada por:*

$$w = e^z \Leftrightarrow z = \ln|w| + i \operatorname{Arg}(w), \quad w \neq 0. \tag{3.2}$$

LEMA 3.1.4 (Propriedades operacionais de $\exp(z)$) *Dados os números complexos* z *e* w, *então:*

(a) $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$. *Por indução, prova-se que* $(\exp z)^n = \exp(nz)$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\dfrac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

(c) $\dfrac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z - w)$.

PROVA Dados $z = a + ib$ e $w = c + id$, então $z + w = a + c + i(b + d)$ e do Lema 1.2.4, deduzimos que:

(a) $\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(e^a \cdot e^{ib}\right)\left(e^c \cdot e^{id}\right) = e^{a+c} \cdot e^{i(b+d)} = \exp(z + w)$.

(b) $\dfrac{1}{\exp(z)} = \dfrac{1}{e^a \cdot e^{ib}} = e^{-a} \cdot e^{-ib} = \exp(-z)$.

(c) $\dfrac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z) \cdot \dfrac{1}{\exp(w)} = \exp(z) \cdot \exp(-w) = \exp(z-w)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 3.1)**

1. Escreva as funções abaixo sob a forma $u(x,y) + iv(x,y)$.

   (a) $w = \exp(2z)$ **(b)** $w = \exp\left(z^2\right)$ **(c)** $w = \exp(i\overline{z})$.

2. Em cada caso, determine as soluções da equação:

   (a) $\exp(2z) = -1$ **(b)** $\exp(z) = i$ **(c)** $\exp(z) = -2$ **(d)** $\exp\left(z^2\right) = 1$ **(e)** $\exp(2z-1) = 1$.

3. Repita o exercício precedente com as equações:

   (a) $\operatorname{Re}(e^z) = 0$ **(b)** $e^z + 6e^{-z} = 5$ **(c)** $\exp(3z-4) = -1$ **(d)** $\exp(z) = 1 + \sqrt{3}i$.

4. Determine os valores de z para os quais se tem $\exp(i\overline{z}) = \overline{\exp(iz)}$.

5. Mostre que $|\exp(-2z)| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$.

6. Esboce graficamente o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |\exp(iz)| < 1\}$ e identifique sua fronteira. O conjunto S é aberto? É conexo?

7. Simplifique a expressão $\exp(2z+i) + \exp\left(iz^2\right)$ para deduzir que

$$\left|\exp(2z+i) + \exp\left(iz^2\right)\right| \leq \exp(2\operatorname{Re} z) + \exp[-2\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)].$$

8. Se $\exp(z)$ é real, mostre que $\operatorname{Im}(z) = k\pi$.

9. Determine onde as funções $f(z) = \exp(\overline{z})$ e $g(z) = \dfrac{e^z + z - i}{e^z - 1}$ são analíticas.

10. Se $f(z)$ é analítica em um domínio D, mostre que $F(z) = \exp[f(z)]$ também o é. Como consequência, deduza que as funções $f(z) = \exp\left(z^2\right)$ e $g(z) = \exp(\pm iz)$ são inteiras.

11. Mostre que a função $\varphi(x,y) = \operatorname{Re}\left(e^{1/z}\right)$ é harmônica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

12. Suponha que $f(z) = u + iv$ seja analítica em D. Explique a razão das funções

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y) \text{ e } V(x,y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x,y)$$

serem harmônicas em D e $V(x,y)$ ser harmônica conjugada de $U(x,y)$.

13. Determine as singularidades da função $w = \exp\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$.

14. Mostre que a tranformação $f(z) = \dfrac{e^{i\phi}(z-z_0)}{\overline{z_0}z - 1}$, $\phi \in \mathbb{R}$ e $|z_0| < 1$, transforma o disco $|z| \leq 1$ no disco $|w| \leq 1$. Descreva, geometricamente, a transformação no caso em que $z_0 = 0$.

15. Se $\operatorname{Im}(z_0) < 0$, qual a imagem do semiplano $[y \leq 0]$ pela transformação $w = \dfrac{e^{i\phi}(z-z_0)}{\overline{z_0}z - 1}$?

3.2 As Funções Trigonométricas Complexas

3.2.1 As Funções $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$

Para definir as funções trigonométricas $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$, recordemos que:

$$\exp(ix) = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \exp(-ix) = \cos x - i \operatorname{sen} x,$$

de onde deduzimos que

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}[\exp(ix) - \exp(-ix)] \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1}{2}[\exp(ix) + \exp(-ix)], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Motivados pelas relações (3.3), definimos as primeiras funções trigonométricas:

$$\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}[\exp(iz) - \exp(-iz)] \quad \text{e} \quad \cos z = \frac{1}{2}[\exp(iz) + \exp(-iz)] \tag{3.4}$$

e o leitor pode comprovar diretamente da definição que:

$$\overline{\cos z} = \cos(\overline{z}) \quad \text{e} \quad \overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen}(\overline{z}).$$

LEMA 3.2.1 *As funções* $\operatorname{sen} z$ *e* $\cos z$ *definidas em* (3.4) *são inteiras, com derivadas dadas por:*

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z \quad e \quad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z.$$

PROVA As funções $z \mapsto \exp(iz)$ e $z \mapsto \exp(-iz)$ são inteiras, de modo que $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ também o são. Além disso,

(a) $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \dfrac{1}{2i}[i\exp(iz) + i\exp(-iz)] = \dfrac{1}{2}[\exp(iz) + \exp(-iz)] = \cos z.$

(b) $\dfrac{d}{dz}(\cos z) = \dfrac{1}{2}[i\exp(iz) - i\exp(iz)] = -\dfrac{1}{2i}[\exp(iz) - \exp(-iz)] = -\operatorname{sen} z.$ ■

3.2.2 Algumas Identidades Trigonométricas

Algumas identidades trigonométricas envolvendo as funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são estabelecidas com auxílio das funções hiperbólicas reais:

$$\operatorname{senh} y = \frac{1}{2}\left(e^{y} - e^{-y}\right) \quad \text{e} \quad \cosh y = \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right), \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

As seguintes propriedades das funções hiperbólicas reais decorrem diretamente da definição (3.5) e as demonstrações são deixadas para o leitor, como parte do processo de treinamento.

(i) $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1.$

(ii) $\operatorname{senh} y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

(iii) $\dfrac{d}{dy}(\operatorname{senh} y) = \cosh y$ e $\dfrac{d}{dy}(\cosh y) = \operatorname{senh} y.$

(iv) A função $y \mapsto \cosh y$, além de ser uma função par, é crescente no intervalo $(0, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$. A função $y \mapsto \operatorname{senh} y$ é ímpar e crescente em $(-\infty, +\infty)$.

(v) A equação $\cosh y = 0$ não tem solução real e dado um número real a, as soluções da equação $\cosh y = \cosh a$ são $y = \pm a$.

Assim como ocorre no caso real, as funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ também são 2π-periódicas e temos a *relação fundamental*:

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{3.6}$$

De fato, a periodicidade decorre diretamente da propriedade: $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$, $\forall z$, e para comprovar a *Identidade Fundamental* (3.6), notamos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left[\tfrac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\right]^2 + \left[\tfrac{1}{2i}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)\right]^2 \\ &= -\tfrac{1}{4}\left[e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}\right] + \tfrac{1}{4}\left[e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right] = 1. \end{aligned}$$

LEMA 3.2.2 *Dado um número complexo z, temos*:

(a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i\,(\cos x \operatorname{senh} y)\,.$

(b) $\cos z = \cos x \cosh y - i\,(\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)\,.$

PROVA As demonstrações de **(a)** e **(b)** são similares e para ilustrar faremos o item **(a)**. Considerando $z = x + iy$, temos que $iz = -y + ix$ e, portanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \frac{1}{2i}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right) = \frac{1}{2i}\left[e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x)\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[i \operatorname{sen} x \left(e^{y} + e^{-y}\right) - \cos x \left(e^{y} + e^{-y}\right)\right] = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) + i \cos x \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) \\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

COROLÁRIO 3.2.3 *Se z é um número complexo, então:*

(a) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$

(b) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y.$

PROVA Considerando $z = x + iy$, resulta da parte **(a)** do Lema 3.2.2 que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y \\
&= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \operatorname{senh}^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\
&= \operatorname{sen}^2 x (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y \\
&= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y.
\end{aligned}$$

Para provar a parte **(b)** use a parte **(b)** do Lema 3.2.2. $\blacksquare$

EXEMPLO 3.2.4 (Os zeros de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$) *Usando o Corolário 3.2.3, vamos encontrar os zeros das funções* $\operatorname{sen} z$ *e* $\cos z$.

SOLUÇÃO Se $z = x + iy$, temos que $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow |\operatorname{sen} z|^2 = 0$ e do Corolário 3.2.3, resulta:

$$|\operatorname{sen} z| = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \operatorname{senh}^2 y = 0 \Leftrightarrow y = 0, \end{array} \right.$$

e a partir daí, deduzimos que $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. De modo similar, deduzimos que

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2.3 Outras Funções Trigonométricas

As outras funções trigonométricas são definidas de modo natural, como no caso de uma variável real. Temos:

(a) TANGENTE: $\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$

(b) COTANGENTE: $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

(c) SECANTE: $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$

(d) COSSECANTE: $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

As identidades básicas e as fórmulas de derivação são obtidas com as regras já estabelecidas para as funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$. Vejamos dois exemplos para ilustrar.

EXEMPLO 3.2.5 *Provar a identidade*

$$1 + \tan^2 z = \sec^2 z.$$

SOLUÇÃO Temos que

$$1 + \tan^2 z = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z.$$

EXEMPLO 3.2.6 *Vamos estabelecer a regra de derivação*

$$(\operatorname{cotg} z)' = -\operatorname{cosec}^2 z.$$

SOLUÇÃO Usando a regra do quociente, temos:

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{cotg} z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\right) = \frac{-\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z - \cos z \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = -\operatorname{cosec}^2 z.$$

Outras identidades e regras de derivação envolvendo essas funções são deixadas como exercícios.

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 3.2)**

1. Encontre as soluções das seguintes equações:

   (a) $\operatorname{sen} z = 2$ **(b)** $\cos z = 2$ **(c)** $\cos z = \sqrt{2}$ **(d)** $\cos z = 1/2$.

2. Verifique que as funções $\operatorname{Re}(\cos z)$ e $\operatorname{Im}(\operatorname{sen} z)$ são harmônicas no plano $\mathbb{C}$.

3. Estabeleça as seguintes identidades trigonométricas:

   (a) $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$.

   (b) $\cos(iz) = \cosh z$.

   (c) $1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$.

   (d) $|\cos z|^2 - \left|\operatorname{sen}^2 z\right| = \cos(2 \operatorname{Re} z)$.

   (e) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$.

   (f) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$.

   (g) $2 \operatorname{sen}(z + w) \cdot \operatorname{sen}(z - w) = \cos(2w) - \cos(2z)$.

   (h) $2 \cos(z + w) \cdot \operatorname{sen}(z - w) = \operatorname{sen}(2z) - \operatorname{sen}(2w)$.

4. Determine os valores de z para os quais $\cos z$ é real.

5. Determine onde a função $f(z) = \dfrac{e^z + z - i}{(e^z - 1)\cos z}$ é analítica.

6. Dado $z = x + iy$, comprove as seguintes desigualdades:

   (a) $|\operatorname{senh} y| \leq |\operatorname{sen} z| \leq \cosh y$ **(b)** $|\operatorname{sen} x| \leq |\operatorname{sen} z|$ **(c)** $|\cos x| \leq |\cos z|$.

7. Determine os valores de z para os quais:

   (a) $\cos(i \cdot \overline{z}) = \overline{\cos(iz)}$ **(b)** $\operatorname{sen}(i \cdot \overline{z}) = \overline{\operatorname{sen}(iz)}$.

8. Determine todas as raízes da equação $\operatorname{sen} z = \cosh 4$.

9. **FUNÇÕES HIPERBÓLICAS** As funções hiperbólicas $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$ são definidas por:

$$\operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right). \tag{3.7}$$

   Com base na definição (3.7), vemos que $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$ são funções inteiras. Agora, mostre que:

   (a) $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{senh} z) = \cosh z$ e $\dfrac{d}{dz}(\cosh z) = \operatorname{senh} z$.

   (b) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

(c) $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.

(d) $\cosh z = \cosh x \cos y - \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$.

(e) $\operatorname{senh}(z + \pi i) = -\operatorname{senh} z$ e $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$.

10. Em cada caso, determine as raízes da equação.

(a) $2\cosh z = 1$ **(b)** $\operatorname{senh} z = i$ **(c)** $\cosh z = -2$.

11. Mostre que $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = 1$ se, e somente se, z é real.

3.3 Logarítmos & Expoentes

O Exemplo 3.1.2 é a motivação para se definir o *logarítmo complexo*. Dado um número complexo não nulo $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, o *logarítmo* de z, indicado por $\log z$, é definido por:

$$\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

o que torna a função $z \longmapsto \log z$, $z \neq 0$, *plurívoca* ou *multivalente*. Em outras palavras, se z é um número complexo não nulo, então $\log z$ representa um conjunto infinito de números complexos e, no caso em que $k = 0$, obtemos o *valor principal* de $\log z$, denotado por $\operatorname{Log} z$, isto é:

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \ -\pi < \theta \leq \pi.$$

É claro que se $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, então $w = \operatorname{Log} z \Leftrightarrow z = \exp(w)$. Além disso, fixado k, a aplicação $z = \exp w$ define uma bijeção da faixa $(2k-1)\pi < \operatorname{Im}(w) \leq (2k+1)\pi$, sobre $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, cuja inversa é dada por:

$$w = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \ r > 0, \ -\pi < \theta \leq \pi.$$

EXEMPLO 3.3.1 *Temos que* $\operatorname{Log} i = i\pi/2$ *e* $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$. *Por outro lado:*

$$\begin{aligned} \log i &= \{(2k + 1/2)\pi i, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} \quad e \\ \log(-1) &= \{(2k+1)\pi i, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.2 *Do Exemplo (3.3.1), vemos que:*

$$\operatorname{Log}\left(i^2\right) = \operatorname{Log}(-1) = i\pi = 2\,(i\pi/2) = 2\operatorname{Log} i$$

que se assemelha ao caso real, onde temos $\ln\left(x^2\right) = 2\ln x,\ x > 0$. *Em se tratando de* $\log z$, *que representa um conjunto de valores, temos* $\log\left(i^2\right) \neq 2\log i$. *De fato:*

$$\begin{aligned} 2\log i &= \{(4k+1)\,\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ \log\left(i^2\right) &= \log(-1) = \{(2k+1)\,\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

e esses conjuntos são distintos, isto é, $\log\left(i^2\right) \neq 2\log i$. *Notamos que* $3\pi i \in \log\left(i^2\right)$ *e* $3\pi i \notin 2\log i$.

EXEMPLO 3.3.3 *Se* $z = w = -1$, *então:*

$$\begin{aligned} \log(z\cdot w) &= \log 1 = \ln 1 + (0 + 2k\pi i) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad e \\ \log z + \log w &= \log(-1) + \log(-1) = (2k+1)\,\pi i + (2n+1)\,\pi i = 2\,(k+n+1)\,\pi i, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

e, portanto, $\log(z\cdot w) = \log z + \log w$. *Essa igualdade deve ser interpretada da seguinte forma: qualquer valor de* $\log(z\cdot w)$ *se expressa como soma de um valor de* $\log z$ *com um valor de* $\log w$.

EXEMPLO 3.3.4 *A propriedade* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, *válida no caso real, com* $x > 0$ *e* $y > 0$, *seria válida no caso complexo para a função* $\operatorname{Log} z$? *Se considerarmos* $z = w = -1$, *obteremos:*

$$\operatorname{Log}(z\cdot w) = 0 \quad e \quad \operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(w) = \pi i,$$

de modo que a propriedade não é válida, em geral, para a função $\operatorname{Log} z$.

EXEMPLO 3.3.5 *Um fato que nos parece óbvio é que* $\exp(\log z) = z$, *para* $z \neq 0$. *Entretanto, a relação* $\log(e^z) = z$ *não ocorre para todo* z, *já que* $\log(e^z) = z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. *Na verdade,* z *é apenas um dos valores assumidos por* $\log(\exp z)$.

3.3.1 Ramos de $w = \log z$ (Propriedades Analíticas de Log$z$)

A função $w = \operatorname{Log} z = \ln r + i\theta,\ r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi$, tem parte real $u(r,\theta) = \ln r$ e parte imaginária $v(r,\theta) = \theta$ e no domínio $D : r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$, onde as funções u e v são contínuas, temos a

continuidade de $\operatorname{Log} z$. Para comprovarmos que D é o domínio máximo no qual $\operatorname{Log} z$ é contínua, basta observamos que u não está definida na origem e, por outro lado, $\operatorname{Log} z$ é descontínua em qualquer ponto $z = re^{i\pi},\ r > 0$, do eixo negativo dos x. De fato, em um tal ponto $\operatorname{Log} z$ tem valor $\ln r + i\pi$ e considerando $z_n = re^{i(-\pi+1/n)}$, temos que $z_n \to z$ e $\operatorname{Log}(z_n)$ não converge para $\operatorname{Log} z$, já que

$$\operatorname{Log}(z_n) = \ln r + i(-\pi + 1/n) \to \ln r - i\pi.$$

No domínio D, as funções $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ são de classe C^2 e as equações de Cauchy-Riemann são facilmente comprovadas:

$$v_\theta = ru_r = 1/r \quad \text{e} \quad u_\theta = -rv_r = 0$$

e, por conseguinte. $w = \operatorname{Log} z$ é analítica em D, com derivada dada por

$$\frac{d}{dz}(\operatorname{Log} z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}, \quad \text{em } D.$$

A notação $\operatorname{Log} z$ é usada para denotar o valor principal de $\log z$ e, também, a função analítica obtida por restrição de $\operatorname{Log} z$ ao domínio $D : r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$. Se na definição $\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta$ restringirmos o valor de θ ao intervalo $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, α fixado, a função

$$\log z = \ln r + i\theta,\ r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

é unívoca, ou univalente, na faixa horizontal $\alpha < \operatorname{Im}(w) < \alpha + 2\pi$.

Por *ramo* de uma função plurívoca $f(z)$ entendemos qualquer função unívoca F, analítica em algum domínio D, no qual $F(z)$ é um dos valores de $f(z)$.

EXEMPLO 3.3.6 *O* ***ramo principal*** *da função* $f(z) = \operatorname{Log} z$ *é definido por:*

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta},\ r > 0,\ -\pi < \theta < \pi.$$

EXEMPLO 3.3.7 *Considerando o ramo principal de* $\operatorname{Log} z$*, vamos identificar a região de analiticidade da função* $f(z) = \operatorname{Log}(z + \lambda)$*, sendo* λ *um número real positivo. Se* $z = x + iy$*, a função* $w = f(z)$*, definida por*:

$$f(z) = \operatorname{Log}(x + \lambda + iy)$$

é analítica nos pontos $z = x + iy$ *fora da semireta* $\{(x,y) : x + \lambda \leq 0 \text{ e } y = 0\}$*, isto é, fora do* ***corte*** $L = \{(x,0) : x \leq -\lambda\}$*, como sugere a Figura 3.1*

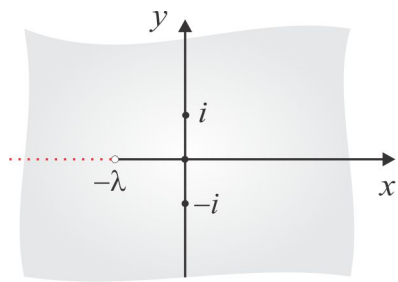


Figura 3.1: Domínio de $\operatorname{Log}(\lambda + z)$.

EXEMPLO 3.3.8 *O domínio de analiticidade da função* $f(z) = \operatorname{Log}\left(2 + z^2\right)$ *é determinado de forma similar ao Exemplo (3.3.7); excluímos os pontos* z *para os quais* z^2+2 *estão no corte* $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$. *Temos*:

$$f(z) = \operatorname{Log}\left(2 + x^2 - y^2 + 2xyi\right)$$

e $f(z)$ *será analítica nos pontos fora da semireta* $\left\{(x, y) : 2 + x^2 - y^2 \leq 0 \text{ e } xy = 0\right\}$. *A opção* $y = 0$ *é descartada e com* $x = 0$ *chegamos a* $|y| \geq \sqrt{2}$. *O domínio de analiticidade de* $f(z)$, *ilustrado na Figura 3.2, é constituído dos pontos fora das semiretas* $L = \left\{(0, y) : |y| \geq \sqrt{2}\right\}$.

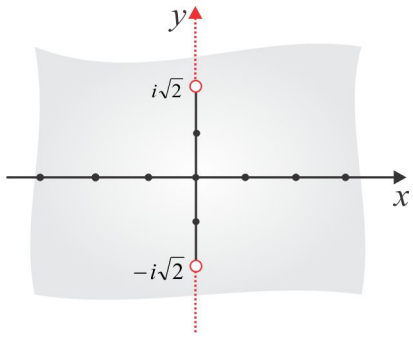


Figura 3.2: Domínio de $\operatorname{Log}\left(2 + z^2\right)$.

3.3.2 Propriedades & Consequências

Algumas propriedades do logarítmo complexo são válidas para $\log z$ e outras para $\operatorname{Log} z$ e é necessário separar os casos. Por exemplo, a propriedade clássica $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, válidas no caso real para

$x > 0$ e $y > 0$, não permanece válida no caso complexo, como ilustra o Exemplo (3.3.4). Vejamos alguns casos.

(a) Se $z \neq 0$, então $\exp(\log z) = z$ e, de acordo com o que vimos no Exemplo 3.3.5, não é verdade, em geral, que $\log(\exp z) = z$.

(b) Se $z \neq 0$, então $w = \text{Log}(z) \Leftrightarrow z = \exp(w)$. De fato, considerando $z = x + iy$, temos:

$$\text{Log}(\exp z) = \text{Log}\left(e^x \cdot e^{iy}\right) = \ln(e^x) + iy = x + iy = z.$$

Por outro lado, dado $w = \rho e^{i\varphi},\ \rho > 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi$, então:

$$\exp(\text{Log}\, w) = \exp(\ln \rho + i\varphi) = \exp(\ln \rho) \cdot \exp(i\varphi) = \rho e^{i\varphi} = w.$$

(c) Se z e w são números complexos não nulos, então $\log(z \cdot w) = \log(z) + \log(w)$. Esta igualdade deve ser interpretada como uma igualdade entre conjuntos, isto é, qualquer valor de $\log(z \cdot w)$ pode ser escrito como soma de um valor de $\log(z)$ com um valor de $\log(w)$. Para comprová-la, sejam $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, com $r > 0$ e $\rho > 0$, e observemos que:

$$\begin{aligned} \log z + \log w &= \log(r \cdot e^{i\theta}) + \log(\rho \cdot e^{i\varphi}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) + \ln \rho + i(\varphi + 2n\pi) \\ &= \ln(r\rho) + i[\theta + \varphi + 2(k+n)\pi] = \log\left[(r\rho) \cdot e^{i(\theta+\varphi)}\right] = \log(z \cdot w). \end{aligned}$$

No Exemplo 3.3.4 enfatizamos que a relação $\text{Log}(z \cdot w) = \text{Log}\, z + \text{Log}\, w$ não é válida, em geral, para a função $\text{Log}\, z$. Vale ressaltar, ainda, que o conjunto de valores $\log z + \log z$ pode ser diferente do conjunto $2 \log z$. Considere $z = -1$ e verifique que os conjuntos $\log z + \log z$ e $2 \log z$ são distintos.

(d) Se $w \neq 0$, então $\log(1/w) = -\log w$. De fato, considerando $w = \rho e^{i\varphi},\ \rho > 0$ e $k = -n$, temos:

$$\begin{aligned} \log(1/w) &= \log(\rho^{-1} \cdot e^{-i\varphi}) = \ln\left(\rho^{-1}\right) + i(-\varphi + 2n\pi) \\ &= -\ln \rho - i(\varphi + 2k\pi) = -\log(w). \end{aligned}$$

(e) Decorre de **(c)** e **(d)** que se z e w são números complexos não nulos, então:

$$\log(z/w) = \log(z) - \log(w).$$

LEMA 3.3.9 (Propriedade da Potência) *Se $z = re^{i\theta},\ -\pi < \theta \leq \pi$, um complexo não nulo, então:*

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n}\log(z), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

PROVA Considerando que $z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\exp\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\cdot i\right)$, $k = 0, 1, 2, , n-1$, temos:

$$\log\left(z^{1/n}\right) = \ln\left(\sqrt[n]{r}\right) + i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n} + 2m\pi\right) = \frac{1}{n}\ln r + i\left(\frac{\theta+2k'\pi}{n}\right), \tag{3.8}$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $k' = k + nm$. Por outro lado,

$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\left[\ln r + i(\theta + 2m'\pi)\right] = \frac{1}{n}\ln r + i\left(\frac{\theta+2m'\pi}{n}\right), \quad m' \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Vemos que os conjuntos de números complexos $S_1 = \log\left(z^{1/n}\right)$ e $S_2 = \frac{1}{n}\log z$ dados, respectivamente, por (3.8) e (3.9) são iguais. ■

Finalizamos esta seção ressaltando que, ao contrário do caso real, a propriedade $\log(z^n) = n\log z$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, não é válida, em geral, no caso complexo. De fato, dado $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, temos:

$$\begin{aligned} \log(z^n) &= \log\left(r^n e^{in\theta}\right) = n\ln r + i(n\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ n\log(z) &= n\log\left(re^{i\theta}\right) = n\ln r + in(\theta + 2k'\pi), \quad k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e para que $n\ln r + i(n\theta + 2k\pi) = n\ln r + in(\theta + 2k'\pi)$, devemos ter $k = nk'$, isto é, k dever ser um múltiplo inteiro de n. É claro que $n\log z$ é um subconjunto de $\log(z^n)$, mas, nem sempre se tem $\log(z^n) \subset n\log z$. Por exemplo, considerando $n = 2$ e $k = 1$, vemos que $z = 2\ln r + i(2\theta + 2\pi)$ pertence ao conjunto $\log\left(z^2\right)$ e não pertence ao conjunto $2\log z$, porque não existe um inteiro k', tal que $z = 2\ln r + 2i(\theta + 2k'\pi)$.

3.3.3 Expoentes Complexos

Da relação

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n}\log z, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.10}$$

deduzimos que

$$\exp[\log(z^{1/n})] = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) \tag{3.11}$$

e, para cada $z \neq 0$ fixo, o lado direito da equação (3.11) assume n valores distintos. De fato:

$$\frac{1}{n}\log z = \frac{1}{n}\left[\ln r + i(\theta + 2k\pi)\right] = \ln\left(\sqrt[n]{r}\right) + i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e, assim,

$$\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right].$$

Considerando que a expressão $\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ assume n valores distintos, correspondentes aos valores $k = 0, 1, \ldots, n-1$, deduzimos que o mesmo ocorre com $\exp\left(\frac{1}{n}\log z\right)$. Por outro lado, temos que $z^n = \exp(n\log z),\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots,\ z \neq 0$, e, também:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \exp\left(n\log\frac{1}{z}\right) = \exp(-n\log z).$$

Temos, portanto, as seguintes relações:

$$z^k = \exp(k\log z), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \tag{3.12}$$

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

As relações (3.12) e (3.13) motivam o conceito de potência com expoente complexo que, em geral, definem funções multivalentes.

DEFINIÇÃO 3.3.10 *Dados $z \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, a potência complexa z^λ é definida pela expressão:*

$$z^\lambda = \exp(\lambda\log z). \tag{3.14}$$

Por ramo principal de z^λ entendemos a função univalente $\Phi(z) = \exp(\lambda\,\mathrm{Log}\,z)$, definida no domínio $D : r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$.

EXEMPLO 3.3.11 *Determinemos a potência i^{-2i}. Temos*

$$i^{-2i} = \exp(-2i\log i) = \exp[-2i\,(2k\pi + \pi/2)\,i], \quad k \in \mathbb{Z},$$

e daí resulta

$$i^{-2i} = \exp[(4k+1)\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O exemplo a seguir, mostra, através de igualdade entre conjuntos, uma propriedade da potência complexa de z.

EXEMPLO 3.3.12 *Assim como ocorre com os expoentes inteiros, se $z \neq 0$ e λ é um número complexo dado, então $z^{-\lambda} = \dfrac{1}{z^\lambda}$. De fato, de (3.14) temos que:*

$$z^{-\lambda} = \exp(-\lambda\log z) = \frac{1}{\exp(\lambda\log z)} = \frac{1}{z^\lambda}.$$

Os valores de $z^{-\lambda}$ *e de* $\dfrac{1}{z^{\lambda}}$ *são, respectivamente,*

$$\exp[-\lambda(\ln r + i(\theta + 2k\pi))] \quad e \quad \{\exp[\lambda(\ln r + i(\theta + 2k\pi))]\}^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e esses conjuntos de valores são iguais.

LEMA 3.3.13 *O ramo principal* $\Phi(z) = \exp(\lambda \operatorname{Log} z)$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, *é analítico e a derivada é dada por:*

$$\Phi'(z) = \frac{d}{dz}(z^{\lambda}) = \lambda z^{\lambda - 1}.$$

PROVA O ramo principal $\Phi(z) = \exp(\lambda \operatorname{Log} z)$ é a composição das funções analíticas $z \longmapsto \lambda \operatorname{Log} z$ e $w \longmapsto e^{w}$ sendo, portanto, analítico no domínio considerado. A partir da Regra da Cadeia, obtemos:

$$\begin{aligned}
\Phi'(z) &= \frac{d}{dz}(z^{\lambda}) = \frac{d}{dz}\left[\exp(\lambda \operatorname{Log} z)\right] = \frac{\lambda}{z}\left[\exp(\lambda \operatorname{Log} z)\right] \\
&= \lambda \left[\frac{\exp(\lambda \operatorname{Log} z)}{\exp(\operatorname{Log} z)}\right] = \lambda \exp[(\lambda - 1)\operatorname{Log} z] = \lambda z^{\lambda - 1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.14 *Vejamos o ramo principal de* $\sqrt{z}$. *Temos que*:

$$\begin{aligned}
\sqrt{z} &= \exp\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Log} z\right) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\ln r + \tfrac{1}{2} i\theta\right) = \exp\left(\ln\sqrt{r} + i\theta/2\right) \\
&= \sqrt{r}\exp\left(i\theta/2\right) = \sqrt{r}[\cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2)].
\end{aligned}$$

A analiticidade decorre do Lema (3.3.13), *mas, pode ser investigada diretamente a partir das componentes*

$$u(r,\theta) = \sqrt{r}\cos(\theta/2) \quad e \quad v(r,\theta) = \sqrt{r}\operatorname{sen}(\theta/2),$$

que são de classe C^2 *e as Equações de Cauchy-Riemann são facilmente comprovadas, notando que*:

$$\begin{aligned}
u_r &= \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos(\theta/2) \quad e \quad v_\theta = \frac{\sqrt{r}}{2}\cos(\theta/2) \\
u_\theta &= -\frac{\sqrt{r}}{2}\operatorname{sen}(\theta/2) \quad e \quad v_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\operatorname{sen}(\theta/2)
\end{aligned}$$

e, portanto, $u_r = (1/r)\, v_\theta$ *e* $u_\theta = -(1/r)\, v_r$. *A derivada pode ser obtida diretamente do Lema* (3.3.13), *com* $\lambda = 1/2$, *ou pela fórmula* (2.16) *do Capítulo* 2. *Temos*:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\sqrt{z}) &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}}\left[\cos(\theta/2) + i\operatorname{sen}(\theta/2)\right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.15 *No ramo principal* $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$, *temos* $\sqrt{-1} = i$. *De fato*:

$$\sqrt{-1} = \exp\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(-1)\right) = \exp\left[\tfrac{1}{2}(\ln 1 + i\pi)\right] = e^{i\pi/2} = i.$$

Por outro lado, se considerarmos para $\sqrt{z}$ *o ramo* $2\pi \leq \operatorname{Arg} z < 4\pi$, *teremos* $\sqrt{-1} = -i$, *pois, neste caso,* $\operatorname{Arg}(-1) = 3\pi$ *e, portanto*:

$$\sqrt{-1} = \exp\left(\tfrac{1}{2}\log(-1)\right) = \exp\left[\tfrac{1}{2}(\ln 1 + 3\pi i)\right] = e^{3\pi i/2} = -i.$$

EXEMPLO 3.3.16 *Em qual ramo devemos considerar* $\sqrt{z}$, *para que se tenha* $\sqrt{4} = -2$? *No ramo* $\pi/2 < \theta < 5\pi/2$, *temos que* $\operatorname{Arg}(4) = 2\pi$, *de modo que:*

$$\sqrt{4} = \exp\left[\tfrac{1}{2}(\ln 4 + 2\pi i)\right] = 2e^{\pi i} = -2.$$

EXEMPLO 3.3.17 *Consideremos a função* $f(z) = \sqrt{z^2+4}$, *determinada pela condição* $f(0) = -2$, *isto é,* $\sqrt{4} = -2$, *e identifiquemos sua região de analiticidade. Temos*:

$$f(z) = \exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(z^2+4\right)\right]$$

e no ramo principal de $\operatorname{Log} z$, *a função* $f(z)$ *é analítica fora dos cortes* $L = \{(x, \pm 2) : x \leq 0\}$, *mas, a condição* $\sqrt{4} = -2$ *exige uma mudança no ramo de* $\operatorname{Log} z$. *No domínio*

$$\pi/2 < \operatorname{Arg}(z - 2i) < 5\pi/2 \quad e \quad -\pi/2 < \operatorname{Arg}(z + 2i) < 3\pi/2$$

temos que $f(z) < 0$, *para todo* z *real, e as funções* $\sqrt{z \pm 2i}$ *são analíticas. O domínio, ilustrado na Figura 3.3, consiste dos pontos do plano* $\mathbb{C}$, *fora dos cortes* $[(0, y);\ y > 2]$ *e* $[x = 0;\ y < -2]$.

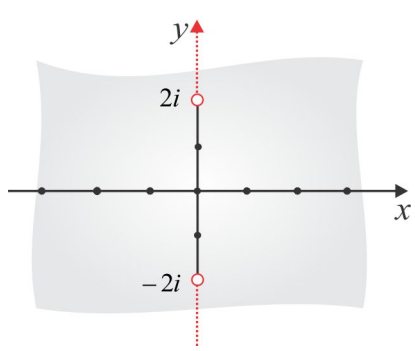


Figura 3.3: Domínio de $\sqrt{z^2+4}$.

EXEMPLO 3.3.18 *Fixado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, a exponencial de base λ, indicada por λ^z, é definida pela relação:*

$$\lambda^z = \exp(z \log \lambda).$$

O valor principal de λ^z é a função $f(z) = \mathrm{VP}(\lambda^z) = \exp(z \operatorname{Log} \lambda)$, a qual é analítica e a derivada é dada por:

$$f'(z) = \lambda^z \operatorname{Log} \lambda.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 3.3)**

1. Em cada caso, determine as soluções da equação

   (a) $\log z = i\pi/2$ **(b)** $\log z = 1 + i\pi$.

2. Determine todos os valores e o valor principal de:

   (a) $\log(-1)$ **(b)** $\log i$ **(c)** $\log 2$ **(d)** $\log(\sqrt{i})$.

3. Dado $z = re^{i\theta}$, $z \neq 1$, $-\pi < \theta < \pi$, mostre que:

$$\mathrm{Re}[\log(z-1)] = \frac{1}{2} \ln\left(1 + r^2 - 2r\cos\theta\right).$$

   Por que a função $w = \mathrm{Re}[\operatorname{Log}(z-1)]$ deve atender à equação de Laplace fora do semieixo $L = \{(x,0) : x \leq 1\}$?

4. Determine as singularidades da função $w = \dfrac{\operatorname{Log}(z+4)}{z^2+i}$.

5. Determine o valor principal de:

   (a) i^i **(b)** $(1-i)^{4i}$ **(c)** $\sqrt{2i}$ **(d)** $(1-i)^{1+i}$ **(e)** $(-1-i\sqrt{3})^{3\pi i}$.

6. Dados $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $|z^\alpha| = |z|^\alpha$.

7. Mostre que a função $w = \operatorname{Log}(z-i)$ é analítica fora do eixo $E = \{z : \mathrm{Re}(z) \leq 0 \text{ e } \mathrm{Im}(z) = 1\}$.

8. Usando o ramo principal de $\log z$, obtenha uma expressão para $\sqrt{z-1}$.

9. Investigue a existência ou não do limite

$$\lim_{z \to -1} \operatorname{Log} z.$$

A função $\operatorname{Log} z$ é contínua no ponto $z = -1$?

10. Calcule o limite das seguintes sequências (z_n):

(a) $z_n = \dfrac{\operatorname{Log}(in)}{in}$ **(b)** $z_n = (in)^{1/in}$ **(c)** $z_n = \dfrac{\lambda^n}{n}$, $|\lambda| < 1$ **(d)** $z_n = n^{1/in}$.

11. **SOBRE O PARADOXO DE BERNOULLI** Identifique onde está o erro na sentença abaixo:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2 \cdot \log(-z) = 2 \cdot \log z \Rightarrow \log(-z) = \log z.$$

12. **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS** A função inversa de $z = \operatorname{sen} w$, representada por $w = \operatorname{arcsen} z$, é definida pela relação

$$w = \operatorname{arcsen} z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right). \tag{3.15}$$

Considerando $\xi = e^{iw}$, a equação do lado direito de (3.15) nos dá:

$$\xi^2 - 2iz\xi - 1 = 0$$

e, efetuando o completamento do quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} (\xi - iz)^2 &= 1 - z^2 \Leftrightarrow \xi - iz = \pm\left(1 - z^2\right)^{1/2} \\ &\Leftrightarrow \exp(iw) = iz + \sqrt{1 - z^2}. \end{aligned}$$

Da última igualdade, resulta:

$$w = \operatorname{arcsen} z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Agora, defina as funções $\arccos z$ e $\operatorname{arctg} z$ e estabeleça as seguintes relações:

(a) $\arccos z = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$ **(b)** $\arctan z = \frac{1}{2} \log\left(\dfrac{i + z}{i - z}\right)$.

13. Estabeleça as seguintes regras de derivação:

(a) $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{arcsen} z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$ (b) $\dfrac{d}{dz}(\arccos z) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$ (c) $\dfrac{d}{dz}(\arctan z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$.

14. **FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS** Demonstre as relações:

(a) $\operatorname{arccosh} z = \log(z+\sqrt{z^2-1})$ **(b)** $\operatorname{arcsenh} z = \log(z+\sqrt{z^2+1})$ **(c)** $\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.

3.4 Transformações do Plano $\mathbb{C}$

Para começar, investiguemos, do ponto de vista geométrico, a ação de uma transformação linear $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, em três situações simples.

(a) TRANSLAÇÃO Fixado um número complexo $\eta = a + ib$, a translação $w = z + \eta$ transforma o ponto (x, y) do plano z no ponto $(x + a, y + b)$ do plano w e uma dada região $\mathcal{R}$ do plano z é transformada em uma região congruente $\mathcal{R}^*$ do plano w. Em particular, w transforma retas em retas e círculos em círculos. Por exemplo, o círculo $z = re^{i\theta},\ r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi$, é transformado no círculo $w = \eta + re^{i\theta}$ de centro η e raio r.

(b) ROTAÇÃO Dado um número $\xi = c + id$, a transformação $w = \xi z$ consiste de uma rotação de um ângulo $\varphi = \operatorname{Arg}(\xi)$, seguida de uma contração, se $|\xi| < 1$, ou uma expansão, no caso em que $|\xi| > 1$. Essa transformação também transforma retas em retas e círculos em círculos. Note que se $z = re^{i\theta}$ e $\xi = \rho e^{i\varphi}$, então $w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$.

(c) MOVIMENTO RÍGIDO A transformção linear $T(z) = \xi z + \eta$, sendo ξ e η números complexos, é a composição da rotação $z \mapsto \xi z$ com a translação $w \mapsto w + \eta$. A imagem da circunferência $\gamma : z = re^{i\theta},\ r > 0,\ 0 < \theta \leq 2\pi$, é a circunferência $\Gamma : w = \eta + \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$, de centro η e raio $r\rho$.

EXEMPLO 3.4.1 *A transformação $w = (1+i)z + 2 - i$ é do tipo $w = \xi z + \eta$, onde $\xi = 1 + i$ e $\eta = 2 - i$. Ela consiste de uma rotação de $\pi/4$ seguida de uma translação por meio de $\eta = 2 - i$*

EXEMPLO 3.4.2 *Nos parece óbvio que a transformação $w = z/|z|^2$ é uma inversão no círculo $|z| = 1$, porque $|w| = 1/|z|$ e $\arg(w) = \arg(z)$. Ela transforma círculos em cícrculos (veja o Exercício 13).*

Se a, b, c e d são números reais, a equação

$$a\left(x^2 + y^2\right) + bx + cy + d = 0 \tag{3.16}$$

pode representar um círculo, no caso em que $a \neq 0$, ou uma reta se $a = 0$. Com a mudança de variável $u + iv = \dfrac{1}{x + iy}$, ou $w = 1/z$, a equação (3.16) torna-se:

$$d\left(u^2 + v^2\right) + bu - cv + a = 0, \tag{3.17}$$

e observando as equações (3.16) e (3.17) concluímos que:

1. Um círculo γ no plano z que não passa pela origem ($d \neq 0$) é transformado pela função $w = 1/z$ em um círculo no plano w, que não passa pela origem.

2. Um círculo no plano z que passa na origem ($d = 0$) é transformado em uma reta no plano w que não passa pela origem.

3. Uma reta no plano z que não passa pela origem é transformada em um círculo no plano w que passa na origem.

4. uma reta no plano z pela origem é transformada em uma reta no plano w pela origem.

Como casos particulares, ressaltamos:

(a) A imagem da reta vertical $\mathrm{Re}\,(z) = x_0 \neq 0$ do plano z é o círculo $u^2 + v^2 - \dfrac{u}{x_0} = 0$ do plano w;

(b) A imagem da reta horizontal $\mathrm{Im}\,(z) = y_0 \neq 0$ do plano z é o círculo $u^2 + v^2 + \dfrac{v}{y_0} = 0$ do plano w;

(c) O semiplano $\mathrm{Re}\,(z) \geq x_0 > 0$ é transformado no disco $\dfrac{u}{u^2 + v^2} \geq x_0$, isto é:

$$\left(u - \frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4x_0^2}.$$

A função $w = 1/z$ é útil no estudo das propriedades de uma função $f\,(z)$, onde se envolve o *ponto no infinito*. Quando $\lim\limits_{z \to 0} f\,(1/z) = w_0$, diremos que $f\,(\infty) = w_0$ e, nesse sentido, teremos:

$$\lim_{z \to 0} f\,(1/z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to \infty} f\,(z) = w_0.$$

Por exemplo, para tornar a função $f\,(z) = \dfrac{4z^2}{(1 - z)^2}$ contínua no infinito, colocamos $f\,(\infty) = 4$. De fato, basta observarmos que:

$$\lim_{z \to 0} f\,(1/z) = \lim_{z \to 0} \frac{4}{(z - 1)^2} = 4.$$

Por fim, observamos que $\lim\limits_{z \to 1} 1/f\,(z) = 0$ e ao definirmos $f\,(1) = \infty$, tornamos f contínua em $z = 1$.

EXEMPLO 3.4.3 (Transformação de Möebius) *A transformação $w = T(z)$ definida por:*

$$w = T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\xi z + \eta}, \tag{3.18}$$

é a Transformação de Möebius e admitindo $\xi \neq 0$ e $\alpha\eta - \beta\xi \neq 0$, ela assume a forma:

$$w = \frac{\alpha}{\xi} + \left(\frac{\alpha\eta - \beta\xi}{\xi}\right)\frac{1}{\xi z + \eta} \tag{3.19}$$

ou ainda:

$$Azw + Bz + Cw + D = 0. \tag{3.20}$$

A condição $\alpha\eta - \beta\xi \neq 0$ faz com que a transformação (3.18) não seja constante e resolvendo (3.19) encontramos:

$$z = \frac{-\eta w + \beta}{\xi w - \alpha}$$

e cada ponto do plano w é imagem de um único ponto do plano z, exceto quando $w = \alpha/\xi$. Para obtermos uma bijeção $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ basta definirmos $T(-\eta/\xi) = \infty$ e $T(\infty) = \alpha/\xi$, $\xi \neq 0$, e $T(\infty) = \infty$, no caso em que $\xi = 0$. Se $w = Tz$ é a Transformação de Möbius e definirmos $T(\infty) = \infty$, se $\xi = 0$, $T(-\eta/\xi) = \infty$ e, caso $\xi \neq 0$, colocarmos $T(\infty) = \alpha/\xi$, obteremos uma bijeção $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Finalmente, olhando a transformação T sob a forma (3.19), deduzimos que ela transforma círculos em círculos (retas são consideradas circulos de raio ∞).

EXEMPLO 3.4.4 *Dados os números complexos z_k e w_k, $k = 1, 2, 3$, a transformação de Möbius*

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \tag{3.21}$$

leva z_k em w_k, $k = 1, 2, 3$. Primeiro observamos que (3.21) pode ser escrita sob a forma:

$$(z - z_3)(z_2 - z_1)(w - w_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(z_2 - z_3)(w - w_3)(w_2 - w_1) \tag{3.22}$$

e, expandindo os produtos, vemos que (3.22) é do tipo (3.20) , isto é, (3.21) é, de fato, uma transformação de Möbius. Segue diretamente de (3.22) que $w = w_j$, quando $z = z_j$, para $j = 1$ e $j = 3$. No caso em que $z = z_2$, obtemos de (3.21):

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1),$$

que possui solução única $w = w_2$. Em resumo, a (3.21) transforma o ponto z_k no ponto w_k, $k = 1, 2, 3$.

EXEMPLO 3.4.5 *Se, por exemplo, $w_2 = \infty$, substituimos em (3.21) w_2 por $1/w_2$ e obtemos, com $w_2 = 0$, a seguinte expressão:*

$$\frac{(w - w_1)}{(w - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \tag{3.23}$$

que é a Transformação de Möbius que leva z_1, z_2 e z_3 em w_1, ∞ e w_3, respectivamente.

EXEMPLO 3.4.6 *Vamos determinar a transformação de Möebius que aplica o semiespaço $[\operatorname{Im} z \geq 0]$ sobre o disco $|z| \leq 1$, de maneira biunívoca. Mostre que a transformação leva o disco $|z| \leq 1$ no disco $|w| \leq 1$. Descreva geometricamente a transformação no caso em que $z_0 = 0$.*

- A imagem do disco $|z| \leq 1$ pela transformação $w = e^{i\phi}\dfrac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1}$, $\phi \in \mathbb{R}$ e $|z_0| < 1$.
- A imagem do semiplano $[\operatorname{Im} z \leq 0]$ pela transformação $w = e^{i\phi}\dfrac{z - z_0}{\overline{z_0}z - 1}$, sendo $\operatorname{Im}(z_0) < 0$.

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 3.4)**

1. Mostre que a função $w = iz + i$ transforma o semiplano $[\operatorname{Re}(z) > 0]$ no semiplano $[\operatorname{Im}(w) > 1]$.

2. Determine a imagem do semiplano $[\operatorname{Im}(z) > 0]$ pela transformação $w = (1 + i)z$. Primeiro usando coordenadas polares e, depois, coordenadas cartesianas.

3. Determine a imagem da faixa $x > 0,\ 0 < y < 2$ pela transformação $w = iz + 1$.

4. Em cada caso, determine a imagem do conjunto D indicado, pela transformação $w = z^2$.

   (a) $D : r \geq 0;\ 0 \leq \theta \leq \pi$ **(b)** $D : r \leq r_0;\ 0 \leq \theta \leq \pi$ **(c)** $D : xy = c;\ x^2 - y^2 = c$

   (d) $D : y = c$ **(e)** $D : x > 0;\ y > 0;\ xy < 1$ **(f)** $D : |x| + |y| \leq 1$

5. Descreva a imagem do setor circular $0 < \theta < \pi/4;\ 0 \leq r < 1$, pela transformação:

   (a) $w = z^2$ **(b)** $w = z^3$ **(c)** $w = z^4$.

6. Descreva a região do plano $\mathbb{C}$ (a pré-imagem) que é transformada pela a aplicação $w = z^2$ no retângulo $\mathcal{R} : 1 \leq u \leq 2;\ 1 \leq v \leq 2$.

7. Descreva, geometricamente, a aplicação $w = (z - 1)^{-1}$.

8. Repita o Exercício (4), com a transformação $w = 1/z$ e o conjunto D descrito por:

(a) $D: 0 < y < 1/2c$ **(b)** $D: y > c > 0$ **(c)** $D: x > 1;\ y > 0$ **(d)** $D: x^2 - y^2 = 1$.

9. Determine a imagem da faixa $x \geq 0;\ 0 \leq y \leq 1$ pela transformação $w = 1/z$.

10. Suponha que o círculo $z = z_0 + re^{i\theta},\ r > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$, seja transformado pela aplicação $w = 1/z$ em um círculo de centro w_0. Mostre que w_0 não pode ser imagem de z_0.

11. Um ponto z_0 é dito *ponto fixo* da transformação $w = T(z)$ se $T(z_0) = z_0$. Determine os *pontos fixos* da transformação $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

12. Qual a imagem da região $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,2]$ pela transformação $T(z) = (1+i)z + 2 - i$?

13. A transformação $w = 1/z$ estabelece uma correspondência entre $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $\mathbb{C}$ e pode ser escrita na forma $w = \overline{\xi}$, sendo $\xi = z/|z|^2$.

    (a) Mostre que a função w transforma um círculo γ do plano z, que não passa pela origem em um círculo Γ no plano w, que não passa pela origem.

    (b) Determine as imagens das retas $x = 1$ e $y = 2$ pela transformação w.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

3.1. FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. Considerando $z = x + iy$, encontramos:

    (a) $\exp(2z) = e^{2x}\cos(2y) + ie^{2x}\operatorname{sen}(2y)$.

    (b) $\exp(z^2) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$.

    (c) $\exp(i\overline{z}) = e^{y}\cos x + ie^{y}\operatorname{sen} x$.

2. Para resolver a equação $e^z = \rho e^{i\varphi}$ designamos $z = x + iy$ para obter $e^x = \rho$ e $y = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

    (a) $\exp(2z) = -1 \Leftrightarrow e^{2x} = 0$ e $2y = \pi + 2k\pi$. As raízes são $z = (k\pi + \pi/2)\,i,\ k \in \mathbb{Z}$.

    (b) $\exp(z) = i \Leftrightarrow e^{x} = 0$ e $y = \pi/2 + 2k\pi$. As raízes são $z = (2k\pi + \pi/2)\,i,\ k \in \mathbb{Z}$.

    (c) $z = \ln 2 + (2k+1)\pi i$.

(d) $z = \pm\sqrt{k\pi} \pm i\sqrt{k\pi},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

(e) $z = \frac{1}{2} + k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. Considerando $z = x + iy$, temos:

   (a) $\mathrm{Re}\,(e^z) = 0 \Leftrightarrow e^x \cos y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi + \pi/2$. Assim, as soluções da equação são $z = x + (k\pi + \pi/2)\, i,\ k \in \mathbb{Z}.$

   (b) Se $\lambda = e^z$, a equação $e^z + 6e^{-z} = 5$ é equivalente a:

$$(\lambda - 5/2)^2 = 1/4,$$

   isto é, $\lambda = 3$ 0u $\lambda = 2$. Logo, $z = \ln 3 + 2k\pi i$ ou $z = \ln 2 + 2n\pi i,\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4. A igualdade $\exp\left(\overline{iz}\right) = \overline{\exp\left(iz\right)}$ é válida seja qual for o número complexo z.

5. Se $z = x + iy$, então $|\exp\left(-2z\right)| < 1 \Leftrightarrow e^{-2x} < 1 \Leftrightarrow -2x < 0$. Logo, $x > 0$, isto é, $\mathrm{Re}\,(z) > 0$.

6. O conjunto aberto S é o semiplano superior $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$.

7. Considerando $z = x + iy$, temos que $|\exp\left(2z + i\right)| = \exp\left(2x\right)$ e $\left|\exp\left(iz^2\right)\right| = \exp\left(-2xy\right)$ e, usando a desigualdade triangular, resulta:

$$\begin{aligned} \left|\exp\left(2z + i\right) + \exp\left(iz^2\right)\right| &\leq \left|\exp\left(2z + i\right)\right| + \left|\exp\left(iz^2\right)\right| \\ &= \exp\left(2x\right) + \exp\left(-2xy\right). \end{aligned}$$

8. Para $z = x + iy$, temos que $\exp\left(z\right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x \operatorname{sen} y = 0$ e daí resulta $y = k\pi$.

9. A função $f\left(z\right)$ não é analítica em ponto algum, enquanto $g\left(z\right)$ é analítica nos pontos $z \neq 2k\pi i$.

10. Temos uma consequência da Regra da Cadeia. A função $F\left(z\right)$ é a composição das funções analíticas $f\left(z\right)$ e $w \mapsto \exp\left(w\right)$. As funções $z \mapsto z^2$ e $z \mapsto iz$ são inteiras e o mesmo ocorre com as composições $z \mapsto \exp\left(z^2\right)$ e $z \mapsto \exp\left(iz\right)$.

11. Nos pontos $z \neq 0$ a função $f\left(z\right) = \exp\left(1/z\right)$ é analítica e suas componentes $\mathrm{Re}\left[f\left(z\right)\right]$ e $\mathrm{Im}\left[f\left(z\right)\right]$ são, portanto, harmônicas conjugadas.

12. As funções $U(x,y)$ e $V(x,y)$ são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da função analítica $F(z) = \exp[f(z)]$ sendo, portanto, harmônicas conjugadas..

13. A única singularidade é o ponto $z = -1$.

14. Da desigualdade (1.12), com $w = -z_0$, vemos que $|f(z)| \leq 1$, sempre que $|z| \leq 1$, No caso em que $z_0 = 0$, temos $f(z) = -e^{i\phi} \cdot z$, que corresponde a uma rotação do ponto $-z$ de um ângulo ϕ.

3.2. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. Em cada caso, consideramos $z = x + iy$ e $\lambda = e^{iz}$.

   (a) Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4i\lambda - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2i)^2 = \pm i\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i. \end{aligned}$$

   Retornando à variável z, encontramos:

$$e^{iz} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i \Leftrightarrow e^{-y} e^{ix} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = -\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \\ x = 2k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

   Assim, as soluções da equação $\operatorname{sen} z = 2$ são $z = 2k\pi + \pi/2 - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (b) Se fizermos $\lambda = e^{iz}$, a equação $\cos z = 2$ torna-se equivalente a $(\lambda - 2)^2 = 3$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos z &= 2 \Leftrightarrow e^{iz} = \operatorname{Log}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \\ &\Leftrightarrow iz = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi i \Leftrightarrow z = 2n\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Do Lema (3.2.2) resulta que

$$u(x,y) = \operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y \quad \text{e} \quad v(x,y) = \operatorname{Im}(\operatorname{senh} z) = \cos x \operatorname{senh} y,$$

   as quais são funções de classe C^2 e temos:

$$\Delta u =_{xx} +u_{yy} = (-\cos x \cosh y) + (\cos x \cosh y) = 0, \quad \text{em } \mathbb{C}.$$

   De forma similar, mostra-se que $\Delta v = 0$, em $\mathbb{C}$. Recorde-se que as componentes (parte real e parte imeginária) de uma função inteira são harmônicas conjugadas!

3. Primeiro, veja os conceitos das funções trigonométricas e hiperbólicas.

   (a) Temos

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right] = \frac{1}{2i}\left[e^{-z} - e^{z}\right] = \frac{i}{2}\left[e^{z} - e^{-z}\right] = i \operatorname{senh} z.$$

   (b) Similar ao anterior.

   (c) Partindo de $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$, temos:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 z = 1 + \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{\operatorname{sen}^2 z + \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \operatorname{cosec}^2 z.$$

   (d) Do Corolário 3.2.3, temos

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 - |\operatorname{sen} z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y - \left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y\right) \\ &= \cos^2 x - \operatorname{senh}^2 = \cos(2x). \end{aligned}$$

   (e) Temos:

$$\begin{aligned} \cos z \cos w &= \frac{1}{4}\left[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)}\right] \\ \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w &= \frac{1}{4}\left[e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)}\right] \end{aligned}$$

   e, portanto,

$$\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w = \frac{1}{2}\left[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\right] = \cos(z+w).$$

   (f) Proceda como no caso precedente.

   (g) De acordo com a definição, temos:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}(z+w)\operatorname{sen}(z-w) &= 2 \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}\right) \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{iz-iw} - e^{-iz+iw}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{2iz} + e^{-2iz} - e^{2iw} - e^{-2iw}\right) = -\cos(2z) + \cos(2w). \end{aligned}$$

   (h) Proceda como no caso precedente.

4. Temos que

$$\begin{aligned} \cos z &\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\cos z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x\left(e^{-y} - e^{y}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{ou} \quad y = 0. \end{aligned}$$

   Assim, $\cos z$ é real se, e só se, z é real ou $z = k\pi + iy,\ y \in \mathbb{R}$.

5. A função $f(z)$ é analítica em qualquer ponto z, tal que $(e^z - 1)\cos z \neq 0$, isto é, nos pontos $z \neq 2k\pi i$ ou $z \neq k\pi + \pi/2$.

6. As desigualdades decorrem do Corolário 3.2.3

7. A igualdade $\cos(i \cdot \overline{z}) = \overline{\cos(iz)}$ ocorre para qualquer z. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(i \cdot \overline{z}) &= \overline{\operatorname{sen}(iz)} \Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[\exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z})\right] = -\frac{1}{2i}\left[\overline{\exp(-z)} - \overline{\exp(z)}\right] \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[\exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z})\right] = -\frac{1}{2i}\left[\exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z})\right] \\
&\Leftrightarrow \exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

8. Temos que

$$\operatorname{sen} z = \cosh 4 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y = \cosh 4$$

e, portanto:

$$\left|\begin{array}{ll}
\operatorname{sen} x \cosh y = \cosh 4 & \text{(I)} \\
\cos x \operatorname{senh} y = 0. & \text{(II)}
\end{array}\right.$$

De (II) resulta que $y = 0$ ou $x = k\pi + \pi/2$, com $k \in \mathbb{Z}$, e a opção $y = 0$ nos conduz ao absurdo $\operatorname{sen} x = \cosh 4$, já que $\cosh 4 > 1$. Assim, $x = k\pi + \pi/2$ e usando a equação (I), considerando que $(-1)^k = \pm 1$ e $\cosh 4 > 0$, encontramos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(k\pi + \pi/2)\cosh y &= \cosh 4 \Leftrightarrow (-1)^k \cosh y = \cosh 4 \\
&\Leftrightarrow \cosh y = \cosh 4 \\
&\Leftrightarrow y = \pm 4.
\end{aligned}$$

Assim, as raízes são $z = 2n\pi + \pi/2 \pm 4i,\ n \in \mathbb{Z}$.

9. Consequência direta da definição. Como ilustração, vejamos a parte **(e)**.

(e) Temos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}(z + \pi i) &= \frac{1}{2}\left(e^{z+\pi i} - e^{-z-\pi i}\right) = \frac{1}{2}\left(e^z \cdot e^{\pi i} - e^{-z} \cdot e^{-\pi i}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-e^z + e^{-z}\right) = -\operatorname{senh} z.
\end{aligned}$$

10. Em cada caso, vamos considerar $\lambda = e^z$.

(a) A equação $2\cosh z = 1$ é equivalente a $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, com raízes $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$. Logo:

$$e^z = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = i\left(2k\pi \pm \pi/3\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) A equação $\operatorname{senh} z = i$ é equivalente a $\lambda^2 - 2i\lambda - 1 = 0$, com raiz $\lambda = i = e^{i\pi/2}$, de onde resulta $z = i\left(2k\pi + \pi/2\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

(c) Neste caso, temos:

$$\cosh z = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 \pm \sqrt{2}/2\right) \cdot e^{i\pi}$$

e as raízes são $z = \ln\left(2 \pm \sqrt{2}/2\right) + (2k+1)\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

11. Se $z = x$ é um número real, é sabido que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Reciprocamente, se $z = x + iy$ é tal que $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = 1$, segue do Corolário 3.2.3 que $\operatorname{senh}^2 y = 0$ e, portanto, $y = 0$ e temos que z é real.

3.3. LOGARÍTMOS & EXPOENTES

1. Recordemos que se $z = re^{i\theta}$ é não nulo, então $\log z = \ln r + i\left(\theta + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$, e temos a seguinte propriedade: $\exp\left(\log z\right) = z$.

   (a) Temos:

   $$\log z = i\pi/2 \Rightarrow z = \exp\left(i\pi/2\right) \Rightarrow z = i.$$

   (b) $\log z = 1 + i\pi \Rightarrow z = \exp\left(1 + i\pi\right) \Rightarrow z = -e$.

2. Dado $z = re^{i\theta} \neq 0$, o valor principal de $\log z$ é $\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta$.

   (a) $\log\left(-1\right) = \log\left(e^{i\pi}\right) = (2k+1)\pi i$ e $\operatorname{Log}\left(-1\right) = \pi i$.

   (b) $\log i = \log\left(e^{i\pi/2}\right) = (2k + 1/2)\pi i$ e $\operatorname{Log} i = i\pi/2$.

   (c) $\log 2 = \log\left(2e^{i\cdot 0}\right) = \ln 2 + 2k\pi i$ e $\operatorname{Log} 2 = \ln 2$.

   (d) $\log\left(i^{1/2}\right) = \log\left[\exp\left(\frac{1}{2}\log i\right)\right] = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i =$ e $\operatorname{Log}\left(\sqrt{i}\right) = i\pi/4$.

3. Se $z = x + iy$, ao calcular $\log(z-1)$, encontramos:

$$\log(z-1) = \ln|z-1| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \operatorname{Arg}(z-1),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\log(z-1)) &= \ln|z-1| = \ln\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+1-2x\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+r^2-2r\cos\theta\right).\end{aligned}$$

A função $w = \operatorname{Re}[\operatorname{Log}(z-1)]$, $z \neq 1$, é a parte real da função analítica $z \mapsto \operatorname{Log}(z-1)$ e, portanto, é uma função harmônica.

4. A função $\operatorname{Log}(z+4)$ é analítica fora da semireta $S : \operatorname{Re}(z) \leq -4,\ \operatorname{Im}(z) = 0$, enquanto $z^2 + i$ se anula nos pontos $z \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Assim, a função $w = \dfrac{\operatorname{Log}(z+4)}{z^2+i}$ é analítica na região:

$$R = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \text{ e } z \notin S\right\}.$$

5. O valor principal de z^λ é dado por:

$$z^\lambda = \exp(\lambda \operatorname{Log} z), \quad z \neq 0.$$

(a) $i^i = \exp(-\pi/2)$.

(b) $(1-i)^{4i} = \exp(\pi + i\ln 4)$.

(c) $(2i)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}(2i)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 2 + i\pi/4)\right] = 1 + i$.

(d) $(1-i)^{1+i} = 2\exp(\pi/4)\cdot\exp[i(\ln 2 - \pi/4)]$.

(e) $\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{3\pi i} = \exp\left[2\pi^2 + (3\pi\ln 2)\,i\right]$.

6. Se $z = re^{i\theta}$, e considerando que α é real, temos:

$$\begin{aligned}|z^\alpha| &= |\exp(\alpha\operatorname{Log} z)| = |\exp(\alpha\ln|z| + i\theta)| = \left|e^{\alpha\ln|z|}\cdot e^{i\theta}\right|\\ &= e^{\alpha\ln|z|} = e^{\ln|z|^\alpha} = |z|^\alpha.\end{aligned}$$

7. Recorde-se que $\operatorname{Log} z$ é analítica fora do eixo $L = \{(x,0) : x \leq 0\}$.

8. Considerando $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{z-1} &= (z-1)^{1/2} = \exp\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(z-1)\right] \\ &= \exp\left[\ln\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)\right] \\ &= \sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)\right], \quad x \neq 1.\end{aligned}$$

9. A função $f(z) = \operatorname{Log} z$ não é contínua em ponto algum do eixo $L = \{(x,0) : x \leq 0\}$.

10. **(a)** 0 **(b)** 1 **(c)** 0 **(d)** 1.

11. Se $z = re^{i\theta},\ r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi$, então $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, de modo que:

$$\begin{aligned}&\log\left(z^2\right) = 2\ln r + i\left(2\theta + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &2\cdot\log z = 2\cdot\left[\ln r + i\left(\theta + 2n\pi\right)\right] = 2\ln r + i\left(2\theta + 4n\pi\right), \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Os conjuntos $\{2\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{2\theta + 4n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ são distintos! O erro ocorre ao usar a propriedade $\log\left(z^2\right) = 2\cdot\log z$, a qual não é válida em geral.

3.4. TRANSFORMAÇÕES DO PLANO $\mathbb{C}$

1. Se $z = x + iy$, então $w = iz + i = -y + (x+1)\,i$ e, portanto:

$$\operatorname{Re}(z) = x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(w) = x + 1 > 1.$$

2. Em coordenadas polares, o semiplano $[\operatorname{Im}(z) > 0]$ é descrito por $r \geq 0,\ 0 < \theta < \pi$. Assim:

$$w = (1+i)\,z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}re^{i\theta} = r\sqrt{2}e^{i(\theta+\pi/4)}$$

e, portanto, $\pi/4 < \operatorname{Arg}(w) < 5\pi/4$. A imagem do semiplano $[\operatorname{Im}(z) > 0]$ é o semiplano $[\operatorname{Im}(w) > \operatorname{Re}(w)]$. Em coordenadas cartesianas, temos:

$$\operatorname{Im}(w) > \operatorname{Re}(w) \Leftrightarrow v > u \Leftrightarrow x + y > x - y \Leftrightarrow y > 0 \Leftrightarrow z \in [\operatorname{Im}(z) > 0].$$

3. A imagem é a faixa $\{w = u + iv : -1 < u < 1 \text{ e } v > 0\}$.

4. Integração Complexa

4.1 Função Complexa de uma Variável Real

Seja $F(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, uma função complexa de uma variável real t, e suponhamos que as funções reais $x(t)$ e $y(t)$ sejam contínuas no intervalo $[a, b]$, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos de $[a, b]$, onde elas têm limites finitos. Uma tal função $F(t)$ é conhecida pela denominação de *contínua por partes* em $[a, b]$ e a integral de $F(t)$ no intervalo $[a, b]$, indicada por $\int_a^b F(t)\,dt$, é o número complexo definido por:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}[F(t)]\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}[F(t)]\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt. \tag{4.1}$$

EXEMPLO 4.1.1 *Se $F(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi/2$, temos, de acordo com a definição, que:*

$$\int_0^{\pi/2} F(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{it}dt = \int_0^{\pi/2} \cos t dt + i\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t dt = 1 + i.$$

PROPOSIÇÃO 4.1.2 (Propriedades Básicas) *Se $F(t)$ e $G(t)$ são funções contínuas por partes em $[a, b]$ e λ é qualquer constante complexa, então:*

(a) **LINEARIDADE:** $\displaystyle\int_a^b [\lambda \cdot F(t) + G(t)]\,dt = \lambda \cdot \int_a^b F(t)\,dt + \int_a^b G(t)\,dt.$

(b) **DESIGUALDADE ELEMENTAR:** $\displaystyle\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|\,dt.$

(c) **TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:** *Se $\Phi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ é uma primitiva de $F(t)$ em $[a, b]$, isto é, as componentes $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são deriváveis em $[a, b]$ e*

$$\Phi'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t) = F(t), \quad a \leq t \leq b,$$

então $\displaystyle\int_a^b F(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a)$. Em particular, se $F(t)$ é de classe C^1 em $[a, b]$, temos:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Considerando $F(t) = x(t) + iy(t)$, $G(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ e $\lambda = a + ib$, um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned}\int_a^b [\lambda \cdot F(t) + G(t)]\, dt &= \int_a^b [\lambda \cdot x(t) + \alpha(t)]\, dt + i\int_a^b [\lambda \cdot y(t) + \beta(t)]\, dt \\ &= \lambda \cdot \left(\int_a^b x(t)\, dt + i\int_a^b y(t)\, dt\right) + \int_a^b \alpha(t)\, dt + i\int_a^b \beta(t)\, dt \\ &= \lambda \cdot \int_a^b F(t)\, dt + \int_a^b G(t)\, dt.\end{aligned}$$

(b) Representando $\int_a^b F(t)\, dt$ sob a forma polar $re^{i\theta}$ e notando que $\int_a^b e^{-i\theta} \cdot F(t)\, dt = r$ é um número real, segue da propriedade linear **(a)** que:

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b F(t)\, dt = \int_a^b e^{-i\theta} \cdot F(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} \cdot F(t)\right] dt.$$

Logo,

$$\left|\int_a^b F(t)\, dt\right| = r = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} \cdot F(t)\right] dt \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} \cdot F(t)\right| dt = \int_a^b |F(t)|\, dt.$$

(c) Consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo de variável real. De fato:

$$\begin{aligned}\int_a^b F(t)\, dt &= \int_a^b x(t)\, dt + i\int_a^b y(t)\, dt = \Big[\alpha(t)\Big]_{t=a}^{t=b} + i \cdot \Big[\beta(t)\Big]_{t=a}^{t=b} \\ &= \alpha(b) - \alpha(a) + i \cdot [\beta(b) - \beta(a)] = \alpha(b) + i \cdot \beta(b) - [\alpha(a) + i\beta(a)] \\ &= \Phi(b) - \Phi(a). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 4.1)**

1. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$ **(b)** $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0$ **(c)** $\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$

2. Calcule as integrais trigonométricas:

   (a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} t \exp\left(it^2\right) dt$ **(b)** $\int_0^{\pi} \left(e^{it} + i \operatorname{sen} t\right) dt$ **(c)** $\int_0^{\pi} \cos(it)\, dt.$

4.2 Função Complexa de uma Variável Complexa

Nesta seção apresentaremos o cálculo integral para funções $w = f(z)$, de uma variável complexa, definida e contínua em uma região do plano $\mathbb{C}$ contendo um arco $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$. Inicialmente faremos um breve comentário sobre contornos regulares γ, no plano $\mathbb{C}$, para em seguida tratarmos das integrais de $f(z)$ sobre o contorno γ.

4.2.1 Contornos e Integrais

Por *arco* γ no plano $\mathbb{C}$ entendemos a imagem de uma função contninua $z : [a, b] \to \mathbb{C}$, isto é, o conjunto dos pontos $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$. A orientação positiva do arco γ é aquela correspondente ao sentido crescente de valores de t. O ponto $A = z(a)$ e $B = z(b)$ denominam-se, respectivamente, ponto inicial e ponto final do arco γ. Por simplicidade, faremos referência ao arco γ como sendo a função $t \mapsto z(t)$. Veja a ilustração gráfica na Figura 4.1.

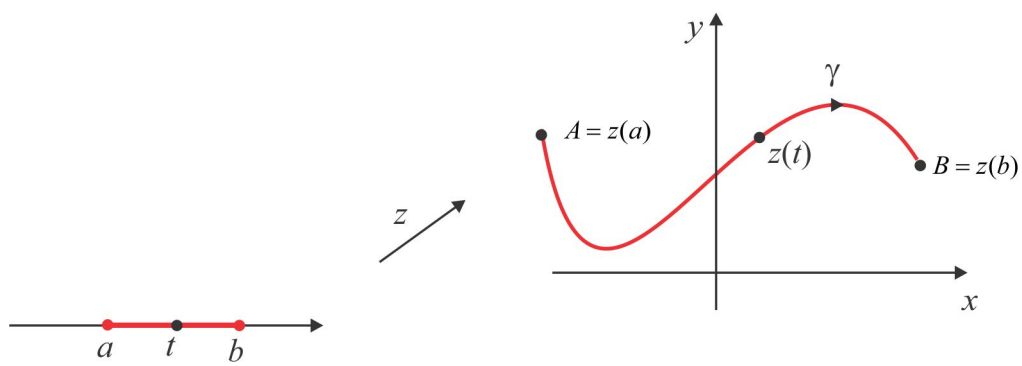


Figura 4.1:

Em um arco $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, um ponto $P = z(t)$, proveniente de dois valores distintos de t, internos ao intervalo $[a, b]$, denomina-se **ponto múltiplo**; os demais pontos são **pontos simples**. Um arco $\gamma = z(t)$ constituído apenas de pontos simples denomina-se **arco simples**. Neste caso, temos:

$$t \neq s \Rightarrow z(t) \neq z(s), \quad a < t, s < b.$$

No arco simples pode ocorrer que $\gamma(a) = \gamma(b)$ e, neste caso, o arco simples denomina-se *fechado*; um arco simples fechado também é denominado **arco de Jordan**. O comprimento do arco γ é o número real $L(\gamma)$, dado por:

$$L(\gamma) = \int_a^b \left|z'(t)\right| dt \tag{4.2}$$

e, com a notação $dz = dx + idy$, vemos que o comprimento do arco γ se expressa sob a forma

$$L(\gamma) = \int_a^b |dz| .$$

DEFINIÇÃO 4.2.1 *Um arco γ de equação $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, é denominado* ***arco regular*** *ou* ***suave*** *quando as funções $x(t)$ e $y(t)$ forem de classe C^1 em $[a, b]$ e a velocidade $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ é não nula em cada t do intervalo $[a, b.]$.*

Em um arco regular γ, se $x'(t) = 0$, então o vetor $z'(t) = iy'(t)$ é vertical e no caso em que $x'(t) \neq 0$, então $y'(t)/x'(t)$ é a declividade da reta tangente ao arco γ, no ponto $z(t)$.

LEMA 4.2.2 *Se a função $f(z)$ é contínua sobre o arco regular γ e $|f(z)| \leq M$, em γ, então:*

$$\left|\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt\right| \leq M \cdot L(\gamma) . \tag{4.3}$$

PROVA Segue da propriedade básica **(c)** da Seção 4.1 que:

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt\right| &\leq \int_a^b \left|f(z(t)) \cdot z'(t)\right| dt \\ &\leq M \int_a^b \left|z'(t)\right| dt = M \cdot L(\gamma) . \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.2.3 *A circunferência $|z| = 1$, de centro na origem e raio 1, é descrita na forma paramétrica por $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Trata-se de um arco simples, fechado e regular.*

EXEMPLO 4.2.4 *O arco γ definido por*

$$z(t) = \left| \begin{array}{ll} t + it, & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i, & 1 \leq t \leq 2 \end{array} \right.$$

é simples e consiste do segmento de reta de $z = 0$ até $z = 1 + i$, seguido do segmento de $z = 1 + i$ até $z = 2 + i$, como ilustra a Figura 4.2.

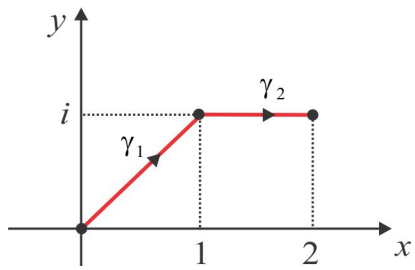


Figura 4.2: Gráfico para o Exemplo 4.2.4

EXEMPLO 4.2.5 (Arcos Justapostos) *Os arcos* $\gamma_1 : z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ *e* $\gamma_2 : w = w(s)$, $b \leq s \leq c$ *são justapostos, como ilustra Figura 4.3, e o contorno* $\gamma_1 + \gamma_2$, *denominado justaposição dos arcos* γ_1 *e* γ_2, *é definido por* $\xi = \xi(t)$, *sendo:*

$$\xi(t) = \left| \begin{array}{ll} z(t), & se\ a \leq t \leq b \\ w(t), & se\ b \leq t \leq c. \end{array} \right.$$

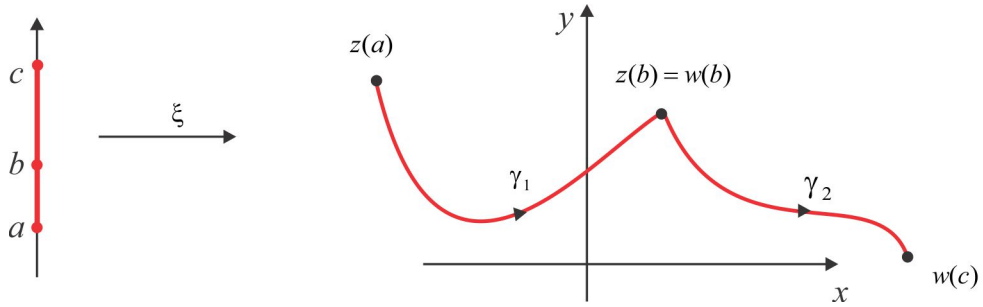


Figura 4.3: Arcos Justapostos

DEFINIÇÃO 4.2.6 *Um número finito de arcos regulares e justapostos recebe o nome de* ***contorno****.*

EXEMPLO 4.2.7 *O arco* γ *definido no Exemplo 4.2.4 é um contorno simples. Ele é constituído pelos arcos regulares* γ_1 *e* γ_2.

EXEMPLO 4.2.8 *A fronteira da região* $D = \{z = x + iy : |x| + |y| \leq 1\}$ *é um contorno simples e fechado, o qual coincide com o quadrado de vértices* $z = \pm 1$ *e* $z = \pm i$.

4.2.2 A Integral

A integral de uma função contínua $w = f(z)$ sobre um contorno $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$, é, por definição, o número complexo $\int_\gamma f(z)\,dz$, dado por:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt. \tag{4.4}$$

De forma mais geral, podemos considerar funções complexas $f(z) = u + iv$, com componentes $u(x(t), y(t))$ e $v(x(t), y(t))$ contínuas por partes em $[a, b]$, isto é, sobre a curva γ, e a integral (4.4) está bem definida:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot \left(x'(t) + iy'(t)\right) dt.$$

EXEMPLO 4.2.9 *Para ilustrar o conceito, vamos calcular a integral da função $f(z) = z^2$, ao longo do segmento γ que liga a origem ao ponto $1 + 2i$.*

SOLUÇÃO O segmento γ é descrito por $z(t) = t + 2it,\ 0 \leq t \leq 1$, de modo que $dz = (1 + 2i)\,dt$ e temos:

$$\begin{aligned}\int_\gamma z^2 dz &= \int_0^1 (t + 2it)^2 (1 + 2i)\,dt = (1 + 2i)\int_0^1 (-3 + 4i)\,t^2 dt \\ &= (1 + 2i)(-3 + 4i)\int_0^1 t^2 dt = \tfrac{1}{3}(1 + 2i)(-3 + 4i) = -\tfrac{1}{3}(11 + 2i).\end{aligned}$$

EXEMPLO 4.2.10 *Se γ é o arco $|z| = 1$, orientado de $z = -1$ até $z = 1$, temos:*

$$\int_\gamma \overline{z} dz = \int_\pi^0 e^{-it} \cdot ie^{it} dt = -\pi i.$$

LEMA 4.2.11 (Teorema Fundamental do Cálculo) *Se, sobre o contorno $\gamma : z = z(t),\ a \leq t \leq b$, a função $F(z)$ é uma primitiva analítica*[6] *de $f(z)$, então*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

PROVA Usando o conceito de integral e a Regra da Cadeia, encontramos:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \tfrac{d}{dt}[F(z(t))]\,dt = F(z(b)) - F(z(a)). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

[6] $F(z)$ é uma "primitiva analítica" de $f(z)$ se $f'(z) = F(z)$.

EXEMPLO 4.2.12 *Se γ é um arco regular ligando o ponto $z_1 = 1$ ao ponto $z_2 = i$, então $F(z) = z^3/3$ é uma primitiva de z^2 e do Lema (4.2.11)*

$$\int_\gamma z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_1^i = \tfrac{1}{3}\left(i^3 - 1\right) = -\tfrac{1}{3}(1+i).$$

EXEMPLO 4.2.13 *Se γ é o segmento de reta de $z = 1$ até $z = 1 + i$, usamos $\operatorname{Log} z$ como primitiva de $1/z$ e obtemos:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \operatorname{Log}(1+i) - \operatorname{Log} 1 = \operatorname{Log}\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4.$$

PROPOSIÇÃO 4.2.14 (Propriedades Básicas) *Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções complexas, contínuas nos pontos de um contorno $\gamma : z = z(t),\ a \le t \le b$.*

(P1) Usando a Integral de Linha: *Se $f(z) = u + iv$, então:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy. \tag{4.5}$$

(P2) Invertendo a orientação: *Se $-\gamma$ representa o contorno γ, com a orientação invertida, então:*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz. \tag{4.6}$$

(P3) Linearidade: *Se λ é qualquer número complexo, então:*

$$\int_\gamma [f(z) + \lambda \cdot g(z)]\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \lambda\int_\gamma g(z)\,dz. \tag{4.7}$$

(P4) Justaposição: *Se $\gamma_1 : z = z(t),\ a \le t \le b$ e $\gamma_2 : w = w(s),\ b \le s \le c$ são dois arcos justapostos, então:*

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \tag{4.8}$$

DEMONSTRAÇÃO

(P1) Por simplicidade, omitiremos a variável t na demonstração. Considerando $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b (u+iv)\left(x' + iy'\right)dt \\
&= \int_a^b \left(ux' - vy'\right)dt + i\int_a^b \left(uy' + vx'\right)dt \\
&= \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.
\end{aligned}$$

(P2) O contorno $-\gamma$ pode ser parametrizado da seguinte forma:

$$-\gamma : w(s) = x(-s) + iy(-s), \quad -b \leq s \leq -a,$$

e, considerando $t = -s$, resulta:

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f(z)\,dz &= \int_{-b}^{-a} f(w(s))\,w'(s)\,ds = \int_{-b}^{-a} f(z(-s))\left[-z'(-s)\right]ds \\ &= -\int_{b}^{a} f(z(t))\,z'(t)\,(-dt) = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

(P3) A partir do conceito, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} [f(z) + \lambda g(z)]\,dz &= \int_{a}^{b} [f(z(t)) + \lambda g(z(t))]\,z'(t)\,dt \\ &= \int_{a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt + \lambda \int_{a}^{b} g(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \lambda \int_{\gamma} g(z)\,dz.\end{aligned}$$

(P4) Usando a parametrização dada no Exemplo 4.2.5, temos:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz &= \int_{a}^{c} f(\xi(t))\,\xi'(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(z(t))\,z'(t)\,dt + \int_{b}^{c} f(w(t))\,w'(t)\,dt \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 4.2)**

1. Represente as seguintes curvas na forma $z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$.

   (a) o segmento de reta de $z = 0$ a $z = 1 + 2i$.

   (b) o segmento de reta de $z = -2 + i$ a $z = -2 + 4i$.

   (c) a circunferência $|z - 2i| = 4$.

   (d) a circunferência de raio 5 e centro na origem.

   (e) o arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

   (f) a elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

2. Em cada caso, identifique e esboce o gráfico do contorno γ, descrito por:

(a) $\gamma : z(t) = 3i + 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

(b) $\gamma : z(t) = t + 3it^2, \quad 1 \leq t \leq 2.$

(c) $\gamma : z(t) = 1 + (2 - i)\, t, \quad 0 \leq t \leq 1.$

(d) $\gamma : z(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1.$

(e) $\gamma : z(t) = 1 + 2i/t, \quad -\infty \leq t < 0.$

(f) $\gamma : z(t) = \sqrt{1 - t^2} + it, \quad -1 \leq t \leq 1.$

3. Seja $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)\,,\ a \leq t \leq b$, um arco suave contido no domínio de uma função analítica $w = F(z)$. Nos pontos $z(t)$ do arco γ, mostre que:

$$\frac{d}{dt}\left[F\left(z\left(t\right)\right)\right] = F'\left(z\left(t\right)\right) \cdot z'\left(t\right).$$

4. Em cada caso, calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma 3z^2 dz$.

(a) γ é o segmento de reta de $z = -i$ até $z = i$.

(b) γ é o arco $|z| = 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 0.$

(c) γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

5. Calcule $\displaystyle\int_\gamma |z|\, dz$, onde γ é o arco $|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \leq 0$. E se γ fosse o segmento de $-i$ até i, qual seria o valor da integral?

6. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\ dz$, onde γ é o arco $z = \exp(i\theta)$, nos seguintes casos:

(a) $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ **(b)** $0 \leq \theta \leq 2\pi$ **(c)** $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

7. Calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\displaystyle\int_\gamma [x^2 - y^2 + i\left(x^2 - y^2\right)]dz, \quad \gamma$ é o segmento de $3 + 2i$ até a origem.

(b) $\displaystyle\int_0^{2+i} \left(y - x^2\right) dz$, ao longo da poligonal constituída do eixo y e da reta $y = 1$.

(c) $\displaystyle\int_{|z|=R} \operatorname{Log} z dz$.

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, ao longo do arco de circunferência $|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz$, ao longo do arco $z = 2\exp(i\theta)\,,\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$.

(f) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^m \cdot (\overline{z})^n\, dz$.

(g) $\displaystyle\int_\gamma \exp(z)\, dz$, ao longo da poligonal de πi até 1, sobre os eixos coordenados.

(h) $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cos z dz$.

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi i} z\cos\left(z^2\right) dz$.

8. Seja γ o arco ao longo da curva $y = x^3$, de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$ e seja $f(z) = 4y$, se $y > 0$ e $f(z) = 1$, se $y < 0$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz$.

9. Sem calcular a integral, mostre que:

(a) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \leq 1$, sendo γ o segmento de $z = 1$ até $z = 1 + i$

(b) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \frac{\pi}{3}$, sendo γ o arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ até $z = 2i$.

10. Se a função $w = f(z)$ é contínua em $z = 0$, mostre que $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi f(0)$.

11. Se γ é o triângulo de vértices $z = 0,\ z = 3i$ e $z = -4$, com orientação positiva, mostre que:

$$\left|\int_\gamma \left(e^z - \overline{z}\right) dz\right| \leq 60.$$

12. Se γ_R é o círculo $|z| = R,\ R > 1$, orientado no sentido positivo, mostre que:

(a) $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz\right| \leq \frac{2\pi(\pi + \ln R)}{R}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz = 0$.

13. Se $f(z)$ é contínua no círculo $\gamma_R : |z - z_0| = R$, mostre que $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = iR\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + R\cdot e^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta$. Com o resultado, deduza que:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ **(b)** $\displaystyle\int_{\gamma_R} (z - z_0)^{n-1}\, dz = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

4.3 Teoremas Clássicos & Consequências

Iniciamos esta seção recordando o Teorema de Green no plano xy, do qual se originou o resultado fundamental da teoria das funções analíticas: o Teorema de Cauchy-Goursat.

TEOREMA 4.3.1 (Teorema de Green) *Sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ duas funções de classe C^1 em uma região D, do plano xy, cuja fronteira γ é um contorno simples, fechado e parcialmente regular, com orientação positiva. Então:*

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \quad \blacksquare$$

Agora, se $f(z) = u + iv$ é uma função analítica, com derivada $f'(z)$ contínua, na região R, usamos o Teorema de Green e as equações de Cauchy-Riemann para deduzir que as integrais de linha

$$\int_\gamma vdx + udy \quad \text{e} \quad \int_\gamma udx - vdy$$

são nulas. De fato, considerando que na região D temos $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$, deduzimos que

$$\int_\gamma vdx + udy = \iint_D (u_x - v_y)\, dxdy = 0 \quad \text{e} \quad \int_\gamma udx - vdy = \iint_D (-v_x - u_y)\, dxdy = 0.$$

Logo, tendo em vista (4.5), encontramos:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy = 0. \tag{4.9}$$

EXEMPLO 4.3.2 *Como consequência do que acabamos de estabelecer, concluímos que:*

$$\int_{|z|=1} \left(z^3 + \cos z\right) dz = 0 \quad e \quad \int_{|z-i|=1} \frac{\exp z}{z^2+4} dz = 0.$$

Ao usar o Teorema de Green para concluir (4.9), a hipótese de ser $f'(z)$ contínua é necessária. Contudo, esta hipótese pode ser removida e E. Goursat foi o primeiro a provar tal fato. O resultado de Cauchy, agora sem a hipótese de continuidade de $f'(z)$, leva o nome de *Teorema de Cauchy-Goursat.*

OBSERVAÇÃO 4.3.3 *Uma região $\mathcal{R}$ do plano $\mathbb{C}$ sem **buracos** denomina-se **simplesmente conexa**. De forma precisa, uma região do plano $\mathbb{C}$ é simplesmente conexa quando qualquer contorno simples, fechado e suave, contido em $\mathcal{R}$, contiver no seu interior apenas pontos da região. Uma região que não é simplesmente conexa denomina-se **multiplamente conexa.***

TEOREMA 4.3.4 (Cauchy-Goursat) *Se $f(z)$ é uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D, então*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0,$$

seja qual for o contorno γ simples, fechado e regular por partes contido em D. ■

COROLÁRIO 4.3.5 (Independência do caminho) *Nas condições do Teorema de Cauchy-Goursat, a integral de $f(z)$ ao longo de um contorno ligando os pontos z_1 e z_2 só depende dos pontos z_1 e z_2 e nunca do contorno em D ligando esses pontos.*

PROVA Na Figura 4.4 ilustramos dois contornos suaves γ_1 e γ_2, ligando os pontos z_1 e z_2. Do Teorema

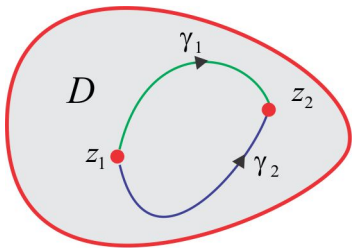


Figura 4.4: Independência do caminho.

de Cauchy-Goursat resulta:

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \quad ■$$

4.3.1 Existência de Primitivas

No que se segue, D representa um domínio simplesmente conexo e $f(z)$ uma função analítica em D. Dados um ponto z_0, no domínio D, e um número complexo λ, a função complexa $F : D \to \mathbb{C}$, definida pela relação

$$F(z) = \lambda + \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi,$$

é uma primitiva de $f(z)$, isto é, $F(z)$ é derivável e $F'(z) = f(z)$, em qualquer z do domínio D. De

fato, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi\right)\\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,d\xi = f(z) + \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\xi)-f(z)\right]d\xi.\end{aligned}$$

Daí resulta que:

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\xi)-f(z)|\,|d\xi|\right|. \tag{4.10}$$

Quando $\Delta z \to 0$, os valores $|f(\xi)-f(z)|$, com ξ entre z e $z+\Delta z$, aproximar-se-ão, uniformemente (independente de ξ), de zero, de modo que:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\xi)-f(z)|\,|d\xi| = 0. \tag{4.11}$$

De (4.11) concluímos que $\dfrac{\Delta F}{\Delta z} \to f(z)$, com $\Delta z \to 0$, isto é, $F'(z) = f(z)$. Se $G(z)$ é outra primitiva de $f(z)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left[G(z) - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi\right] &= G'(z) - \frac{d}{dz}\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi\\ &= f(z) - f(z) = 0\end{aligned}$$

e, sendo assim, existe uma constante complexa λ, tal que

$$G(z) = \lambda + \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi.$$

COROLÁRIO 4.3.6 *Se, no domínio D, a função $F(z)$ é qualquer primitiva de $f(z)$, e z_1 e z_2 são dois pontos em D, então*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1). \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 4.3.7 *Usando $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ como primitiva de $f(z) = z^2$, temos:*

$$\int_{i}^{1+i} z^2 dz = \tfrac{1}{3}\left[(1+i)^3 - i^3\right] = -\tfrac{2}{3} + i.$$

EXEMPLO 4.3.8 *Se γ_δ representa o círculo $z(t) = z_0 + \delta e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, percorrido no sentido positivo, então, independente do raio δ, temos:*

$$\int_{\gamma_\delta}\frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i.$$

De fato, temos:

$$\int_{\gamma_\delta}\frac{dz}{z-z_0} = \int_{0}^{2\pi}\frac{i\delta e^{it}}{\delta e^{it}}dt = 2\pi i.$$

EXEMPLO 4.3.9 *Agora, deixe γ ser um contorno simples, fechado e parcialmente regular, envolvendo o ponto z_0. Então, dependendo da orientação escolhida para o contorno γ, teremos:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \pm 2\pi i.$$

Na Figura 4.5 abaixo ilustramos a situação geométrica, onde D é a região entre os contornos γ e γ_δ, sendo δ suficientemente pequeno, de modo que o círculo γ_δ esteja envolvido pelo contorno γ. Do Teorema de Cauchy-Goursat, segue que:

$$0 = \int_{\gamma + L - L + \gamma_\delta} \frac{dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z - z_0},$$

e a conclusão segue do Exemplo 4.3.8.

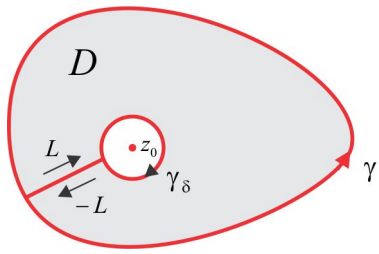


Figura 4.5: Figura para o Exemplo 4.3.9.

OBSERVAÇÃO 4.3.10 *O Teorema de Cauchy-Goursat admite uma versão para regiões multiplamente conexas, formulada da seguinte maneira: seja γ_0 um contorno simples, fechado e regular, interno ao contorno γ, também simples, fechado e regular, e seja $\mathcal{R}$ a região entre os contronos γ_0 e γ, com fronteira $\partial\mathcal{R}$ orientada no sentido positivo. Se $f(z)$ é analítica na região $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$, então:*

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\, dz = 0.$$

4.3.2 Fórmula Integral de Cauchy

A Fórmula Integral de Cauchy é o instrumento básico para estabeler as propriedades, algumas surpreendentes, das funções analíticas.

Seja γ um contorno simples, fechado, parcialmente regular, com orientação positiva[7], e consideremos z_0 um ponto interno ao contorno γ [8]. Se $f(z)$ é analítica na região $\mathcal{R}$, contendo o contorno γ, então:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0). \tag{4.12}$$

A fórmula (4.12) é a versão simples da Fórmula Integral de Cauchy e para demonstrá-la, consideremos $\delta > 0$, tal que o disco $D_\delta : |z - z_0| < \delta$ esteja envolvido pelo contorno γ. Resulta do Teorema de Cauchy-Goursat que:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}dz,$$

sendo γ_δ o círculo $|z - z_0| = \delta$, percorrido no sentido positivo. Se expressarmos $f(z)$ sob a forma

$$f(z) = [f(z) - f(z_0)] + f(z_0),$$

teremos:

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\gamma_\delta} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz \tag{4.13}$$

e a última integral do lado direito de (4.13) é igual a $2\pi i f(z_0)$, conforme vimos no Exemplo 4.3.8. Sendo assim, resta-nos provar que:

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \to 0, \quad \text{com } \delta \to 0.$$

Ora, considerando que $|f(z) - f(z_0)|$ se aproxima de zero, quando $z \to z_0$, de modo uniforme, isto é, independente do z, temos que dado $\varepsilon > 0$, podemos admitir que $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$, seja qual for o z no círculo γ_δ e, portanto:

$$\left|\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \leq \int_{\gamma_\delta} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\int_{\gamma_\delta}|dz| = \frac{2\pi\varepsilon\delta}{\delta} = 2\pi\varepsilon.$$

Da última relação deduzimos que $\displaystyle\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0$ e, por conseguinte, temos a fórmula (4.12).

EXEMPLO 4.3.11 *Usando a Fórmula Integral de Cauchy, com $z_0 = \pi i$, encontramos:*

$$\int_{|z-\pi i|=4} \frac{e^z dz}{z-\pi i} = 2\pi i \exp(\pi i) = -2\pi i.$$

[7] Um tal contorno denominar-se-á "contorno admissível".

[8] Quando um contorno fechado envolver um ponto, diremos que tal ponto está no interior ou é interno ao contorno.

EXEMPLO 4.3.12 *Vamos usar a Fórmula Integral de Cauchy para calcular o valor da integral:*

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{z}{z^2+4} dz.$$

Olhando a integral sob a forma

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{zdz}{(z-2i)(z+2i)} = \int_{|z+2i|=1} \frac{f(z)\,dz}{z+2i},$$

com $f(z) = z(z-2i)^{-1}$, *aplicamos Fórmula Integral de Cauchy, com* $z_0 = -2i$, *e encontramos:*

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{zdz}{z^2+4} = 2\pi i f(z_0) = \pi i.$$

CONSEQUÊNCIAS

1. VALOR DA FUNÇÃO SOBRE O CONTORNO Conhecendo os valores de uma função analítica $f(z)$ sobre um contorno admissível γ, é possível calcular, via integração, todos os valores da função f nos pontos internos ao contorno. De fato, se z_0 é um ponto interno ao contorno γ, então:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz. \tag{4.14}$$

No cálculo da integral é suficiente conhecermos os valores $f(z)$ nos pontos do contorno γ.

2. REGULARIDADE DAS FUNÇÕES ANALÍTICAS Uma função $f(z)$, analítica em z_0, é infinitamente derivável em uma vizinhança de z_0 e, além disso, todas as derivadas $f^{(n)}(z)$ são analíticas em z_0. A comprovação desta consequência tem como princípio a derivação sob o sinal de integral, onde permutamos o limite com o sinal de integral, o que é permitido, neste caso. Para a derivada $f'(z)$, consideramos um contorno admissível γ e obtemos de (4.14):

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-(z_0+\Delta z)} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\Delta z}\int_\gamma \frac{(\Delta z) f(z)\,dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $\Delta z \to 0$, encontramos:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}.$$

Usando o processo indutivo é possível comprovar a Fórmula Integral de Cauchy em sua versão geral:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.15}$$

3. TEOREMA DE MORERA Se $f(z)$ é contínua em um domínio D, simplesmente conexo, e

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0 \tag{4.16}$$

ao longo de qualquer contorno admissível γ em D, então a função $f(z)$ é analítica em D. O Teorema de Morera é na verdade uma recíproca do Teorema de Cauchy-Goursat e a condição (4.16) estabelece que a integral de $f(z)$ independe do contorno. Assim, fixado z_0 em D, a função

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

está bem definida e é analítica, já que $F'(z) = f(z)$.

4. TEOREMA DE LIOUVILLE Uma função complexa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que é, ao mesmo tempo, inteira e limitada, é constante. De fato, dado z em $\mathbb{C}$, segue da Fórmula Integral de Cauchy que:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = R} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2} \tag{4.17}$$

e considerando M um majorante de $|f(z)|$ em $\mathbb{C}$, resulta de (4.17)

$$\left|f'(z)\right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z| = R} \frac{|f(\xi)|\, |d\xi|}{|\xi - z|^2} \leq \frac{M}{2\pi R^2} \int_{|\xi - z| = R} |d\xi| = \frac{M}{R} \tag{4.18}$$

e fazendo em (4.18) $R \to \infty$, obtemos $|f'(z)| = 0$, para todo z em $\mathbb{C}$, e daí segue que $f(z)$ é constante.

5. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA Todo polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

de grau $n \geq 1$, possui ao menos uma raiz no corpo $\mathbb{C}$. Para provar, vamos raciocinar por contradição, admitindo que $P(z)$ não possui raiz em $\mathbb{C}$. Então a função complexa $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ é inteira e, portanto, limitada no disco compacto $K_R : |z| \leq R$, de modo que existe uma constante $M_1 > 0$, tal que:

$$|f(z)| \leq M_1, \quad \forall z \in K_R. \tag{4.19}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{|z| \to \infty} |P(z)| &= \lim_{|z| \to \infty} \left(|z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \right) \\
&\geq \lim_{|z| \to \infty} \left[|z|^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| - \cdots - \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| - \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \right] = \infty,
\end{aligned}$$

de onde resulta que $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ e, portanto, existe uma constante positiva M_2, tal que:

$$|f(z)| \leq M_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ com } |z| \geq R. \tag{4.20}$$

Combinando (4.19) e (4.20) deduzimos que $f(z)$ é limitada em $\mathbb{C}$ e pelo Teorema de Liouville, concluímos que $f(z)$ e, consequentemente $P(z)$, é constante. Isto não é possível, a menos que $n = 0$, o que não é o caso.

6. DESIGUALDADE DE CAUCHY Suponhamos que $f(z)$ seja analítica em $D : |z - z_0| < R$ e contínua no compacto $\overline{D} : |z - z_0| \leq R$ e seja M o valor máximo de $|f(z)|$ no compacto $\overline{D}$. Então

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!M}{R^n}. \tag{4.21}$$

A desigualdade (4.21), que leva o nome de Desigualdade de Cauchy, é consequência direta da Fórmula Integral de Cauchy. De fato, temos:

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}}\int_{|z-z_0|=R} |dz| = \frac{n!M}{R^n}.$$

EXEMPLO 4.3.13 (Aplicando a Desigualdade de Cauchy) *Uma função inteira $f(z)$ que satisfaz à desigualdade $|f(z)| \leq C|z|$, para alguma constante real C e para todo número complexo z, ou é identicamente nula ou existe uma constante complexa λ, tal que $f(z) = \lambda z$, $\forall z$. Para comprovar, suponhamos que f não seja identicamente nula e fixemos um ponto z no plano $\mathbb{C}$. Se M é o valor máximo de $|f(\xi)|$, no disco $|\xi - z| \leq R$, então:*

$$M = \max_{|\xi-z|=R} |f(\xi)| \leq \max_{|\xi-z|=R} (C|\xi|) \leq \max_{|\xi-z|=R} C(|\xi - z| + |z|) = C(R + |z|)$$

e da Desigualdade de Cauchy, resulta:

$$\left|f''(z)\right| \leq \frac{2!M}{R^2} \leq \frac{2!C(R+|z|)}{R^2}. \tag{4.22}$$

Fazendo em (4.22) $R \to \infty$, deduzimos que $f''(z) = 0$ de onde resulta que $f(z) = \lambda z + k$ e para concluir, notamos que $k = f(0) = 0$.

7. PRINCÍPIO DO MÓDULO MÁXIMO Seja $f(z)$ uma função analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$ e suponhamos que f não seja constante em D_R. Se γ é a circunferência $|z - z_0| = r$, $0 < r < R$, segue da Fórmula Integral de Cauchy que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \tag{4.23}$$

e, como consequência de (4.23), temos:

(i) O valor de $f(z)$ no ponto z_0, centro do círculo, é a média dos valores de f na circunferência.

(ii) No disco D_R, existe ao menos um ponto z, tal que $|f(z_0)| < |f(z)|$. De fato, de (4.23) resulta:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta$$

e, se fosse $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo z em D_R, teríamos:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|\,d\theta = |f(z_0)|,$$

e isto acarretaria

$$\int_0^{2\pi}\left(|f(z_0)| - \left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|\right)d\theta = 0.$$

Sendo a função real $\theta \mapsto |f(z_0)| - \left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right|$ contínua e não negativa em $[0,2\pi]$, da última igualdade concluímos que $|f(z_0)| - \left|f\left(z_0+re^{i\theta}\right)\right| = 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 < r < R$, e a função $|f(z)|$ (e pelo Corolário 2.3.18 a função $f(z)$) seria constante em D_R, contradizendo nossa hipótese. Com isto estabelecemos o Princípio do Módulo Máximo: "o valor máximo de $|f(z)|$ não ocorre em um ponto interior ao disco".

TEOREMA 4.3.14 (Teorema do Módulo Máximo) *Se $f(z)$ é analítica e não constante em uma região compacta K, então o valor máximo de $|f(z)|$ não ocorre no interior do compacto K.* ■

EXEMPLO 4.3.15 *Para ilustrar o Teorema do Módulo Máximo, consideremos a função $f(z) = (z+1)^2$, na região compacta K, delimitada pelo triângulo de vértices $z = 0,\ z = 1$ e $z = i$. Se $z = x + iy$, então*

$$|f(z)| = (x+1)^2 + y^2$$

e na região K o valor máximo da função real $z \mapsto |f(z)|$ é $M = 4$, atingido nos pontos $z = 1$ e $z = i$, da fronteira de K.

OBSERVAÇÃO 4.3.16 (Sobre o Princípio do Módulo Mínimo) *A função $f(z) = z$ é analítica no disco $\overline{D} : |z| \leq 1$ e a função real $z \mapsto |f(z)|$ atinge seu valor mínimo na origem $z = 0$, o qual é um ponto interior ao disco $\overline{D}$. No caso em que a função $f(z)$ é analítica e não constante em um domínio limitado D e contínua na região compacta $\overline{D}$, com $f(z) \neq 0$ em D, então o valor mínimo de $|f(z)|$ ocorrerá em um ponto z_0 da fronteira ∂D. De fato, neste caso, z_0 será um ponto de máximo da função $g(z) = 1/f(z)$, o qual, pelo Teorema do Módulo Máximo, estará na fronteira do domínio D.*

EXEMPLO 4.3.17 *Vamos ilustrar o Princípio do Módulo Mínimo, considerando* $f(z) = (z+1)^2$ *na região delimitada pelo triângulo de vértices* $z = 0, z = i$ *e* $z = 2$. *A função* $f(z)$ *não se anula na região e a real* $|f(z)|$ *atinge seu valor mínimo* $m = 1$ *no ponto de fronteira* $z = 0$.

EXEMPLO 4.3.18 (Princípio do Min-Max para funções harmônicas) *Dada uma função* $u(x,y)$, *harmônica e não constante no domínio limitado* D, *seja* $v(x,y)$ *uma harmônica conjugada de* u. *Se a função analítica* $f(z) = u + iv$ *é contínua na região compacta* $\overline{D} = D \cup \partial D$, *então o valor máximo (e também o valor mínimo) de* $u(x,y)$ *ocorre em um ponto da fronteira de* D. *Para comprovar, seja* z_0 *o ponto de máximo da função real* $z \mapsto |\exp(f(z))|$, *o qual jaz na fronteira* ∂D *e é, também, o ponto de máximo da função* $u(x,y)$, *tendo em vista que:*

$$\exp(u(z_0)) = |\exp(f(z_0))| \geq |\exp(f(z))| = \exp(u(z)), \quad \forall z \in \overline{D},$$

e daí resulta que $u(z_0) \geq u(z)$, $\forall z \in \overline{D}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 4.3)**

1. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica e usando o Teorema de Cauchy-Goursat deduza que $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$:

   (a) $w = \dfrac{z^2}{z-3}$ **(b)** $w = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$ **(c)** $w = \dfrac{z}{\exp z}$ **(d)** $w = z\,\mathrm{Log}(z+2i)$ **(e)** $w = \tan z$.

2. Seja $\mathcal{R}$ a região compreendida entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado de vértices $z = \pm 1$ e $z = \pm i$, com a fronteira $\partial\mathcal{R}$ orientada no sentido positivo. Em cada caso, explique por quê $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\,dz = 0$.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z+2}{\mathrm{sen}(z/2)}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{z}{1-\exp z}$.

3. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz$, sendo $w = f(z)$ dada por:

   (a) $\dfrac{1}{z}$ **(b)** $\dfrac{1}{4+iz}$ **(c)** $\dfrac{\exp(2z)}{z+2i}$ **(d)** $\dfrac{\cos z}{z}$ **(e)** $\dfrac{e^z - 1}{2z-1}$ **(f)** $\dfrac{\cosh(3z)}{z}$.

4. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z^4-1}dz$, sendo γ o círculo $|z-i| = 1/2$.

5. Seja γ o contorno $|z| = 3$, com orientação positiva, e defina a função

$$g(z) = \int_\gamma \frac{2\xi^2 - \xi - 2}{\xi - z} d\xi, \quad |z| \neq 3.$$

Calcule os valores de $g(2)$ e $g(4i)$. Qual o valor de $g(z)$, para $|z| > 3$?

6. Seja γ um contorno simples, fechado e suave, e defina a função

$$g(z) = \int_\gamma \frac{\left(\xi^2 + 2\xi\right) d\xi}{\xi - z}.$$

Quais os possíveis valores para $g(z)$? Note que g não está definida nos pontos do contorno γ.

7. Seja $\mathcal{R}$ a região delimitada pelo quadrado de vértices $z = \pm 2$ e $z = \pm 2i$ e considere a fronteira $\partial\mathcal{R}$ com orientação positiva. Calcule $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\, dz$, nos seguintes casos:

(a) $f(z) = \dfrac{\exp(-z)}{2z - \pi i}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{\tan(z/2)}{(z - z_0)^2}, \quad |z_0| < 1/2.$

8. Seja $w = f(z)$ uma função analítica na região delimitada por um contorno simples fechado γ e seja z_0 um ponto fora de γ. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)\, dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^2}.$$

9. Seja γ o círculo unitário $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$. Se λ é uma constante real, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^{\lambda z}\, dz}{z} = 2\pi i$ e usando o resultado conclua que $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\lambda \cos\theta} \cos(\lambda \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \pi$.

10. Ilustre o Princípio do Min-max para funções harmônicas, apresentado no Exemplo 4.3.18, com os dados: $f(z) = \exp z$ e $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \pi$.

11. Dado um polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, de grau $n \geq 1$, mostre que existe uma constante $R > 0$, tal que:

$$|P(z)| > \frac{|a_n|\, |z|^n}{2}, \quad \text{sempre que } |z| > R. \tag{4.24}$$

12. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos\left(z^2 + 3z - 1\right) dz}{(2z+3)^2}$ **(b)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}\left(z^2 + 2\right) dz}{(3z-2)^2}$ **(c)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\left(z^2 + z + i\right) dz}{(4z - i)^3}.$

13. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função inteira e suponha que $u(x,y)$ seja limitada em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $u(x,y)$ é constante.

14. Suponha que a função $f(z) = \sqrt{z^2+4}$ seja determinada pela condição $f(0) = -2$. Se γ é o quadrado de vértices $z = \pm 1 \pm i$, com orientação positiva, calcule:

    (a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{4z^2+4z-3}$ **(b)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{4z^2-4iz-1}$ **(c)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{(2z^2+1)\,f(z)}$.

15. Se γ é o contorno $|z-i| = 2$, com orientação positiva, calcule o valor de $\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz$, sendo:

    (a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ **(b)** $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

16. Seja $w = f(z)$ uma função analítica no disco $|z| < 1$, no qual se tem $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1-|z|}$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy no contorno $\gamma_n : |z| = \dfrac{n}{n+1}$, deduza que:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.25}$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

4.1. INTEGRANDO FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

1. Usando primitivas, obtemos:

   (a) $-\sqrt{2}/2 + \left(1 - \sqrt{2}/2\right) i$.

   (b) $1/w$.

   (c) A integral é igual a 2π, se $m = n$, e igual a 0, caso contrário.

2. **(a)** i **(b)** $2+2i$ **(c)** $\frac{1}{2}\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right)$.

3. $I = 2 + 3i$.

4.2. INTEGRANDO FUNÇÃO DE VARIÁVEL UMA COMPLEXA

1. Usando a parametrização canônica.

   (a) $z(t) = t + 2it, \quad 0 \leq t \leq 1.$

   (b) $z(t) = -2 + it, \quad 1 \leq t \leq 4.$

   (c) $z(t) = 4\cos t + (2 + 4\operatorname{sen} t)\, i, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

   (d) $z(t) = 5\cos t + 5i\operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

   (e) $z(t) = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 3.$

   (f) $z(t) = 3\cos t + i\operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. **(a)** Circunferência de centro $z_0 = 3i$ e raio $R = 3$.

   (b) Arco da parábola $y = 3x^2$, de $z_1 = 1 + 3i$ até $z_2 = 2 + 12i$.

   (c) O segmento de reta de $z = 1$ até $z = 3 - i$.

   (d) O arco de circunferência $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$, de $z = (1, 0)$ até $z = (-1, 0)$.

   (e) A semi-reta $[x = 1;\ -\infty < y \leq 0]$.

   (f) O arco da circunferência $|z| = 1,\ \operatorname{Re}(z) \geq 0$, de $z = -i$ até $z = i$.

3. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[F(z(t))\right] &= \frac{d}{dt}\left[u(x(t), y(t))\right] + i\frac{d}{dt}\left[v(x(t), y(t))\right] \\
&= u_x x' + u_y y' + i\left(v_x x' + v_y y'\right) \\
&= (u_x + iv_x)\, x' + i\,(v_y - iu_y)\, y' \\
&= F'(z(t))\left(x' + iy'\right) = F'(z(t))\, z'(t).
\end{aligned}$$

4. **(a)** $-2i$ **(b)** $-2i$ **(c)** $27(1 + i)^3$.

5. Ao longo do arco $|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \leq 0$, a integral é $-2i$ e ao longo do segmento de $-i$ até i a integral é igual a i.

6. **(a)** $2\sqrt{2}i/3$ **(b)** $-4/3$ **(c)** $4i/3$.

7. Em alguns casos, o uso de primitivas torna os cálculos mais simples.

(a) $\frac{5}{3}(1+5i)$.

(b) $-\frac{2}{3}+\frac{i}{2}$.

(c) 0.

(d) $2-2i$.

(e) $4-2\pi i$

(f) A integral vale $2\pi i$, se $m=n-1$, e zero, caso contrário.

(g) $1+e$.

(h) 0.

(i) $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi^2\right)$.

8. $I=2+3i$.

9. **(a)** No arco γ, temos que $|1/z|\leq 1$ e, portanto:

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|} \leq \int_\gamma |dz| = 1.$$

(b) No arco γ, temos $\left|1+z^2\right| \geq |z|^2-1=3$. Logo,

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{3}\int_\gamma |dz| = \frac{1}{3}L(\gamma) = \frac{\pi}{3}.$$

10. Dado $\varepsilon>0$, seja $\delta>0$, tal que $\left|f\left(re^{i\theta}\right)-f(0)\right|<\varepsilon$, $\forall\theta$ e $0<r<\delta$. Assim,

$$\left|\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right)d\theta - 2\pi f(0)\right| \leq \int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)-f(0)\right|d\theta < 2\pi\varepsilon.$$

11. No triângulo γ, temos $x=\operatorname{Re}(z)\leq 0$, de modo que $e^x\leq 1$ e $|\overline{z}|=|z|\leq 4$. Assim:

$$\left|\int_\gamma \left(e^z-\overline{z}\right)dz\right| \leq \int_\gamma \left(e^x+|\overline{z}|\right)|dz| \leq \int_\gamma (1+4)\,|dz| = 5\cdot L(\gamma) = 60.$$

12. **(a)** No contorno $\gamma_R : z=R\exp(i\theta)$, $-\pi<\theta\leq\pi$, temos:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R}\frac{\operatorname{Log} z}{z^2}dz\right| &\leq \int_{\gamma_R}\frac{|\operatorname{Log} z|\,|dz|}{R^2} = \frac{1}{R^2}\int_{\gamma_R}|\ln R+i\theta|\,|dz| \leq \frac{1}{R^2}\int_{\gamma_R}(\ln R+|\theta|)\,|dz| \\ &= \frac{1}{R^2}(\ln R+\pi)\int_{\gamma_R}|dz| = \frac{2\pi(\ln R+\pi)}{R}.\end{aligned}$$

(b) Segue de **(a)**, com $R \to \infty$.

4.3. TEOREMAS CLÁSSICOS & CONSEQUÊNCIAS

1. Se uma função $w = f(z)$ é analítica em uma região delimitada por um contorno γ, simples, fechado e suave (curva de Jordan), então $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Em cada caso, representamos por $\mathcal{R}$ a região onde $f(z)$ é analítica.

   (a) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 3\}$.

   (b) $\mathcal{R} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 \pm i\sqrt{2}\right\}$.

   (c) $\mathcal{R} = \mathbb{C}$. (a função $f(z)$ é inteira.)

   (d) $\mathcal{R} = \mathbb{C}\backslash E$. (a função $f(z)$ é analítica fora do semi-eixo $E = [x \leq 0$ e $y = -2]$.)

   (e) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi + \pi/2\}$.

2. As singularidades da função estão fora da região $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.

3. Nos casos (a), (d), (e) e (f) o resultado segue da Fórmula Integral de Cauchy. Em (b) e (c) a integral é 0, pelo Teorema de Cauchy-Goursat.

   (a) $2\pi i$ (d) $2\pi i$ (e) $\pi i\left(\sqrt{e} - 1\right)$ (f) $2\pi i$.

4. Fatorando o polinômio $z^4 - 1$ e considerando $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 + iz^2 - z - i}$ encontramos:

$$\int_\gamma \frac{z^2 dz}{z^4 - 1} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z - i} = 2\pi i f(i) = \pi/2.$$

5. Temos que $g(2) = 8\pi i$ e se $|z| > 3$, então $g(z) = 0$.

6. Se o contorno γ envolve o ponto z, temos $g(z) = \pm 2\pi i\left(z^2 + 2z\right)$, de acordo com a orientação escolhida para γ. Se o ponto z não está nem é envolvido pelo contorno γ, então $g(z) = 0$.

7. **(a)** π **(b)** $-\pi i/2$ **(c)** $\pi i \sec^2(z_0/2)$.

8. Resolva por etapas, observando a posição do ponto z_0 em relação à região $\mathcal{R}$ delimitada por γ.

   (i) Se o ponto z_0 for exterior à região $\mathcal{R}$, os integrandos são analíticos e as integrais serão nulas.

(ii) Se o ponto z_0 é interior à região, segue da Fórmula integral de Cauchy que as duas intgerais valem $2\pi i f'(z_0)$.

9. Da Fórmula Integral de Cauchy, com $f(z) = \exp(\lambda z)$, temos:

$$\int_\gamma \frac{e^{\lambda z}}{z} dz = \int_\gamma \frac{e^{\lambda z}}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_\gamma \frac{e^{\lambda z}}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(\lambda e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}} \left(ie^{i\theta}\right) d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\lambda \cos\theta + i\lambda \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda\cos\theta} [\cos(\lambda \operatorname{sen}\theta)]\, d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda\cos\theta} [\operatorname{sen}(\lambda \operatorname{sen}\theta)]\, d\theta. \end{aligned}$$

Logo, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda\cos\theta} [\operatorname{sen}(\lambda \operatorname{sen}\theta)]\, d\theta = 0$ e $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{\lambda\cos\theta} [\cos(\lambda \operatorname{sen}\theta)]\, d\theta = \pi$.

10. Dado que $f(z) = \exp z$, então $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Considerando que a função $u(x,y) = e^x \cos y$ não tem ponto crítico, concluímos que os valores máximo e mínimo de $u(x,y)$ ocorrem na fronteira da região. Raciocínio similar se aplica à função $v(x,y)$.

11. Considerando que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| = 0$, existe $R > 0$, tal que

$$\left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| < \frac{|a_n|}{2}, \quad \text{sempre que } |z| > R. \tag{4.26}$$

Agora, usando (4.26), temos:

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left|a_n + \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right| \geq |z|^n \left(|a_n| - \left|\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}\right|\right) \\ &> |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_n|}{2}\right) = \frac{|z|^n |a_n|}{2}, \quad \text{se } |z| > R. \end{aligned}$$

12. **(a)** 0 (b) $4\pi i/33$ (c) $\pi i/32$.

13. Sendo $u(x,y)$ limitada, a função $g(z) = \exp[f(z)]$ é inteira e limitada, já que $|g(z)| = e^{u(x,y)}$, e do Teorema de Liouville segue que $g(z)$, e, portanto, $u(x,y)$, é constante.

14. É fundamental a escolha do ramo de $\operatorname{Log} z$, para podermos aplicar a Fórmula Integral de Cauchy. Após a fatoração do denominador, encontramos:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sqrt{z^2+4}\, dz}{4(z+3/2)(z-1/2)} = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{z^2+4}}{4(z+3/2)}\right]_{z=1/2} = \frac{\sqrt{17}}{8}\pi i$ **(b)** $-\pi/2\sqrt{15}$ **(c)** $\pi i\sqrt{2/7}$.

15. **(a)** $\pi/2$ **(b)** $\pi/16$.

16. Sobre o contorno γ_n temos $\dfrac{1}{1-|z|} = n+1$ e da Fórmula Integral de Cauchy, resulta:

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} &= \left|\int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz\right| \leq \int_{\gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \int_{\gamma_n} \frac{|dz|}{1-|z|} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} (n+1) L(\gamma_n) = 2\pi(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.
\end{aligned}$$

5. Séries, Resíduos & Pólos

No Capítulo 1, quando tratamos com sequências complexas $z_k = x_k + iy_k,\ k \in \mathbb{N}$, ressaltamos a importância das sequências reais $x_k = \mathrm{Re}\,(z_k)$ e $y_k = \mathrm{Im}\,(z_k)$. Os conceitos e regras sobre séries numéricas reais serão o ponto de partida para estabelecermos os resultados básicos sobre séries complexas.

5.1 Séries Complexas. Convergência Uniforme

Dada uma sequência (z_k), de números complexos, deixe-nos representar por $Z_n,\ n \in \mathbb{N}$, a n-ésima soma parcial

$$Z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k. \tag{5.1}$$

Se considerarmos $z_k = x_k + iy_k$, teremos $Z_n = X_n + iY_n$, sendo

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{e} \quad Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

e a sequência de somas parciais (Z_n) converge para $Z = X + iY$ se, e somente se, $\lim X_n = X$ e $\lim Y_n = Y$.

DEFINIÇÃO 5.1.1 *A soma infinita* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, *também denominada* ***série****, é convergente quando a sequência* (Z_n) *de somas parciais convergir. Neste caso, anotamos*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim Z_n = \lim X_n + i \lim Y_n.$$

Quando a sequência (Z_n) *divergir, diremos que a série* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *é divergente.*

5.1.1 Propriedades Básicas

Algumas propriedades estabelecidas para séries reais continuam válidas para séries complexas. No que se segue, x_k e y_k representam, respectivamente, as partes real e imaginária do número complexo z_k.

1. A série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente se, e somente se, as séries reais $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(z_k)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,(z_k)$ são convergentes. Neste caso, temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}\,(z_k) + i \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,(z_k)\,. \tag{5.2}$$

PROVA Se $Z_n = X_n + iY_n$ é a n-ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, então:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,(z_k) \quad \text{e} \quad Y_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Im}\,(z_k)$$

e o resultado segue do Exercício 8 da Seção 1.4. ■

2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente, então $\lim |z_k| = 0$.

PROVA Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente, então as séries reais $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ são convergentes e, portanto:

$$\lim x_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim y_k = 0.$$

Logo, $\lim z_k = 0$. ■

3. Se a série real $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ é convergente, então a série complexa $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ também converge.

PROVA Considerando que $|x_k| \leq |z_k|$ e $|y_k| \leq |z_k|\,,\ \forall k$, deduzimos por comparação que as séries reais $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ são absolutamente convergentes e, portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge. ■

4. Como ocorre no caso real, se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ são convergentes e λ é uma constante complexa, então $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \lambda \cdot w_k)$ é convergente, com soma dada por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \lambda \cdot w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

PROVA Decorre diretamente das propriedades do limite para sequências. ■

EXEMPLO 5.1.2 *A série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k + 1}{ik^2}$ *converge absolutamente*[9]. *De fato, basta observar que os termos desta série são, em valor absoluto, dominados pelos termos de uma p-série real convergente*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-i)^k + 1}{ik^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}.$$

EXEMPLO 5.1.3 *A série* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{ik}$ *converge condicionalmente*[10]. *De fato, se* $z_k = \dfrac{(-1)^k}{ik}$, *temos* $x_k = 0$ *e* $\operatorname{Im}(z_k) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$, *de modo que as séries* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *e* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *são convergentes. Assim,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *também converge. Por outro lado,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ *é a série harmônica divergente* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

EXEMPLO 5.1.4 (A Série Geométrica) *Por* ***série geométrica*** *de razão* ξ *e coeficiente* λ, *entendemos uma série do tipo* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot \xi^{k-1}$. *Para uma tal série, temos:*

(a) *Se* $|\xi| < 1$ *a série converge para* $\dfrac{\lambda}{1-\xi}$. *De fato, sendo* $|\xi| < 1$, *temos pelo Exercício 11 da Seção 1.4 que* $\lim(\xi^n) = 0$ *e como a n-ésima parcial* Z_n *vem dada por*

$$Z_n = \lambda \cdot \left(1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1}\right) = \lambda \cdot \left(\frac{1-\xi^n}{1-\xi}\right),$$

temos que $\lim Z_n = \lambda \cdot \lim \left(\dfrac{1-\xi^n}{1-\xi}\right) = \dfrac{\lambda}{1-\xi}$.

(b) *Se* $|\xi| \geq 1$ *e* $\lambda \neq 0$, *então o termo geral* $\lambda \cdot \xi^{k-1}$ *não converge para zero e a série é divergente.*

EXEMPLO 5.1.5 *Para encontrar o* ***disco*** *de convergência da série geométrica* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(3i)^k}$, *observamos que a razão da série é* $\xi = \dfrac{z-i}{3i}$ *e ela será convergente se, e somente se*:

$$\left| \frac{z-i}{3i} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < 3.$$

Portanto, o disco de convergência é $D : |z-i| < 3$, *de centro no ponto* $z_0 = i$ *e raio* $R = 3$. *Por exemplo, no ponto* $z = 1+i$ *a razão é* $\xi = \frac{1}{3i}$ *e, neste caso, a soma da série é igual a*:

$$\frac{1}{1-\xi} = \frac{9-3i}{10}.$$

[9] A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente quando a série real $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ for convergente.

[10] A série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge *condicionalmente* quando for convergente e a série real $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ for divergente.

Consideremos uma sequência $\{f_n : D \to \mathbb{C}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções complexas, definidas em um domínio D do plano $\mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 5.1.6 *A sequência $\{f_n\}$ converge* **pontualmente** *para a função $f : D \to \mathbb{C}$ quando, para cada z no domínio D, a sequência numérica $\{f_n(z)\}$ convergir em $\mathbb{C}$ para o número complexo $f(z)$. Em outras palavras, fixado z em D e dado $\varepsilon > 0$ existe um índice N, que, em princípio, depende de z e ε, tal que:*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$

DEFINIÇÃO 5.1.7 *A sequência $\{f_n\}$ converge* **uniformemente** *para a função $f : D \to \mathbb{C}$ quando a cada $\varepsilon > 0$ corresponder um índice $N = N(\varepsilon)$, tal que:*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N,\ \forall\, z \in D.$$

LEMA 5.1.8 *O limite uniforme de uma sequência $\{f_n : D \to \mathbb{C}\}$, de funções contínuas, é uma função contínua.*

PROVA Deixe f ser o limite uniforme da sequência $\{f_n\}$ e fixemos z_0 no domínio D. Para mostrar que f é contínua em z_0, seja $\varepsilon > 0$ dado e escolhamos $\delta > 0$ e um índice N tais que:

$$|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3, \quad \forall\, z \in D \qquad \textbf{(convergência uniforme)}$$
$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3, \quad |z - z_0| < \delta \qquad \textbf{(continuidade de } f_N \textbf{ em } z_0\textbf{)}$$

A partir da Desigualdade Triangular, obtemos:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f_N(z) - f(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

para todo z em D, tal que $|z - z_0| < \delta$. ■

LEMA 5.1.9 *Seja $\{f_n : D \to \mathbb{C}\}$ uma sequência de funções contínuas, convergindo uniformemente para a função $f : D \to \mathbb{C}$. Se γ é um contorno admissível contido no domínio D, então:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

PROVA Seja $\varepsilon > 0$ dado e fixemos um índice N, tal que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N,\ \forall\, z \in D.$$

Então:

$$\left|\int_\gamma f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz\right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,dz \leq \varepsilon \int_\gamma |dz| = \varepsilon L(\gamma). \tag{5.3}$$

Segue de (5.3) resultado. ■

DEFINIÇÃO 5.1.10 *Diremos que a série de funções complexas* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *converge uniformemente em* D *quando a sequência de reduzidas* $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ *convergir uniformemente em* D.

TEOREMA 5.1.11 *Uma série* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *de funções analíticas* $f_k : D \to \mathbb{C}$, *uniformemente convergente no domínio* D, *define uma função analítica* $f : D \to \mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO A sequência (g_n) de funções analíticas $g_n : D \to \mathbb{C}$, definidas por:

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$$

converge uniformemente em D para a função f e se γ é um contorno admissível em D, então:

$$\oint_\gamma g_n(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_\gamma f_k(z) = 0, \quad \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Pelo Lema 5.1.9 deduzimos que:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \oint_\gamma g_n(z)\,dz = 0$$

e o Teorema de Morera assegura a analiticidade de f. ■

Encerramos esta seção com um teste de convergência uniforme, devido a Weierstrass, muito utilizado em análise.

TEOREMA 5.1.12 (Teste M de Weierstrass) *Seja* $\{f_n\}$ *uma sequência de funções complexas, definidas em um domínio* D *do plano* $\mathbb{C}$, *e suponhamos que exista uma sequência* $\{M_n\}$ *de números reais, tal que*:

(i) *A série real* $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *é convergente.*

(ii) $|f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall\, z \in D, \quad \forall\, n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

Nestas condições, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniforme e absolutamente em D.

DEMONSTRAÇÃO Basta observar que:

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} M_k \to 0, \quad \text{com } n \to \infty,$$

independente do z no domínio D. ■

EXEMPLO 5.1.13 *Fixado qualquer número complexo λ, a série $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{k!}$ converge uniformemente no disco $D : |z| < R$. De fato, se $|z| < R$, então:*

$$\left|\frac{\lambda^k z^k}{k!}\right| \leq \frac{(|\lambda| R)^k}{k!}, \quad \forall\, z \in D, \quad \forall\, k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

e para concluir basta observar que a série real $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\lambda| R)^k}{k!}$ é convergente, pelo Teste da Razão.

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 5.1)**

1. A série $\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^k$ é convergente ou divergente? Porquê?

2. Calcule a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+i)^k}{(2+i)^{k-1}}$ no ponto $z = 2 - i$.

3. Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ é divergente, mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + w_k)$ é divergente.

4. Mostre que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2)^k}{(k+1)^3 4^k}$ converge absolutamente no disco compacto $D : |z+2| \leq 4$.

5. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(nz) - \exp(-nz)}{2^n}$ converge absolutamente na faixa $|\mathrm{Im}(z)| < \ln 2$.

6. Usando o **Teste M de Weierstrass**, estabeleça a convergência uniforme das séries, no domínio indicado.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{n!}$; $|z| < R$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k z^n}{R^n}$; $|z| \leq r < R$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{n^2 + z^2}$; $|z| < R$, $z \neq in$.

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}$; $1 < |z| < 2$. **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{z/n} \cos n}{n^3 + 1}$; $|z| < R$ **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - \cos n) z^{2n}}{n^2 + 1}$; $|z| \leq \frac{1}{2}$

7. Use o Teorema 5.1.11 para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ define, na faixa $|\operatorname{Im}(z)| < \ln 2$, uma função analítica.

8. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$ converge uniformemente no eixo real e que a convergência não é uniforme em região alguma do plano $\mathbb{C}$.

5.2 Séries de Potências

Casos particulares interessantes de séries de funções, são as séries em que o termo geral é do tipo $a_k (z - z_0)^k$. Tais séries são conhecidas por *séries de potências* e se apresentam sob a forma:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \tag{5.4}$$

onde os coeficientes a_k e o centro z_0 são números complexos. As funções analíticas no ponto z_0 podem ser representadas por séries de potências do tipo (5.4) e, reciprocamente, qualquer série de potências (5.4) representa, no disco de convergência, uma função analítica.

EXEMPLO 5.2.1 *A função analítica* $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$, *pode ser vista como a soma de uma série geométrica convergente de razão* z. *De fato, no disco* $|z| < 1$, *temos*

$$\frac{1}{1-z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k. \tag{5.5}$$

Se em (5.5) *trocarmos* z *por* $-z$, *encontramos:*

$$\frac{1}{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k. \tag{5.6}$$

TEOREMA 5.2.2 (Teorema de Abel) *Se a série de potências* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *é convergente no ponto* $z_1 \neq z_0$, *então ela converge absolutamente no disco* $D : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

DEMONSTRAÇÃO Como a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ é convergente, segue que $\lim \left| a_k (z_1 - z_0)^k \right| = 0$ e, assim, existe $M > 0$, tal que $\left| a_k (z_1 - z_0)^k \right| \leq M$, $\forall\, k$. Ora:

$$\left| a_k (z - z_0)^k \right| = \left| a_k (z_1 - z_0)^k \right| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^k, \quad \forall\, k,$$

e segue por comparação que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ converge absolutamente em D. ■

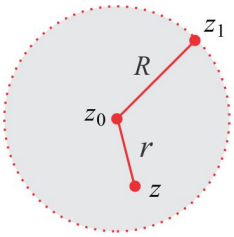


Figura 5.1:

CONSEQUÊNCIAS

1. DISCO DE CONVERGÊNCIA

Se a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ é divergente no ponto $z = z_2$, então ela será divergente em qualquer z, tal que $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$. De fato, se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ convergisse em algum z^*, com $|z^* - z_0| = r > R$, ela seria convergente em qualquer z, tal que $|z - z_0| < r$ e, em particular, convergiria em $z = z_2$, contradizendo a hipótese.

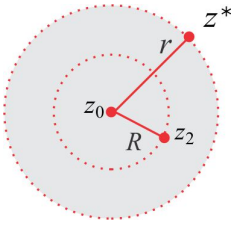


Figura 5.2:

2. EXPOENTES NEGATIVOS

Se a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$ convergir absolutamente no ponto $z_1 \neq z_0$, então ela convergirá absolutamente no disco $D : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$. De fato, se ela fosse divergente em algum z^* do disco D, então:

$$\left| \frac{b_k}{(z^* - z_0)^k} \right| \leq \left| \frac{b_k}{(z_1 - z_0)^k} \right|$$

e, por comparação, a série $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \, |z - z_0|^{-k}$ seria divergente.

3. RAIO DE CONVERGÊNCIA

Assim como ocorre com as séries de potências reais, toda série de potências complexas $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ tem um raio de convergência R, o qual pode ser 0, $+\infty$ ou $0 < R < +\infty$. No último caso, a série converge absolutamente no disco $D_R : |z - z_0| < R$ e diverge se $|z - z_0| > R$. O número real R é definido por:

$$R = \sup \left\{ |z - z_0| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ converge} \right\}.$$

LEMA 5.2.3 *Com respeito à série* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ *apenas uma das condições abaixo ocorre:*

(i) *A série converge apenas em* $z = z_0$. *Neste caso, o raio de convergência é* $R = 0$.

(ii) *A série converge em todo ponto* z. *Neste caso, o raio de convergência é* $R = \infty$.

(iii) *Se* $0 < R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| < \infty$, *então a série converge absolutamente no disco* $|z-z_0| < R$ *e diverge se* $|z-z_0| > R$.

PROVA Aplicando o Teste da Razão à série numérica real $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z-z_0|^k$, calculamos:

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}}{a_k (z-z_0)^k}\right| = \frac{|z-z_0|}{R}$$

e deduzimos que a série converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $L > 1$, isto é, converge absolutamente, se $|z-z_0| < R$, e diverge, se $|z-z_0| > R$. É oportuno ressaltar que a divergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z-z_0|^k$ não implica na divergência de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$. Para concluir que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ diverge, no caso em que $|z-z_0| > R$, raciocinamos por absurdo, admitindo que ela convirja em z_1, com $|z_1 - z_0| > R$. Pelo Teorema de Abel, a série convergiria absolutamente no anel $R < |z-z_0| < |z_1-z_0|$, contradizendo o Teste de Razão. ■

5.2.1 Convergência Uniforme das Séries de Potências

A convergência uniforme para as séries de potências, estabelecidada a seguir, é o ponto de partida para os processos de integração e derivação termo a termo.

TEOREMA 5.2.4 (Convergência Uniforme) *A série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *converge absoluta e uniformemente no disco* $\overline{D}_r : |z-z_0| \le r < R$, *sendo* R *o raio de convergência da série.*

DEMONSTRAÇÃO Sejam

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k .$$

No disco de convergência $D_R : |z - z_0| < R$ a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para f e desejamos provar que a convergência é uniforme em $\overline{D}_r : |z - z_0| \leq r$, com $r < R$. Fixemos ξ no anel $D : r < |\xi - z_0| < R$, como ilustrado na Figura 5.3, e seja z qualquer ponto do disco $\overline{D}_r$. Temos:

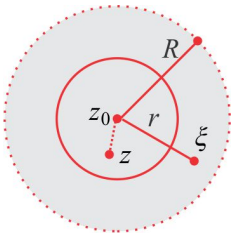


Figura 5.3:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |\xi - z_0|^k \longrightarrow 0, \quad \text{com } n \to \infty,$$

independente de z no disco $|z - z_0| < r$.

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice N, tal que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N,\ \forall\, z \in \overline{D}_r \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO 5.2.5 (Integração Termo a Termo) *Se γ é um contorno admissível contido no disco de convergência D_R da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ e $g(z)$ é uma função contínua em D_R, então:*

$$\int_\gamma \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k g(z)\right] dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma a_k (z - z_0)^k g(z)\, dz.$$

PROVA Segue do Teorema 5.2.4 que:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k g(z) \longrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k g(z),$$

uniformemente em $\overline{D} : |z - z_0| \leq r < R$ e como $f_n g \to fg$, uniformemente em D_R, resulta do Lema 5.1.9 que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z) g(z)\, dz &= \int_\gamma f(z) g(z)\, dz \Leftrightarrow \\
\lim_{n\to\infty} \int_\gamma \left[\sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k g(z)\right] dz &= \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right) g(z)\, dz \Leftrightarrow \\
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_\gamma a_k (z - z_0)^k g(z)\, dz &= \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right) g(z)\, dz \Leftrightarrow \\
\sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma a_k (z - z_0)^k g(z)\, dz &= \int_\gamma \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\right) g(z)\, dz.
\end{aligned}$$

COROLÁRIO 5.2.6 (Derivação Termo a Termo) *A série de potências* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ *define no seu disco de convergência uma função analítica* $f(z)$ *e a derivada* $f'(z)$ *é dada por:*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}. \tag{5.7}$$

O raio de convergência da série obtida por derivação termo a termo é igual ao raio de convergência da série original.

PROVA As somas parciais $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k$ são analíticas no domínio de convergência D_R, de modo que:

$$\oint_\gamma f_n(z)\, dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

sobre qualquer contorno admissível γ, contido no disco de convergência. Assim:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_\gamma f_n(z)\, dz = 0$$

e, sendo $f(z)$ contínua em D_R, segue do Teorema de Morera que $f(z)$ é analítica em D_R.

Comprovemos, agora, a relação (5.7). Dado ξ em D_R, temos:

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k (\xi - z_0)^k = \lim_{n\to\infty} f_n(\xi)$$

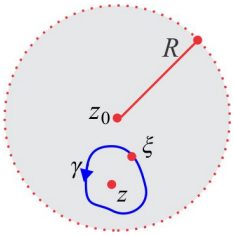


Figura 5.4:

e daí resulta que:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f_n(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^2}$$

e da Fórmula Integral de Cauchy, deduzimos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} k a_k (z-z_0)^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k (z-z_0)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

Se R^* é o raio de convergência da série do lado direito de (5.7), então:

$$R^* = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1)\, a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 5.2.7 (Representação de Taylor) *Seja $w = f(z)$ uma função analítica em uma região contendo o disco $D_R : |z - z_0| < R$. Dado z no disco D_R, então:*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + E_n,$$

sendo

$$E_n = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z}, \quad 0 < r < R,$$

com $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dado z, com $|z - z_0| = r_1 < r$, seja $w = \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}$. Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0}\left(\frac{1}{1 - w}\right) \\
&= \frac{1}{\xi - z_0}\left(1 + w + w^2 + \cdots + w^n + \frac{w^{n+1}}{1 - w}\right) \\
&\quad \frac{1}{\xi - z_0}\left[1 + w + w^2 + \cdots + w^n + \frac{(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n}\right].
\end{aligned}$$

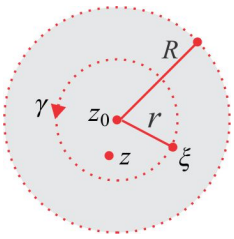


Figura 5.5:

Se γ é o arco $|z - z_0| = r$, obtemos da Fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)\ d\xi}{\xi - z} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{f(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z_0)^2} + \cdots + \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right] d\xi + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left[\frac{f(\xi)(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}}\right] d\xi \\
&= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + E_n,
\end{aligned}$$

onde $E_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \left[\frac{f(\xi)(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}}\right] d\xi$.

Para concluir, resta-nos provar que $\lim E_n = 0$, com $n \to \infty$. De fato, se $M = \max\limits_{|\xi - z_0| = r} |f(\xi)|$, temos:

$$|E_n| \le \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi}\int_\gamma \frac{M\,|d\xi|}{|\xi - z|\, r^{n+1}}$$

e, considerando que $|\xi - z| = |\xi - z_0 + z_0 - z| \ge |\xi - z_0| - |z - z_0| = r - r_1$, encontramos:

$$|E_n| \le \frac{r_1^{n+1} M}{2\pi}\frac{L(\gamma)}{(r - r_1)\, r^{n+1}} = \frac{r_1 M}{r - r_1}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n \to 0, \quad \text{com } n \to \infty. \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO 5.2.8 *Nas condições do Teorema 5.2.7 temos a seguinte representação em série de Taylor para a função f :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \quad \blacksquare \tag{5.8}$$

EXEMPLO 5.2.9 (Série Geométrica) *No disco $|z| < 1$, é válida a representação:*

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

EXEMPLO 5.2.10 (Função Exponencial) *Em qualquer $z \in \mathbb{C}$, temos que:*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

EXEMPLO 5.2.11 (Função Seno) *Podemos usar a representação de $\exp(z)$ para obter a série de $f(z) = \operatorname{sen} z$. Para isto, recordemos que $i^{2k+1} = (-1)^k i$, de modo que:*

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{1}{2i}\left[e^{iz} - e^{-iz}\right] = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i^n - (-i)^n}{n!}\right] z^n = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Assim,

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

EXEMPLO 5.2.12 (Função Cosseno) *Considerando, agora, que $\cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right]$ e procedendo como no Exemplo 5.2.11, encontramos:*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

EXEMPLO 5.2.13 *Usando a série do Exemplo 5.2.12, obtemos:*

(i) $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{1-\cos z}{z}\right) = \lim\limits_{z\to 0}\left(\frac{1}{2!}z - \frac{1}{4!}z^3 + \frac{1}{6!}z^5 - \frac{1}{8!}z^7 + \cdots\right) = 1.$

(ii) $\cosh z = -i\cos(iz) = -i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (iz)^{2n}}{(2n)!} = -i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n (i)^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = -i\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}.$

TEOREMA 5.2.14 (Representação de Laurent) *Suponhamos que a função $w = f(z)$ seja analítica no anel $D : r < |z - z_0| < R$ e nos contornos orientados $\gamma_R : |z - z_0| = R$ e $\gamma_r : |z - z_0| = r$. Dado z no anel D, então:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \tag{5.9}$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}} \quad e \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{-n+1}} \tag{5.10}$$

Antes de procedermos com a demonstração do Teorema de Laurent, vejamos alguns comentários e exemplos. A representação (5.9) é a Série de Laurent da função f em torno da singularidade $z = z_0$ e nela destacamos:

(i) **Parte Analítica ou Regular de f:** a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, de termos com expoentes positivos.

(ii) **Parte Principal ou Singular de f:** a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$, de termos com expoentes negativos.

(iii) Se $f(z)$ é analítica no disco $D_R : |z-z_0| < R$, então $b_n = 0,\ \forall\ n$, e a série de Laurent de f se reduz à serie de Taylor (5.8). De fato, $b_n = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)(z-z_0)^{n-1}\,dz = 0,\ n = 1, 2, 3, \ldots$.

(iv) Se $f(z)$ é analítica no anel $0 < |z-z_0| < R$, então o raio r pode ser considerado suficientemente pequeno e a representação (5.9) será válida em $0 < |z-z_0| < R$.

(v) O coeficiente b_1 da Parte Principal é o **Resíduo** de $f(z)$ em z_0 e anota-se: $b_1 = \mathrm{Res}(f; z_0)$. O que é o Resíduo de fato? Quando uma função $f(z)$ é analítica num domínio D, exceto na singularidade isolada z_0, interior ao domínio D, a integral de $f(z)$ ao longo do contorno $\gamma : |z-z_0| = \delta$, contido em D, pode não ser zero. Se fizermos $\mathcal{R} = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, teremos:

$$\oint_\gamma \left[f(z) - \frac{\mathcal{R}}{z-z_0}\right] dz = \oint_\gamma f(z)\,dz - \mathcal{R}\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = \oint_\gamma f(z)\,dz - 2\pi i\mathcal{R} = 0.$$

Esta é a razão de $\mathcal{R}$ ser denominado resíduo de $f(z)$ no ponto z_0. Se integrarmos a equação (5.9) sobre o contorno γ, considerando que:

$$\int_\gamma (z-z_0)^m\,dz = 0,\ m \in \mathbb{Z}, m \neq -1 \quad \text{e} \quad \int_\gamma (z-z_0)^{-1}\,dz = 2\pi i, \tag{5.11}$$

chegaremos a:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_\gamma (z-z_0)^n\,dz + \oint_\gamma \frac{b_1}{z-z_0}dz + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \oint_\gamma (z-z_0)^{-n}\,dz = 2\pi i b_1$$

de onde resulta que $b_1 = \mathcal{R}$. O resíduo de f corresponde à parcela que deve ser retirada da parte principal de f para que:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

(vi) Os integrandos que figuram nas expressões (5.10) são analíticos em qualquer contorno γ simples, fechado e regular por partes, contido no anel D e envolvendo o ponto z_0, e pode ser usado no cálculo dos coeficientes a_n e b_n.

(vii) A série de Laurent (5.9) pode ser expressa sob a forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n, \quad \text{sendo} \quad A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

(viii) A representação (5.9) de $f(z)$ em série de Laurent no anel D é única. De fato, se fosse

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R,$$

então, dado $\gamma : |z - z_0| = \delta,\ r < \delta < R$, teríamos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_\gamma (z - z_0)^{n-k-1}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \int_\gamma (z - z_0)^{n-k-1}\,dz, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

e usando (5.11), encontramos $2\pi i A_k = 2\pi i B_k$, isto é, $A_k = B_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, comprovando a unicidade da representação (5.9).

EXEMPLO 5.2.15 *A função* $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^2}$ *já está desenvolvida em série de Laurent em torno de* $z = 2$. *Neste caso, temos:*

(i) $a_n = 0,\ \forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) $b_2 = 1$ *e* $b_n = 0,\ n = 1, 3, 4, 5, \ldots$. *além disso,* $\mathrm{Res}(f; 2) = b_1 = 0$.

EXEMPLO 5.2.16 *No anel* $0 < |z| < \infty$, *a série de Laurent, em torno de* $z = 0$, *de* $f(z) = e^z/z^3$ *é:*

$$\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \cdots$$

onde vemos que $\mathrm{Res}(f; 0) = 1/2$.

EXEMPLO 5.2.17 *Vamos calcular* $\operatorname{Res}(f;0)$ *e* $\operatorname{Res}(f;i)$ *para a função* $f(z)=\dfrac{1}{z(z-i)}$.

(i) *Para identificar o valor de* $\operatorname{Res}(f;0)$ *olhamos a série de Laurent de* f *em torno de* $z=0$, *no anel* $0<|z|<1$. *A partir do Exemplo 5.2.9, obtemos:*

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{-i(1-z/i)}\right]=-\frac{1}{iz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^n}=-\left(\frac{1}{iz}+\frac{1}{i^2}+\frac{z}{i^3}+\cdots\right)$$

e daí resulta $\operatorname{Res}(f;0)=b_1=-1/i=i$.

(ii) *O valor de* $\operatorname{Res}(f;i)$ *aparece no desenvolvimento em torno de* $z=i$, *no anel* $0<|z-i|<1$. *Usando mais uma vez a série geométrica, encontramos:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-i}\left[\frac{1}{i+(z-i)}\right]=\left(\frac{1}{z-i}\right)\frac{1}{i\left[1+\left(\frac{z-i}{i}\right)\right]}=\left(\frac{-i}{z-i}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{i}\right)} \\ &= \frac{-i}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{i^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-i)^{n-1}}{i^{n-1}}. \end{aligned}$$

O coeficiente b_1 *aparece na parcela correspondente a* $n=0$, *isto é,* $\operatorname{Res}(f;i)=b_1=-i$.

DEMONSTRAÇÃO (TEOREMA DE LAURENT)

A partir da relação (1.5), com $w=\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}$, obtemos:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\left(\frac{1}{1-w}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}+\frac{f(\xi)(z-z_0)^{n+1}}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{n+1}}. \tag{5.12}$$

Procedendo de forma similar, agora com $w=\dfrac{\lambda-z_0}{z-z_0}$, encontramos:

$$-\frac{f(\lambda)}{\lambda-z}=\frac{f(\lambda)}{z-z_0}\left(\frac{1}{1-w}\right)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f(\lambda)(\lambda-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k}+\frac{f(\lambda)(\lambda-z_0)^{n+1}}{(z-\lambda)(z-z_0)^{n+1}}. \tag{5.13}$$

Considerando os arcos $\gamma_R:|z-z_0|=R$ e $\gamma_r:|z-z_0|=r$, ilustrados na Figura 5.6 abaixo, segue da Fórmula Integral de Cauchy:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-z}$$

e usando as relações (5.12) e (5.13), deduzimos que:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n}\int_{\gamma_R}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k\,d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}+E_n+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{\gamma_r}\frac{f(\lambda)(\lambda-z_0)^{k-1}\,d\lambda}{(z-z_0)^k}+F_n$$

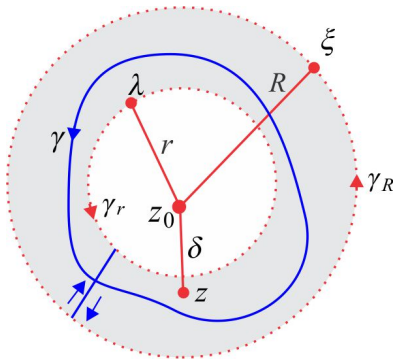


Figura 5.6:

isto é:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{n+1} b_k (z - z_0)^{-k} + E_n + F_n \tag{5.14}$$

onde $E_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_R} \dfrac{(z - z_0)^{n+1} f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}}$ e $F_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(\lambda)(\lambda - z_0)^{n+1} d\lambda}{(z - \lambda)(z - z_0)^{n+1}}$ e os coeficientes a_k e b_k estão definidos em (5.12).

Para mostrar que E_n e F_n aproximam-se de zero, com $n \to \infty$, representemos por M o máximo de $|f(z)|$ no compacto $\overline{D} : r \leq |z - z_0| \leq R$, e notemos que:

(i) Como $|\xi - z| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| = R - \delta$, deduzimos que:

$$|E_n| \leq \frac{M\delta^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{\gamma_R} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|} \leq \frac{M}{2\pi} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{n+1} \frac{2\pi R}{R - \delta} \to 0, \quad n \to \infty.$$

(ii) Agora, usando a relação $|\lambda - z| \geq |z - z_0| - |\lambda - z_0| = \delta - r$, deduzimos que:

$$|F_n| \leq \frac{M r^{n+1}}{2\pi \delta^{n+1}} \int_{\gamma_R} \frac{|d\lambda|}{|\lambda - z|} \leq \frac{M}{2\pi} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{n+1} \frac{2\pi r}{\delta - r} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Para chegarmos à relação (5.9) fazemos em (5.14), $n \to \infty$. ■

EXEMPLO 5.2.18 *No domínio $D : |z - 1| > 0$, deixe-nos considerar um contorno γ, simples, fechado e regular, envolvendo o ponto $z_0 = 1$, e seja $f(z) = e^{-z}(z - 1)^{-2}$. Vamos mostrar que:*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1).$$

Da Fórmula Integral de Cauchy, resulta que:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i \frac{d}{dz}\left[e^{-z}\right]_{z=1} = 2\pi i\,(-1/e)$$

e, por outro lado:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2}e^{-(z-1)} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{n!}. \tag{5.15}$$

Segue de (5.15) *que* $\operatorname{Res}(f;1) = b_1 = -1/e$ *e, sendo assim,* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1)$.

EXEMPLO 5.2.19 *A partir da série de Laurent, vamos calcular* $\operatorname{Res}(f;0)$*, sendo* $f(z) = \exp\left(1/z^2\right)$. *Ora:*

$$\exp\left(1/z^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} + \cdots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \cdots$$

de onde resulta que $\operatorname{Res}(f;0) = 0$. *Como veremos adiante, se* γ *é qualquer contorno admissível, envolvendo a origem, então:*

$$\int_\gamma \exp\left(1/z^2\right)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0) = 0.$$

EXEMPLO 5.2.20 *Dois desenvolvimentos de Laurent em potências de* z *para* $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$.

(i) *No anel* $D: 0 < |z| < 1$*, temos:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-2}. \tag{5.16}$$

Observando a série (5.16) *vemos que* $\operatorname{Res}(f;0) = b_1 = 1$.

(ii) *No domínio* $|z| > 1$*, temos:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{-1}{z(1-1/z)} = -\frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(1/z)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-3} \tag{5.17}$$

Note que na série (5.17) *o coeficiente* $b_1 = 0$*, mas este não é o valor do resíduo de* f *em* $z_0 = 0$.

OBSERVAÇÃO 5.2.21 *Se* $w = \dfrac{1}{z - z_0}$*, a parte principal da série de Laurent de* $f(z)$ *pode ser olhada como uma série de Taylor (de potências de* w*) e se esta série tem raio de convergência* $R^* > 0$*, então ela convergirá em todo ponto* z*, tal que* $|w| < R^*$*, isto é, no domínio* $|z - z_0| > \dfrac{1}{R^*}$. *Como consequência do Corolário* 5.2.6 *deduzimos que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ *define uma função analítica no domínio* $|z - z_0| > 1/R^*$.

EXEMPLO 5.2.22 *Vamos desenvolver a função* $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2}$ *em série de Taylor no disco* $|z-1| < 1$ *e em Série de Laurent no domínio* $|z-1| > 1$. *Veja a Figura 5.7*

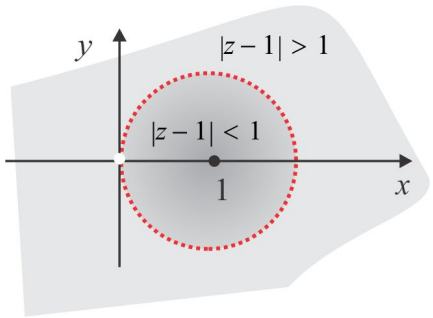


Figura 5.7:

(i) *A Série de Taylor no disco* $|z-1| < 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-1}{z^2} = (z-1)\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z}\right) = -(z-1)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right] \\ &= -(z-1)\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k(z-1)^k. \end{aligned}$$

(ii) *A Série de Laurent no domínio* $|z-1| > 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= -(z-1)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right) = -(z-1)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right] \\ &= -(z-1)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-1}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{z-1}\right)}\right] = -(z-1)\frac{d}{dz}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^{-k-1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)(z-1)^{-k-1}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.2.23 *Vamos desenvolver a função* $f(z) = 1/z^3$ *em série de potências de* $z+2$, *identificando o disco de convergência. Temos:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{2-(z+2)}\right] = -\frac{1}{4}\frac{d^2}{dz^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2)^k}{2^k} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)(z+2)^{k-2}}{2^k} = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)(z+2)^{k-2}}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

O disco de convergência é $D : |z+2| < 2$.

5.2.2 Produto & Quociente de Séries de Potências

Consideremos as funções $f : D_{R_1} \to \mathbb{C}$ e $g : D_{R_2} \to \mathbb{C}$, definidas por:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k . \tag{5.18}$$

O **Produto de Cauchy** das séries (5.18) é, por definição, a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, onde:

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,\ \ldots \tag{5.19}$$

e, de forma genérica, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k},\ n = 0, 1, 2, \ldots$. No disco $D_R = D_{R_1} \cap D_{R_2}$, a série produto converge absoluta e uniformemente para $f(z)\, g(z)$ e se $g(z) \neq 0$ em D_{R_2}, a função analítica $q(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ pode ser desenvolvida em série de Taylor do modo seguinte:

$$\begin{aligned} q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \\ &\Leftrightarrow d_0 b_0 = a_0,\ d_0 b_1 + d_1 b_0 = a_1,\ d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 = a_2,\ \ldots \end{aligned}$$

Logo, $q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$, sendo $|z - z_0| < R_2$ e $d_0 = a_0/b_0,\ d_1 = a_1/b_0 - a_0 b_1/b_0^2,\ \ldots$.

EXEMPLO 5.2.24 *Vamos representar a função* $q(z) = \dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh} z}$ *em série de potências de* z*, no anel* $0 < |z| < \pi$*. Temos*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \tfrac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) = \tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[1 - (-1)^k\right] z^k}{k!} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{2z}{1!} + \frac{2z^3}{3!} + \frac{2z^5}{5!} + \cdots\right) = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

e, assim, obtemos:

$$q(z) = \frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1/z^2}{z\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \cdots\right)} = \frac{1}{z^3}\left[\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \cdots}\right]. \tag{5.20}$$

Designando

$$\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \cdots} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots \tag{5.21}$$

segue de (5.20) *que* $\operatorname{Res}(q;0) = A_2$, *tendo em vista que:*

$$q(z) = \frac{A_0}{z^3} + \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z} + A_3 + A_4 z + \cdots .$$

e para calcular o coeficiente A_2 *usamos o produto de Cauchy das séries em* (5.21) *e obtemos:*

$$\left(A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \cdots\right)\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \cdots\right) = 1,$$

isto é:

$$A_0 + A_1 z + \left(\frac{A_0}{3!} + A_2\right) z^2 + \left(\frac{A_1}{3!} + A_3\right) z^3 + \cdots = 1$$

e daí resulta $A_0 = 1$ *e* $A_2 = -1/6$. *Em particular, temos* $\operatorname{Res}(q;0) = -1/6$ *e como veremos adiante:*

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \operatorname{senh} z} = 2\pi i \operatorname{Res}(q;0) = -\pi i/3.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 5.2)**

1. Em cada caso, determine o raio de convergência da série.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(z+i)^k}{(2i)^{k-1}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\operatorname{Log}(ik)}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2i}(z-\pi)^k}{2^k}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{2^{ik}}$ **(e)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{\sqrt{3}ik}$.

2. Calcule o valor da soma infinita $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi i)^k}{k!}$.

3. Represente a função $f(z) = (1+z)^{-1}$ em série de potências de z. Indique o domínio de convergência.

4. A partir do desenvolvimento de Maclaurin

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \quad |z| < 1,$$

   obtenha a representação:

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1.$$

5. Mostre que:

   (a) $\displaystyle\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$, no disco $|z+1| < 1$.

(b) $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)(z-2)^n}{2^n}$, no disco $|z-2| < 2$.

6. Desenvolva $\cos z$ em série de Taylor em torno de $z_0 = \pi/2$ e $\operatorname{senh} z$ em torno de $z_0 = \pi i$. Com o resultado, deduza que:

   (a) $\displaystyle\lim_{z\to\pi/2} \frac{\cos z}{z-\pi/2} = -1$ e **(b)** $\displaystyle\lim_{z\to\pi i} \frac{\operatorname{senh} z}{z-\pi i} = -1$.

7. No disco $0 < |z| < 4$, mostre que
$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

8. No disco $0 < |z-1| < 2$, represente a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ em série de potências de $z-1$. Idem para a função $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ em série de potências de $z-i$.

9. Represente a função $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ em série de potências de z.

10. Em cada caso, desenvolva a função $w = f(z)$ em série de Laurent na região $0 < |z| < r$.

    (a) $w = \dfrac{e^{-z}}{z^3}$ **(b)** $w = \dfrac{e^{1/z^2}}{z^6}$ **(c)** $w = \dfrac{\cos(2z)}{z^2}$ **(d)** $w = \dfrac{1}{z^2(z-3)}$.

11. Usando derivação termo a termo, prove que:

    (a) $\dfrac{1}{(1+z)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1}$ **(b)** $\dfrac{2}{(1-z)^3} = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2}$.

12. Use a série de Taylor de $\operatorname{sen} z$ e mostre que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$, $z \neq 0$ e $f(0) = 1$, é inteira.

13. Dê dois desenvolvimentos em série de Laurent, em potências de z, para a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ e especifique onde os desenvolvimentos são válidos. A unicidade de representação em série de Laurent é violada?

14. Considere a função $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2}$.

    (a) Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$.

    (b) Represente $f(z)$ em série de Laurent, no domínio $|z-1| > 1$.

(c) Qual o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$, no disco $|z| > 0$?

15. Suponha que $f(z)$ e $g(z)$ sejam funções analíticas em z_0 e que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Prove a **REGRA DE L'HÔPITAL:**

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Se ocorrer $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ e $g''(z_0) \neq 0$, então:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)}.$$

16. Se $f(z)$ é analítica em z_0 e $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k)}(z_0) = 0$, mostre que a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$g(z) = \left| \begin{array}{ll} f(z)(z - z_0)^{-k-1}, & \text{se } z \neq z_0 \\ f^{(k+1)}(z_0)\left[(k+1)!\right]^{-1}, & \text{se } z = z_0 \end{array} \right.$$

é analítica em z_0.

17. Sabendo que $g(z) = \operatorname{sen}\left(z^2\right)$, use a série de Maclaurin de $g(z)$ e mostre que:

$$(2 + i)\, g^{(31)}(0) + (4 - 3i)\, g^{(40)}(0) = 0.$$

18. Calcule o valor de $f''(0)$, sabendo que a função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ assume, nos pontos do contorno $\gamma : |z| = 2$, os valores $f(z) = (4z)^{-1} \operatorname{sen}(2z)$.

19. **OS ZEROS DE UMA FUNÇÃO ANALÍTICA** Recorde-se que um ponto z_0 denomina-se um zero de ordem m de uma função analítica $f(z)$ quando:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

(a) Mostre que z_0 é um zero de ordem m de $f(z)$ se, e somente se, $(z - z_0)^{-m} f(z)$ tem limite finito e diferente de zero, com $z \to z_0$.

(b) Suponha que z_0 seja o único zero de uma função analítica $f : D \to \mathbb{C}$. Se γ é um contorno em D, simples, fechado e regular, envolvendo o ponto z_0, com orientação positiva, mostre que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \tag{5.22}$$

coincide com a ordem do zero em questão. O número complexo em (5.22) é o *Resíduo Logarítmico*

de f em relação a γ. Esta denominação deve-se ao fato do integrando ser a derivada de $\operatorname{Log}(f(z))$.

5.3 Singularidades & Pólos

Antes de formalizar o conceito de **Singularidade**, deixe-nos considerar alguns casos como motivação.

(i) No disco $D : |z| < R$ a função $f(z) = \exp(1/z)$ deixa de ser analítica apenas no ponto $z = 0$.

(ii) A função $g(z) = |z + i|^2$ é derivável apenas no ponto $z = -i$.

(iii) Dado um ponto z_0 no domínio $D : r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi$, em qualquer anel $0 < |z - z_0| < R$ existem pontos onde a função $h(z) = \operatorname{Log} z$ não é analítica.

DEFINIÇÃO 5.3.1 *Diz-se que um ponto z_0 é uma* **Singularidade do Tipo I**, *ou* **Singularidade Isolada**, *de uma função $f(z)$ quando $f(z)$ for analítica em alguma vizinhança $V_\delta(z_0)$, exceto em z_0.*

EXEMPLO 5.3.2 *O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f(z) = \exp(1/z)$. Já a função $f(z) = \dfrac{1}{z - i}$ tem uma singularidade isolada no ponto $z = i$.*

EXEMPLO 5.3.3 *No domínio $D : r > 0,\ -\pi < \theta \leq \pi$, a função $f(z) = \operatorname{Log} z$ não tem singularidade isolada.*

DEFINIÇÃO 5.3.4 *O ponto z_0 denomina-se* **Singularidade do Tipo II**, *ou simplesmente* **Singularidade**, *de uma função $f(z)$ quando:*

(i) *f não é analítica em z_0.*

(ii) *Em qualquer vizinhança de z_0 existe ao menos um ponto z no qual f é analítica.*

EXEMPLO 5.3.5 *Os pontos do corte $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$ são singularidades da função $f(z) = \operatorname{Log} z$.*

EXEMPLO 5.3.6 *A função $f(z)\,|z - 2i|^2$ não tem sigularidade e, muito menos, sigularidade isolada. Ela é derivável apenas em $z = 2i$.*

EXEMPLO 5.3.7 *A função* $f(z) = \dfrac{z^2 + \operatorname{sen} z}{z^3 (z^2+4)}$ *tem singularidades isoladas nos pontos* $z = 0$ *e* $z = \pm 2i$.

EXEMPLO 5.3.8 *A função* $g(z) = [\operatorname{sen}(\pi/z)]^{-1}$ *possui uma infinidade de singularidades isoladas nos pontos* $z_k = 1/k \;\; k = 1, 2, 3, \ldots$. *Além disso,* $z = 0$ *é uma singularidade (não isolada) de* $g(z)$.

OBSERVAÇÃO 5.3.9 *Se* z_0 *é uma singularidade isolada de* $f(z)$, *então:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

onde os coeficientes a_k *e* b_k *são dados por* (5.10) *e há três casos a considerar:*

(i) *A parte principal* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$ *tem uma infinidade de parcelas não nulas. Neste caso, a singularidade isolada* z_0 *é dita* **Essencial**.

(ii) *Existe um índice* m, *tal que:*

$$b_m \neq 0 \quad e \quad b_k = 0, \;\forall\; k \geq m + 1.$$

Neste caso, a singularidade isolada z_0 *é denominada um* **Pólo de ordem** m.

(iii) *A parte principal é nula, isto é,* $b_1 = b_2 = \cdots = 0$. *Neste caso, temos:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

e a singularidade isolada z_0 *é apenas aparente e pode ser removida, já que a série que representa* $f(z)$ *define uma função analítica em* $|z - z_0| < R$. *A singularidade diz-se* **Removível**.

EXEMPLO 5.3.10 *A função* $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ *tem um pólo de ordem* $m = 3$ *em* $z_0 = 0$ *e* $\operatorname{Res}(f; 0) = -1/6$. *De fato:*

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

onde vemos que $b_1 = -1/3!, \; b_2 = 0, \; b_3 = 1$ *e* $b_k = 0, \;\forall\; k \geq 4$.*Além disso,* $\operatorname{Res}(f; 0) = b_1 = -1/6$.

EXEMPLO 5.3.11 *A função* $f(z) = \exp\left(1/z^2\right)$ *tem uma singularidade essencial em* $z_0 = 0$. *De fato:*

$$f(z) = \exp\left(1/z^2\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^{2k}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2! z^4} + \frac{1}{3! z^6} + \cdots$$

onde vemos que $b_{2k} \neq 0, \; k = 1, 2, 3, \ldots,$ *e a parte principal tem uma infinidade de parcelas não nulas.*

EXEMPLO 5.3.12 *A origem $z_0 = 0$ é uma singularidade removível das seguintes funções:*

$$g(z) = \frac{\cos z - 1}{z}, \quad h(z) = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} \quad e \quad p(z) = \frac{1 - \exp(\lambda z)}{z}.$$

De fato, basta observar que as séries que representam essas funções:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-1}}{(2k)!}, \quad h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k+1}, \quad p(z) = -\lambda - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{k-1}}{k!},$$

têm parte principal nula e elas admitem continuação analítica ao ponto $z_0 = 0$, considerando:

$$g(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0, \quad h(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1 \quad e \quad p(0) = \frac{1 - \exp(\lambda z)}{z} = -\lambda.$$

LEMA 5.3.13 *Uma singularidade isolada z_0 de $g(z)$ é removível se, e só se, $g(z)$ é limitada em alguma vizinhança de z_0.*

PROVA Se z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$, então

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

de onde segue que $\lim_{z \to z_0} g(z) = a_0$ e, por conseguinte, existe $\delta > 0$, tal que $|g(z)| < 1 + |a_0|$, $z \in V_\delta(z_0)$. Reciprocamente, se $|g(z)| \leq M$, $z \in V_\delta(z_0)$, então para cada $r < \delta < R$, temos:

$$|b_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|g(z)|\, dz}{|z - z_0|^{-k+1}} \leq \frac{M}{2\pi} r^{k-1} (2\pi r) = M r^k. \tag{5.23}$$

Fazendo $r \to 0$ em (5.23), deduzimos que $b_k = 0$. ■

PROPOSIÇÃO 5.3.14 *Para que uma singularidade isolada z_0 seja um pólo de ordem m da função $f(z)$ é necessário e suficiente que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ seja finito e diferente de zero.*

DEMONSTRAÇÃO Se z_0 é um pólo de ordem m, então $b_m \neq 0$ e $b_k = 0$, $k \geq m+1$, e, portanto:

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + b_{m-2}(z - z_0)^2 + \cdots + b_1 (z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}. \tag{5.24}$$

Tomando o limite em (5.24), com $z \to z_0$, obtemos $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m \neq 0$. Reciprocamente, se $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) = w$, $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, então z_0 é uma singularidade removível da função complexa $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, já que $\lim_{z \to z_0} g(z) = w$ existe e é finito. Assim:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[w + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots\right] \\ &= \frac{w}{(z-z_0)^m} + \frac{c_1}{(z-z_0)^{m-1}} + \frac{c_2}{(z-z_0)^{m-2}} + \cdots + c_m + c_{m+1}(z-z_0) + \cdots \end{aligned}$$

onde observamos que $b_m = w$ e $b_k = 0,\ k \geq m+1$. ■

EXEMPLO 5.3.15 *A função $f(z) = (\operatorname{Log} z)^{-2}$ tem um pólo de ordem $m = 2$ na singularidade $z_0 = 1$. De fato, basta observar que:*

$$\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{(\operatorname{Log} z)^2} = (\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)}{\operatorname{Log} z} = (\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 1}\frac{2z-1}{1/z} = 1.$$

TEOREMA 5.3.16 (Cálculo do Resíduo em um Pólo) *Seja z_0 uma singularidade isolada de $f(z)$.*

(i) *Se z_0 é removível, então* $\operatorname{Res}(f; z_0) = 0$.

(ii) *Se z_0 é um pólo simples (de ordem $m = 1$), então* $\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

(iii) *Se z_0 é um pólo de ordem $m > 1$, então* $\operatorname{Res}(f; z_0) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]$.

DEMONSTRAÇÃO Se z_0 é uma singularidade removível, segue da definição que $b_k = 0,\ \forall\ k$, e, em particular, $b_1 = 0$. Para provar a parte (ii), notamos que se z_0 é um pólo simples, então:

$$(z-z_0)f(z) = b_1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+1} \tag{5.25}$$

e, tomando o limite em (5.25) com $z \to z_0$, encontramos $b_1 = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. Finalmente, se z_0 é um pólo de ordem $m > 1$, temos:

$$(z-z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z-z_0) + \cdots + b_1(z-z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m} \tag{5.26}$$

e derivando $(m-1)$-vêzes a equação (5.26) encontramos:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!b_1 + \sum_{k=0}^{\infty}(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)\,k a_k (z-z_0)^{k+1}. \tag{5.27}$$

Se em (5.27) fizermos $z \to z_0$, teremos:

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]. \quad ■$$

EXEMPLO 5.3.17 *Se* $f(z) = (\operatorname{Log} z)^{-1}$, *então:*

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\operatorname{Log} z} = (\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1/z} = 1.$$

Daí segue que $z_0 = 1$ *é um pólo simples de* $f(z)$ *e do Teorema 5.3.16 resulta* $\operatorname{Res}(f;1) = 1$.

EXEMPLO 5.3.18 *Vimos no Exemplo 5.3.15 que a função* $f(z) = (\operatorname{Log} z)^{-2}$ *tem um pólo de ordem* $m = 2$ *no ponto* $z_0 = 1$ *e pelo Teorema 5.3.16, temos:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;1) &= \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2}{(\operatorname{Log} z)^2}\right] = 2\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\operatorname{Log} z - z + 2 - 1/z}{(\operatorname{Log} z)^3} \\
&= (\textbf{L'Hôpital}) = 2\lim_{z\to 1}\frac{z\operatorname{Log} z - 1 + 1/z}{3(\operatorname{Log} z)^2} \\
&= (\textbf{L'Hôpital}) = 2\lim_{z\to 1}\frac{z\operatorname{Log} z + z - 1/z}{6\operatorname{Log} z} \\
&= (\textbf{L'Hôpital}) = 2\lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{Log} z + 2 + 1/z^2}{6/z} = 1.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.3.19 *A origem é um pólo de ordem* 2 *da função* $f(z) = (z\operatorname{senh} z)^{-1}$ *e* $\operatorname{Res}(f;0) = 0$. *De fato:*

$$\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{2z}{e^z - e^{-z}}\right] = (\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right] = 1$$

de onde segue que a origem é um pólo de ordem 2. *O resíduo na origem é dado por:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;0) &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{\operatorname{senh} z}\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\left[\frac{\operatorname{senh} z - z\cosh z}{(\operatorname{senh} z)^2}\right] = (\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{-z}{2\cosh z}\right] = 0.
\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.3.20 *Para determinar o valor de* $\operatorname{Res}(f;0)$, *sendo* $f(z) = z^2\exp\left(1/z^3\right)$, *inicialmente devemos investigar a natureza da singularidade* $z_0 = 0$. *Temos:*

$$z^2\exp\left(1/z^3\right) = z^2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^7} + \frac{1}{4!z^{10}} + \cdots$$

onde vemos que $z_0 = 0$ *é uma singularidade essencial de* $f(z)$ *e o Teorema 5.3.16 não se aplica. Segue diretamente da série que* $\operatorname{Res}(f;0) = 1$.

EXEMPLO 5.3.21 *A função* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$ *tem dois pólos simples nos pontos* $z = \pm 3i$ *e dois pólos de ordem* 2 *nos pontos* $z = \pm 2i$. *De acordo com o Teorema 5.3.16, temos:*

(i) $\operatorname{Res}(f;3i) = \lim\limits_{z\to 3i}\left[(z-3i)\,f(z)\right] = \lim\limits_{z\to 3i}\left[\dfrac{z^2}{(z+3i)\,(z^2+4)^2}\right] = \dfrac{-9}{6i\,(-5)^2} = \dfrac{3i}{50}.$

(ii) $\operatorname{Res}(f;2i) = \lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{d}{dz}\left[(z-2i)^2\,f(z)\right] = \lim\limits_{z\to 2i}\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{z^2}{(z^2+9)\,(z+2i)^2}\right]$

$$= \lim_{z\to 2i}\left[\frac{2z\left(z^2+9\right)(z+2i) - z^2\left(4z^2+4iz+18\right)}{(z^2+9)^2\,(z+2i)^3}\right] = -\frac{13i}{200}.$$

5.3.1 Quociente de Funções Analíticas

Dada uma função $g(z)$, analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$, o ponto z_0 denominar-se-á um **Zero de Ordem k** da função g, quando:

$$g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad g^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Se $g^{(k)}(z_0) = 0,\ \forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$, segue, do Teorema de Taylor, que g é identicamente nula no disco D_R.

LEMA 5.3.22 *Os zeros de uma função analítica são pontos isolados.*

PROVA Se z_0 é um zero de ordem k de certa função $g(z)$, analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$, então em cada ponto z de D_R, temos:

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^k f(z),$$

onde $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z - z_0)^n$ é analítica[11] no disco D_R. Temos que $f(z_0) = g^{(k)}(z_0) \neq 0$ e, por continuidade, existe $\delta > 0$, tal que $f(z) \neq 0$, em todo ponto z da vizinhança $V_\delta(z_0)$. Logo:

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) \neq 0, \quad \forall\ z \in V_\delta(z_0),\ z \neq z_0,$$

isto é, na vizinhança $V_\delta(z_0)$ o único zero da função g é precisamente z_0. ■

DOIS ATALHOS PARA O CÁLCULO DO RESÍDUO

Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções analíticas no domínio D e consideremos a função f, definida por:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad z \in D,\ q(z) \neq 0.$$

Os zeros da função $q(z)$, que são isolados, são precisamente as singularidades isoladas da função $f(z)$.

ATALHO 1: Se $q(z_0) = 0,\ p(z_0) \neq 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, então o ponto z_0 é um pólo simples de $f(z)$ e:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \tag{5.28}$$

PROVA Basta observar que:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)\frac{p(z)}{q(z)}\right] = \lim_{z \to z_0} \left[p(z) \cdot \frac{(z - z_0)}{q(z)}\right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

[11] Uma série de potências representa uma função analítica no seu disco de convergência.

EXEMPLO 5.3.23 *Os pontos* $z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ *são pólos simples da função* $f(z) = \operatorname{cotg} z$. *Considerando* $p(z) = \cos z$ *e* $q(z) = \operatorname{sen} z$, *temos:*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad q(z_z) = 0,\ p(z_k) = q'(z_k) = (-1)^k \neq 0.$$

Assim, z_k *é pólo simples de* $f(z)$ *e, além disso,* $\operatorname{Res}(f; z_k) = \dfrac{p(z_k)}{q'(z_k)} = 1, \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}.$

EXEMPLO 5.3.24 *A função* $f(z) = \cos z\,(e^z - 1)^{-1}$ *tem um pólo simples no ponto* $z_0 = 0$. *Neste caso,* $p(z) = \cos z$ *e* $q(z) = e^z - 1$ *e temos:*

$$p(0) = q'(0) = 1,\ q(0) = 0 \quad e \quad \operatorname{Res}(f; 0) = \frac{p(0)}{q'(0)} = 1.$$

ATALHO 2: Suponhamos que $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ e que $p(z_0) \neq 0$ e $q''(z_0) \neq 0$. Então, z_0 é um pólo de ordem $m = 2$ e o resíduo de f em z_0 é dado por:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)\,q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2}. \tag{5.29}$$

PROVA Considerando que $q(z_0) = q'(z_0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \\ q(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \end{aligned}$$

e, portanto:

$$(z - z_0)^2 f(z) = \frac{p(z_0) + \frac{1}{1!}p'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!}p''(z_0)(z - z_0)^2 + \cdots}{\frac{1}{2!}q''(z_0) + \frac{1}{3!}q'''(z_0)(z - z_0) + \cdots}. \tag{5.30}$$

Assim:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^2 f(z) = \frac{p(z_0)}{\frac{1}{2!}q''(z_0)} \neq 0,$$

o que indica ser z_0 um pólo de ordem 2. Se representarmos o lado direito de (5.30) pela série

$$(z - z_0)^2 f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

teremos que $A_1 = \operatorname{Res}(f; z_0)$ e, também:

$$\left| \begin{array}{l} p(z_0) = \frac{1}{2!}q''(z_0)\,A_0 \\ p'(z_0) = \frac{1}{2!}q''(z_0)\,A_1 + \frac{1}{3!}q'''(z_0)\,A_0. \end{array} \right. \tag{5.31}$$

Resolvendo o sistema (5.31) encontramos (5.29).

EXEMPLO 5.3.25 *Vamos usar o Atalho 2 para calcular o resíduo da função* $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$ *no pólo* $z_0 = 2$. *Considerando* $p(z) = 1$ *e* $q(z) = z(e^z - 1)$, *temos:*

$$\begin{aligned}
&p(z) \equiv 1 \Rightarrow p(0) = 1 \text{ e } p'(0) = 0.\\
&q(z) = z(e^z - 1) \Rightarrow q(0) = 0.\\
&q'(z) = e^z - 1 + ze^z \Rightarrow q'(0) = 0.\\
&q''(z) = 2e^z + ze^z \Rightarrow q''(0) = 2.\\
&q'''(z) = 3e^z + ze^z \Rightarrow q'''(0) = 3.
\end{aligned}$$

e, portanto, $z_0 = 0$ *é um pólo de segunda ordem e:*

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{p(z_0)\, q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2} = -\frac{1}{2}.$$

5.3.2 Comportamento Local

A título de ilustração, deixe-nos investigar o comportamento da função

$$f(z) = \exp(1/z), \quad z \neq 0,$$

sob dois aspectos:

(i) No domínio $\Omega_R : |z| > R$, com $R \to \infty$. Este será o *Comportamento no Infinito* da função f.

(ii) Nas proximidades da singularidade essencial $z_0 = 0$. Tal comportamento terá uma resposta no Teorema 5.3.29 de *Casorati-Weierstrass*.

COMPORTAMENTO NO INFINITO

A imagem do domínio $\Omega_R : |z| > R$ pela transformação $z \mapsto 1/z$ é o anel $D_R : 0 < |w| < 1/R$, no qual a função $g(w) = f(1/w)$ é analítica e o comportamento de f, quando $R \to \infty$, isto é, quando $|z| \to \infty$, é estabelecido a partir do comportamento de g nas proximidades de $w = 0$, isto é, quando $w \to 0$. Temos:

$$\begin{aligned}
g(w) &= f(1/w) = \exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n!}\\
f(z) &= g(1/z) = \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots, \quad z \neq 0
\end{aligned}$$

e daí segue que $w_0 = 0$ é uma singularidade removível de $g(w)$ e $z_0 = \infty$ uma singularidade removível de $f(z)$. Isto motiva a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 5.3.26 *Diz-se que $z_0 = \infty$ é uma singularidade isolada (removível, pólo ou essencial) de $f(z)$ se $w_0 = 0$ for uma singularidade de mesma natureza da função $g(w) = f(1/w)$.*

No caso de $w_0 = 0$ ser um pólo de ordem k da função g, temos:

$$g(w) = b_k w^{-k} + b_{k-1} w^{-k-1} + \cdots + b_1 w^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad b_k \neq 0$$

e com $z = 1/w$, encontramos:

$$f(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \cdots + b_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

e $z_0 = \infty$ é um pólo de ordem k da função f. Uma análise semelhante é feita no caso em que $w_0 = 0$ é uma singularidade essencial de $g(w)$.

EXEMPLO 5.3.27 *A função $f(z) = z^4 \left(1 + z^2\right)^{-1}$ tem uma singularidade essencial no infinito, porque $g(w) = f(1/w)$ tem uma singularidade essencial em $w_0 = 0$. Isto decorre da representação*

$$g(w) = f(1/w) = \left(\frac{1}{w^4}\right) \frac{1}{1 + (1/w)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{-2n-4}$$

possuir uma infinidade de potências não nulas, com expoentes negativos.

COMPORTAMENTO EM UMA SINGULARIDADE ESSENCIAL

Ainda com a função $f(z) = \exp(1/z)$, fixado um número complexo w_0 (w_0 pode ser ∞), vamos construir uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \neq 0$, tal que:

$$z_n \to 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) \to w_0. \tag{5.32}$$

(i) Se $w_0 = \infty$, consideramos $z_n = 1/n$, e obtemos:

$$z_n \to 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = e^n \to \infty = w_0.$$

(ii) Se $w_0 = 0$, consideramos $z_n = -1/n$, e encontramos:

$$z_n \to 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = e^{-n} \to 0 = w_0.$$

(iii) Finalmente, se $w_0 = |w_0| e^{i\theta}$, com $0 < |w_0| < \infty$, considerando $z_n = [\ln |w_0| + i(\theta + 2n\pi)]^{-1}$, teremos:

$$z_n \to 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = \exp[\log w_0] \to w_0.$$

LEMA 5.3.28 *Os pólos de $g(z)$ são precisamente os zeros da extensão holomorfa de $1/g(z)$ a algum disco $D_\delta : |z - z_0| < \delta$.*

PROVA Seja z_0 um pólo da função $g(z)$, que, por simplicidade, é suposto de ordem 1, isto é:

$$g(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad b_1 \neq 0.$$

No disco D_δ, a extensão holomorfa h de $1/g$ é definida por:

$$h(z) = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{g(z)}, & z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{g(z)}, & z = z_0 \end{array} \right.$$

de modo que:

$$h(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{z - z_0}{b_1 + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \cdots} \right] = 0$$

o que mostra ser o ponto z_0 um zero de $h(z)$. Reciprocamente, se z_0 é um zero simples da extensão holomorfa e não nula $h(z)$, isto é, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, existe, pelo Lema 5.3.22, um $\delta > 0$, tal que:

$$h(z) \neq 0, \quad \text{no anel} \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

e, portanto:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} = \frac{1}{h'(z_0)} \neq 0,$$

caracterizando, de acordo com o Proposição 5.3.14, z_0 como um pólo simples de $g(z)$. ■

TEOREMA 5.3.29 (Casorati-Weierstrass) *Seja f uma função analítica em um domínio D do plano $\mathbb{C}$, exceto na singularidade essencial z_0. Dado um número complexo w_0, podendo ser $w_0 = \infty$, existe uma sequência (z_n) em D, que satisfaz (5.32).*

DEMONSTRAÇÃO No caso $w_0 = \infty$, dado $M > 0$, considerando que a função f não é limitada no disco $D_{1/n} : |z - z_0| < 1/n$, podemos escolher, para cada n, um ponto z_n em $D_{1/n}$, tal que $|f(z_n)| > \dot{M}$.

Assim, $z_n \to z_0$ e $\lim |f(z_n)| = \infty$. Fixemos w_0 em $\mathbb{C}$ e suponhamos que não exista uma tal sequência (z_n) satisfazendo (5.32). Sendo assim, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, tem-se:

$$|f(z) - w_0| > \varepsilon_0, \quad \forall\, z \in V_\delta(z_0),\ z \neq z_0.$$

Consequentemente, a função g definida no anel $0 < |z - z_0| < \delta$ por:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

é analítica e localmente limitada, já que $|g(z)| < 1/\varepsilon_0$. Do Lema (5.3.13) resulta que z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$ e a extensão analítica $\widetilde{g}(z)$ é definida em z_0 por:

$$\widetilde{g}(z_0) = \lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z) - w_0} = 0,$$

já que $f(z)$ não é limitada nas proximidades de z_0. Sendo z_0 um zero de $\widetilde{g}$, segue do Lema 5.3.28 que o ponto z_0 é um pólo de $1/\widetilde{g}$ e, portanto, um pólo de f, já que $f = 1/\widetilde{g} + w_0$. Isto contradiz a hipótese de ser z_0 uma singularidade essencial de f. ■

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 5.3)**

1. Mostre que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$ se, e somente se, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe e é finito.

2. Mostre que as singularidades da função $f(z)$ são pólos e calcule o resíduo de f em cada pólo.

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$ **(b)** $f(z) = \tanh z$ **(c)** $f(z) = \dfrac{1 - \exp(2z)}{z^4}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$.

3. Se $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^2 (z-i)}$, mostre que $\operatorname{Res}(f; i) + \operatorname{Res}(f; 2) = 0$.

4. Se $h(z)$ é analítica em z_0 e $h(z_0) \neq 0$, mostre que a função $g(z) = \dfrac{h(z)}{z - z_0}$, tem um pólo simples em z_0 e que $\operatorname{Res}(g, z_0) = h(z_0)$. Comprove esse resultado com a função $g(z) = (e^z - 2z + 2)/z$.

5. Determine e classifique os pólos da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^5} + \dfrac{3}{(z-2)^2}$.

6. Em cada caso, determine e classifique as singularidades da função $w = f(z)$.

   (a) $w = z + \dfrac{1}{z}$ **(b)** $w = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$ **(c)** $w = \operatorname{sen}(1/z^2)$ **(d)** $w = e^z + e^{1/z}$ **(e)** $w = \dfrac{1}{(\operatorname{Log} z)^2}$.

7. Se $f(z)$ é analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$ e z_0 é um pólo de $f(z)$, mostre que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Comprove esse resultado com a função $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$.

8. Calcule $\operatorname{Res}(f; 0)$, em cada um dos seguintes casos:

   (a) $f(z) = \operatorname{cosec}^2 z$ **(b)** $f(z) = z^{-3} \operatorname{cosec}(z^2)$ **(c)** $f(z) = z \cos(1/z)$.

9. Use o quociente de séries para encontrar os primeiros termos das séries de potências de z das seguintes funções:

   (a) $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sen} z}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$ **(d)** $\dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh} z}$.

10. Se $f(z)$ é analítica em $|z - z_0| < R$ e z_0 é um zero de ordem m de f, mostre que a função $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ tem um pólo de ordem m em z_0.

11. Estude o comportamento no infinito da função $f(z)$.

    (a) $f(z) = \tan z$ **(b)** $f(z) = (e^z - 1)^{-1} - 1/z$ **(c)** $f(z) = \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right)^{-1} - 1/z$.

5.4 Teorema dos Resíduos & Aplicações

Dada uma função $f(z)$, analítica no anel $r < |z - z_0| < R$, vimos no Teorema (5.2.14) que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \quad r < |z - z_0| < R,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{-n+1}}.$$

Em particular, $2\pi i b_1 = \oint_{\gamma_r} f(z)\, dz$ e se γ é qualquer contorno admissível contido no anel, como ilustrado na Figura 5.6, temos:

$$\oint_{\gamma} f(z)\, dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0).$$

TEOREMA 5.4.1 (Dos Resíduos) *Seja $\overline{D}$ uma região compacta do plano $\mathbb{C}$, delimitada por um contorno γ admissível (simples, fechado e regular por partes) e deixe $f(z)$ ser uma função complexa, analítica em $\overline{D}$, exceto nas singularidades isoladas $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_k$. Então:*

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j).$$

DEMONSTRAÇÃO Como ilustrado na Figura 5.8, sejam $r_1,\ r_2, \ldots, r_k$ números reais positivos, tais que os discos $D_j : |z - z_j| \leq r_j$ estão contidos em $\overline{D}$ e isolam as singularidades $z_1,\ z_2,\ \ldots, z_k$, isto é, $D_i \cap D_j = \varnothing,\ i \neq j$.

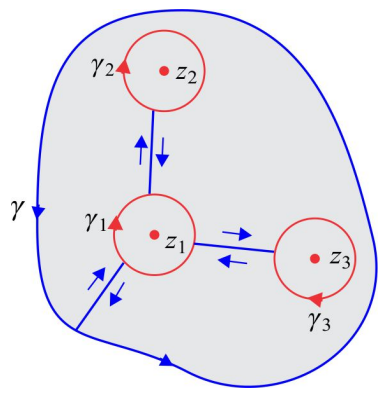


Figura 5.8:

Se γ_j é a fronteira de D_j, segue do Teorema de Cauchy-Goursat que:

$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{k} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j). \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 5.4.2 *A função $f(z) = \dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ tem singularidades isoladas, do tipo pólo simples,nos pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$. Temos:*

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1}$$

de onde resulta que $\operatorname{Res}(f;0) = 2$ e $\operatorname{Res}(f;1) = 3$, e pelo Teorema dos Resíduos segue que:

$$\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f;0) + \operatorname{Res}(f;1)] = 10\pi i.$$

EXEMPLO 5.4.3 *A função $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z+4)}$ tem um pólo de ordem 3 em $z_1 = 0$ e um pólo simples em $z_2 = -4$, ambos internos ao contorno $\gamma : |z+2| = 3$. Assim:*

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z+4)} dz = 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f;0) + \operatorname{Res}(f;-4)] = 0,$$

tendo em vista que:

(i) $\operatorname{Res}(f;0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z+4)^{-1}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} 2(z+4)^{-3} = 1/64.$

(ii) $\operatorname{Res}(f;-4) = \lim_{z\to -4}(z+4)f(z) = \lim_{z\to -4}\left(1/z^3\right) = -1/64.$

EXEMPLO 5.4.4 *A função* $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(e^z-1)}$ *tem um pólo de ordem* 2 *na origem. De fato:*

$$\lim_{z\to 0}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z\cos z}{e^z-1}\right] = (\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z - z\operatorname{sen} z}{e^z} = 1$$

e da Proposição 5.3.14 *resulta que* $z_0 = 0$ *é um pólo de ordem* 2. *Agora, deixe-nos mostrar que* $\operatorname{Res}(f;0) = -1/2$ *e, usando o Teorema dos Resíduos, obtermos:*

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0) = -\pi i.$$

(i) USANDO O ATALHO *Considerando* $p(z) = \cos z$ *e* $q(z) = z(e^z-1)$, *encontramos:*

$$p(0) = 1,\ p'(0) = 0,\ q(0) = q'(0) = 0,\ q''(0) = 2 \quad e \quad q'''(0) = 3$$

e, assim:

$$\operatorname{Res}(f;0) = \frac{2p'(0)}{q''(0)} - \frac{2}{3}\frac{p(0)\,q'''(0)}{[q''(0)]^2} = -1/2.$$

(ii) USANDO A SÉRIE DE LAURENT *Temos:*

$$z^2 f(z) = \frac{1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \cdots}{1 + z/2! + z^2/3! + z^3/4! + \cdots} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots \tag{5.33}$$

e usando o Produto de Cauchy (5.19), *encontramos:*

$$\left|\begin{array}{l} A_0 = 1 \\ A_1 + \frac{1}{2}A_0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow A_1 = -1/2.$$

De (5.33), *vemos que:*

$$f(z) = \frac{A_0}{z^2} + \frac{A_1}{z} + A_2 + A_3 z \cdots$$

é a série de Laurent de $f(z)$, *de modo que* $\operatorname{Res}(f;0) = A_1 = -1/2.$

5.4.1 Cálculo de Integrais Reais

Nesta seção, veremos como usar o Teorema dos Resíduos (5.4.1) no cálculo de integrais impróprias de funções reais. No cálculo em uma variável real, aprendemos que a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{5.34}$$

de uma função real contínua $y = f(x)\,,\ -\infty < x < \infty$, é convergente quando os limites

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(x)\,dx$$

existirem. Neste caso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} f(x)\,dx. \tag{5.35}$$

Por outro lado, o *Valor Principal* da integral imprópria (5.34) é definido por:

$$\textbf{(VP)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx, \tag{5.36}$$

caso o limite exista. É oportuno ressaltar que os conceitos (5.35) e (5.36) não são equivalentes, como é fácil ver considerando $f(x) = x$. De fato:

$$\textbf{(VP)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\ dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{0} x\ dx + \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} x\ dx = \infty.$$

Naturalmente, se f é uma função par, então:

$$\int_{-R}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{0}^{R} f(x)\,dx$$

e, portanto:

$$\textbf{(VP)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

No que se segue, $f(x)$ representa uma função racional $f(x) = p(x)/q(x)$, e para a integral imprópria (5.34) convergir, vamos admitir que os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ sejam primos entre si e que satisfaçam as condições seguintes:

(i) O polinômio $q(x)$ não possui zeros reais, isto é, a equação $q(x) = 0$ não tem solução real.

(ii) $\text{Grau}(q) \geq 2 + \text{Grau}(p)$.

1. INTEGRAIS DO TIPO: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Com estas hipóteses mostraremos que o valor principal da integral imprópria pode ser calculado com auxílio do Teorema dos Resíduos. Inicialmente, deixe-nos considerar a função racional $f(z)$ definida no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$, e sejam γ_R e γ^* os arcos:

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| = R\} \\ \gamma^* &= \{(x, 0) : -R \leq x \leq R\} \end{aligned}$$

ilustrados na Figura (5.9).

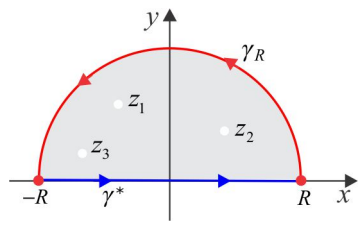


Figura 5.9:

Consideremos $R > 0$, de tal forma que as singularidades $z_1,\ z_2, \ldots, z_k$ de $f(z)$ sejam interiores ao contorno $\gamma_R + \gamma^*$ e, assim, podermos usar o Teorema dos Resíduos 5.4.1:

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz + \oint_{\gamma^*} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j) \tag{5.37}$$

e notando que γ^* é o intervalo $[-R, R]$ sobre o eixo x, segue de (5.37):

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j) - \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz. \tag{5.38}$$

Da hipótese **(ii)**, a respeito do grau dos polinômios $p(z)$ e $q(z)$, resulta que existe $M > 0$, tal que $\left|z^2 f(z)\right| \leq M$, com $|z| = R$, e, portanto:

$$\left|\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \oint_{\gamma_R} \left|z^2 f(z)\right| \left|\frac{dz}{z^2}\right| \leq M \oint_{\gamma_R} \left|\frac{dz}{z^2}\right| = \frac{2\pi M}{R} \to 0, \text{ com } R \to \infty.$$

Assim, tomando o limite em (5.38), com $R \to \infty$, encontramos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j).$$

EXEMPLO 5.4.5 *No semiplano* $[\operatorname{Im} z > 0]$ *a função complexa* $f(z) = \left(1+z^2\right)^{-1}$ *possui singularidade no ponto* $z_1 = i$*, de modo que:*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f;i) = 2\pi i \lim_{z\to i}(z-i) f(z) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z-i}{z^2+1} \\ &= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \pi.\end{aligned}$$

EXEMPLO 5.4.6 *As singularidades isoladas da função* $f(z) = \left(1+z^4\right)^{-1}$ *ocorrem nos pontos* $\exp(\pm i\pi/4)$ *e* $\exp(\pm i3\pi/4)$ *e são do tipo pólo simples. No semiplano* $[\operatorname{Im} z > 0]$ *estão os pólos* $z_1 = e^{i\pi/4}$ *e* $z_2 = e^{i3\pi/4}$*, de modo que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f;z_1) + \operatorname{Res}(f;z_2)\right].$$

Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f;z_1) &= \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{\pi i/4}} = \frac{1}{4}\exp(-3\pi i/4) \quad e \\ \operatorname{Res}(f;z_2) &= \left.\frac{p(z)}{q'(z)}\right|_{z=z_2} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{4}\exp(-9\pi i/4).\end{aligned}$$

e, consequentemente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Obtém-se o mesmo resultado, se considerarmos os pólos $z_3 = \exp(-i\pi/4)$ *e* $z_4 = \exp(-i3\pi/4)$*, situados no semiplano* $[\operatorname{Im} z < 0]$*. Comprove!*

EXEMPLO 5.4.7 *Para calcular a integral imprópria* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$ *usando o Método dos Resíduos, consideramos a função complexa* $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$*, a qual tem pólos simples em* $z = \pm 3i$ *e pólos de segunda ordem em* $z = \pm 2i$*. No semiplano* $[\operatorname{Im} z > 0]$ *estão os pólos* $z_1 = 2i$ *e* $z_2 = 3i$ *e, assim:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f;2i) + \operatorname{Res}(f;3i)\right].$$

No Exemplo 5.3.21 encontramos $\operatorname{Res}(f;2i) = -\dfrac{13i}{200}$ *e* $\operatorname{Res}(f;3i) = \dfrac{3i}{50}$ *e com isso, obtemos:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2} = 2\pi i \left[\frac{3i}{50} - \frac{13i}{200}\right] = \pi/100.$$

EXEMPLO 5.4.8 *Usando o contorno* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, *ilustrado na Figura 5.10, e a função auxiliar* $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$ *vamos calcular a integral imprópria*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

Este exemplo difere dos anteriores porque o denominador tem uma raiz real em $z = -1$.

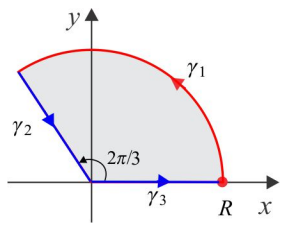


Figura 5.10:

A única singularidade de $f(z)$ *interna ao contorno* γ *é o pólo simples* $z_1 = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$, *de modo que:*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_1).$$

(i) Sobre o Arco γ_1 : *Sobre o arco* $\gamma_1 : z = R\, e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi/3$, *temos:*

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3+1} \right| \le \int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{|z^3+1|} \le \frac{\pi R}{R^3-1} \to 0, \quad \text{com } R \to \infty.$$

(ii) Sobre o Arco γ_2 : *Sobre o arco* $\gamma_2 : z = r\exp(i2\pi/3),\ 0 \le r \le R$, *temos:*

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3+1} = -\int_0^R \frac{\exp(i2\pi/3)\, dr}{1+\left(re^{i2\pi/3}\right)^3} = -\exp(i2\pi/3)\int_0^R \frac{dr}{1+r^3}$$

Do teorema dos Resíduos, obtemos:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3+1} - \exp(i2\pi/3)\int_0^R \frac{dr}{1+r^3} + \int_0^R \frac{dx}{1+x^3} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_1),$$

e notando que $\operatorname{Res}(f; z_1) = 2\left(-3+i\sqrt{3}\right)^{-1}$ *chegamos a:*

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3+1} + [1-\exp(i2\pi/3)]\int_0^R \frac{dx}{1+x^3} = \frac{4\pi i}{-3+i\sqrt{3}}. \tag{5.39}$$

Em (5.39) fazemos $R \to \infty$ *e encontramos:*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1} = 2\pi\sqrt{3}/9.$$

2. INTEGRAIS DO TIPO: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\,dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen} x\,dx$

Aqui não é adequado considerar a função complexa $f(z)\cos z$ ou $f(z)\operatorname{sen} z$, por que as funções $|\cos z|$ e $|\operatorname{sen} z|$ não são limitadas no semiplano $[\operatorname{Im} z > 0]$. Observamos, entretanto, que os integrandos são a parte real e a parte imaginária da função $f(z)\exp(ix)$ e $|e^z| = e^{-y}$ é limitada no semiplano $[\operatorname{Im} z > 0]$.

$$f(x)\exp(ix) = f(x)\cos x + if(x)\operatorname{sen} x.$$

EXEMPLO 5.4.9 *Neste exemplo vamos mostrar que*

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x\ dx}{x} = \pi/2.$$

Seja $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ *e consideremos o contorno* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ *da Figura 5.11. Temos:*

(i) Sobre o Arco γ_1 : *Existe, pelo Teorema do valor Médio,* θ_0, *com* $0 < \theta_0 < \pi$, *tal que:*

$$\int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta = \pi e^{-R\operatorname{sen}\theta_0},$$

de modo que:

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta = \pi e^{-R\operatorname{sen}\theta_0} \to 0, \quad \text{com } R \to \infty.$$

(ii) Sobre o Arco γ_3 : *Sobre o arco* $\gamma_3 : z = \delta e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < 0$, *temos:*

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \lim_{\delta\to 0} \int_0^{\pi} \exp(-\delta\operatorname{sen}\theta + i\delta\cos\theta)\, d\theta = -\pi i$$

e considerando que a função $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z}$ *é analítica no semiplano* $[\operatorname{Im} z > 0]$, *segue que*

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j) = 0$$

e, portanto:

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\delta}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx = -\int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i \Leftrightarrow \tag{5.40}$$

Fazendo $R \to \infty$ *e* $\delta \to 0$ *em (5.40), resulta:*

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = \pi i \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \pi i \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

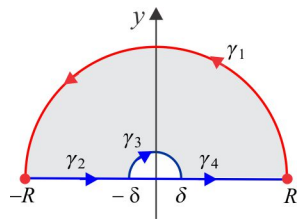


Figura 5.11:

EXEMPLO 5.4.10 *Agora, vamos calcular a integral imprópria*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \; dx}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) dx}{(x^2+1)^2}$$

considerando a função complexa $f(z) = \dfrac{\exp(iz)}{(z^2+1)^2}$ *e o contorno* $\gamma = \gamma_R + \gamma^*$ *da Figura 5.9. No semiplano* $[\operatorname{Im} z > 0]$ *a função* $f(z)$ *tem um pólo de ordem 2 na singularidade* $z_1 = i$*, de modo que:*

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} \; dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; i) - \int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)}{(z^2+1)^2}.$$

O resíduo de f *no ponto* $z = i$ *é:*

$$\operatorname{Res}(f; i) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\right] = \lim_{z \to i} \frac{i(z+i)e^{iz} - 2e^{iz}}{(z+i)^3} = -i/2e$$

e sobre o controno $\gamma_R : |z| = R$*, temos* $\left|\left(z^2+1\right)^2\right| \geq \left(|z|^2 - 1\right)^2 = \left(R^2-1\right)^2$ *e, assim:*

$$\left|\frac{\exp(iz)}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{\left|e^{iz}\right|}{(R^2-1)^2} = \frac{e^{-y}}{(R^2-1)^2} \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}.$$

Logo:

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)\, dz}{(z^2+1)^2}\right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{|dz|}{(R^2-1)^2} = \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \to 0, \quad \text{com } R \to \infty$$

e, consequentemente:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} \; dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i(-i/2e) = \pi/e. \tag{5.41}$$

O lado direito de (5.41) sendo um número real, temos que:

$$\text{(VP)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \; dx}{(x^2+1)^2} = \pi/e$$

e como a função $x \mapsto \dfrac{\cos x}{(x^2+1)^2}$ *é par, resulta:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \; dx}{(x^2+1)^2} = \pi/e.$$

3. INTEGRAIS DO TIPO: $\int_0^{2\pi} g(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$

Considerando $z = e^{i\theta}$, obtemos:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

e quando θ varia de 0 a 2π a variável z descreve uma vez a circunferência $\gamma : |z| = 1$. Assim, temos:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \oint_\gamma f\left[\tfrac{1}{2}(z + 1/z), \tfrac{1}{2i}(z - 1/z)\right](-i/z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(g; z_j),$$

onde $g(z) = f\left[\frac{1}{2}(z + 1/z), \frac{1}{2i}(z - 1/z)\right](-i/z)$ e z_j são as singularidades isoladas de g, internas ao contorno γ.

EXEMPLO 5.4.11 *Como ilustração, deixe-nos mostrar que:*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

De fato, neste caso temos:

$$g(z) = \frac{-i/z}{2 + \frac{1}{2i}(z - 1/z)} = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

e as singularidades de $g(z)$ são $z_1 = (-2+\sqrt{3})i$ e $z_2 = (-2-\sqrt{3})i$. Apenas a singularidade z_1 é interna ao contorno γ e:

$$\operatorname{Res}(g; z_1) = \lim_{z \to z_1} (z - z_1)\, g(z) = \frac{2}{z_1 + (2+\sqrt{3})i} = \frac{2}{i\sqrt{3}}.$$

Logo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \operatorname{sen}\theta} = 2\pi i \operatorname{Res}(g; z_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER **(Exercícios 5.4)**

1. Com auxílio do Teorema dos Resíduos, calcule a integral $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$, em cada caso.

   (a) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{cosec} z}{z^2}$ **(c)** $f(z) = ze^{1/z}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z}$.

2. Repita o exercício precedente com as funções:

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{4z^3 - z}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{1 + 9z^2}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh}(\pi z)}{2z - i}$.

3. Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\left(3z^3+2\right)dz}{(z-1)\left(z^2+9\right)}$, sabendo que:

   (a) γ é o círculo $|z-2|=2$ **(b)** γ é o círculo $|z|=4$

4. Repita o exercício precedente para a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^3(z+4)}$ e os círculos:

   (a) $|z+2|=3$ **(b)** $|z|=2$.

5. Seja $f(z)=\dfrac{5z-2}{z^2-z}$ e designe γ a circunferência de $|z|=2$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$, utilizando os seguintes argumentos:

   (a) O Teorema dos Resíduos, considerando os pólos simples $z=0$ e $z=1$.

   (b) A representação de Laurent de $f(z)$ no domínio $|z|>1$. Nesta representação, o coeficiente b_1 **não** é o resíduo da função na singularidade $z_0=0$. Recorde-se que o resíduo é o coeficiente b_1 gerado na representação de Laurent, no anel $0<|z-z_0|<R$.

6. Seja γ o círculo $|z|=2$, percorrido no sentido positivo. Em cada caso, calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$.

   (a) $f(z)=\tan z$ **(b)** $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{senh}(2z)}$ **(c)** $f(z)=\dfrac{\cosh(\pi z)}{z\left(z^2+1\right)}$ **(d)** $f(z)=\dfrac{1}{z^2\operatorname{senh} z}$.

7. Use o Teorema dos Resíduos para calcular as integrais reais.

   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^6}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$ **(c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ **(d)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

8. Ainda com auxílio de residuos, calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{x^2+2x+2}$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} xdx}{x^2+4x+5}$.

9. Calcule as integrais impróprias, envolvendo as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{3+\operatorname{sen}\theta}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2dx}{1+2x^2+x^4}$ **(d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6}$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{16+x^4}$ **(f)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$ **(g)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{\left(4+x^2\right)^2}$ **(h)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(9+x^2\right)}$

   (i) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(2x)\,dx}{\left(x^2+4\right)^2}$ **(j)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\operatorname{sen} 2xdx}{x^2+4}$ **(k)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(3x)\,dx}{x^2+4}$ **(l)** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\cos bxdx$

10. Calcule as integrais definidas.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\operatorname{sen}\theta}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$.

11. Mostre que:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi e^{-kR}}{a}$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx dx}{a^2+x^2} = 0$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\pi/8}$.

12. Integre $\exp\left(-z^2\right)$ sobre o retângulo de vértices $\pm a$ e $\pm a + ib$ e, em seguida, faça $a \to \infty$ para encontrar o valor de:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(bx)\, dx.$$

13. Use o contorno indicado na Figura 5.12 abaixo e calcule $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$.

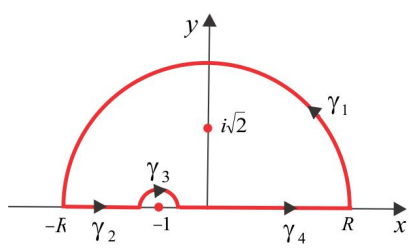


Figura 5.12:

RESPOSTAS & SUGESTÕES

5.1 SÉRIES COMPLEXAS & CONVERGÊNCIA UNIFORME

1. Trata-se de uma série geométrica divergente, já que a razão $w = 1 + i$ é tal que $|w| = \sqrt{2} > 1$.

2. Com $z = 2 - i$, a série se reduz a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{2+i}\right)^{k-1}$ de soma $S = 2 - 4i$.

3. Se a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + w_k)$ fosse convergente, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ também seria, já que $w_k = -z_k + (z_k + w_k)$.

4. Basta o Critério da Comparação para séries reais, notando que se $|z+2| < 4$, então:

$$\left|\frac{(z+2)^k}{(k+1)^3\, 4^k}\right| \leq \frac{1}{(k+1)^3}.$$

5. Na faixa $|\mathrm{Im}\,(z)| < \ln 2$ as séries reais $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\exp\,(\pm ny)}{2^n}$, $y = \mathrm{Im}\,(z)$, convergem absolutamente, pelo Teste da Razão, e, por comparação, obtemos a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\exp\,(nz) - \exp\,(-nz)|}{2^n}.$$

6. **(a)** Se $|z| < R$, então

$$\left|\frac{\lambda^n z^n}{n!}\right| < \frac{(|\lambda|\,R)^n}{n!}$$

e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\lambda|\,R)^n}{n!}$ é convergente.

(b) Use a série de prova $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\frac{r}{R}\right)^n$, a qual é convergente, pelo Teste da Razão.

7. Para estabelecer a convergência uniforme da série, notamos que:

$$\left|\frac{\mathrm{sen}\,(nz)}{2^n}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}\,|\exp\,(nz) - \exp\,(-nz)| = M_n$$

e pelo Exercício 5 deduzimos que a série numérica real $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente. Logo, a série complexa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{sen}\,(nz)}{2^n}$ converge uniformemente e define uma função analítica.

5.2 SÉRIES DE POTÊNCIAS

1. **(a)** $R = 2$ **(b)** $R = 1$ **(c)** $R = 1$ **(d)** $R = 1$ **(e)** $R = 1$.

2. A série representa o número complexo $\exp\,(i\pi)$ e a soma da série é $S = \exp\,(i\pi) = -1$.

3. No disco $|z| < 1$, temos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^k = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots.$$

4. Expresse $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+(z-1)}$ e use a série geométrica para chegar ao resultado.

5. Use a série geométrica, notando que:

(a) $\dfrac{1}{z^2} = -\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{-1+(z+1)}\right]$ e **(b)** $\dfrac{1}{z^2} = \frac{1}{2}\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{1-(z-2)/2}\right]$.

6. Considerando que $\cos z = -\operatorname{sen}(z - \pi/2)$, obtemos:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (z - \pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Por outro lado, $\operatorname{senh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ e dái resulta:

$$\operatorname{senh} z = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

7. Basta notar que:

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} \frac{1}{1 - (z/2)}.$$

8. No disco $0 < |z - 1| < 2$, temos:

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{k-1}}{2^{k-1}}.$$

No disco $|z - i| < \sqrt{2}$, temos

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(1-i)^k}.$$

9. Por integração de uma série geométrica, encontramos:

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[(-1)^k - 1\right] z^{k+1}}{k+1}, \quad |z| < 1.$$

10. **(a)** $\dfrac{e^{-z}}{z^3} = \dfrac{1}{z^3} - \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{2z} + \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k-3}}{k!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(b) $\dfrac{e^{1/z^2}}{z^6} = \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k! z^{2k+6}}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(c) $\dfrac{\cos(2z)}{z^2} = \dfrac{1}{z^2} - 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(d) $\dfrac{1}{z^2(z-3)} = -\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{3^{k+1}}, \quad 0 < |z| < 3.$

11. Use os seguintes fatos:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+z}\right) \quad \text{e} \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]$$

12. A função $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ é representada pela série

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}, \quad 0 < |z| < \infty, \tag{5.42}$$

e, considerando que $f(0) = 1$, a série em (5.42) representa a função $f(z)$ em todo plano $\mathbb{C}$. Ocorre que uma série de potências representa, no seu disco de convergência, uma função analítica.

13. Notamos que:

(i) $f(z) = \dfrac{1}{z^2} \cdot \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{k-2}, \quad 0 < |z| < 1.$

(ii) $f(z) = -\dfrac{1}{z^3} \cdot \dfrac{1}{1-1/z} = -\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-3}, \quad |z| > 1.$

A representação de Laurent é única num determinado anel. O que vemos acima é duas representações da mesma função, em domínios diferentes. Portanto, não há violação da unicidade.

14. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k (z-1)^k$, $|z-1| < 1$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{(z-1)^{k+2}}$, $|z-1| > 1$ **(c)** $-\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z}$, $|z| > 0$.

15. Usando as representações de Taylor:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1 (z-z_0) + a_2 (z-z_0)^2 + \cdots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \\ g(z) &= b_0 + b_1 (z-z_0) + b_2 (z-z_0)^2 + \cdots, \quad b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \end{aligned}$$

encontramos:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{a_1 + a_2 (z-z_0) + \cdots}{b_1 + b_2 (z-z_0) + \cdots} \right] = \frac{a_1}{b_1}.$$

16. No disco de convergência da série de Taylor de $f(z)$, temos:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

onde $a_n = \dfrac{f^{(n+k+1)}(z_0)}{(n+k+1)!}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Como $g(z)$ é representada por uma série de Taylor, em torno de z_0, segue que $g(z)$ é analítica em z_0. (compare com o Exercício 12)

17. A série de Maclaurin de $g(z)$, obtida a partir da série de $\operatorname{sen} z$, vem dada por:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

onde vemos que as derivadas $g^{(2k-1)}(0)$ e $g^{(4k)}(0)$ são nulas, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

18. $f''(0) = -2/3$.

19. **(a)** Note que z_0 é um zero de ordem m da função analítica $f(z)$ se, e somente se $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ e $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ e, assim:

$$(z - z_0)^{-m} f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z - z_0)^2 + \cdots.$$

Portanto, $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^{-m} f(z) = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$.

(b) Suponha que z_0 seja um zero de ordem m de $f(z)$. Então $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, sendo $g(z)$ uma função analítica e não nula em γ e no seu interior. Então:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{m}{(z - z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e integrando sobre o contorno γ, encontramos:

$$\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m \underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)}}_{=2\pi i} + \underbrace{\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz}_{=0} = 2\pi i m.$$

5.3 SINGULARIDADES & PÓLOS

1. Recorde-se que uma singularidade removível é apenas aparente e que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$ se, e só se, $f(z)$ é limitada em alguma vizinhança de z_0. Veja o Lema 5.3.13.

2. As singularidades são os pontos que anulam o denominador de $f(z)$.

   (a) $z = 0$ e $z = 2$ são pólos simples ($m = 1$) de $f(z)$, com $\text{Res}(f; 0) = 1/2$ e $\text{Res}(f; 2) = 3/2$.

   (b) $f(z)$ tem pólos simples nos pontos $z_k = (k + 1/2)\pi i$, com $\text{Res}(f; z_k) = 1$.

   (c) $z = 0$ é um pólo de ordem $m = 3$, com $\text{Res}(f; 0) = -4/3$.

   (d) $z_k = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, são os pólos simples de $f(z)$; $\text{Res}(f; z_k) = (-1)^k (k\pi + \pi/2)$.

3. A singularidade $z = i$ é um pólo simples, com $\text{Res}(f; i) = \dfrac{-1 + 7i}{25}$. A singularidade $z = 2$ é um pólo duplo, com $\text{Res}(f; 2) = \dfrac{1 - 7i}{25}$. Logo, $\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; 2) = 0$.

4. Que z_0 é um pólo simples de $g(z)$ decorre de

$$\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)\,g(z)\right]=h(z_0)\neq 0.$$

Se $h(z)=e^z-2z+2$, então:

$$\lim_{z\to 0}\left[z\cdot g(z)\right]=\lim_{z\to 0}\left(e^z-2z+2\right)=3.$$

5. $z_1=0$ é um pólo simples e $z_2=2$ é um pólo de ordem 5.

6. Nos casos (c) e (d), a função tem uma singularidade essencial em $z=0$.

   (a) $f(z)$ tem um pólo simples em $z=0$.

   (b) $f(z)$ tem um pólo de ordem $m=2$ em $z=0$ e tem pólos simples nos pontos $z_k=2k\pi i,\ k\in\Bbbk$.

   (e) $f(z)$ tem um pólo de ordem $m=2$ em $z=1$.

7. Admita que z_0 seja um pólo de ordem m e use a série de Laurent de $f(z)$, sob a forma:

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\left[b_m+b_{m-1}(z-z_0)+\cdots+b_2(z-z_0)^2+b_1(z-z_0)^{m-1}\right]+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k.$$

Agora, use a desigualdade $|z+w|\geq|z|-|w|$.

8. **(a)** 0 **(b)** 1/6 **(c)** $-1/2$.

9. Usando as séries já estabelecidas, encontramos:

   (a) $\dfrac{e^z}{\cos z}=1+z+z^2+\frac{2}{3}z^3+\cdots.$

   (b) $\dfrac{z}{\operatorname{sen} z}=1+\frac{1}{3}z^2+\frac{34}{6!}z^4+\cdots.$

   (c) $\dfrac{1}{z\left(e^z-1\right)}=\dfrac{1}{z^2}-\frac{1}{2}\dfrac{1}{z}+\frac{1}{12}z+\cdots.$ $(|z|>0)$

   (d) $\dfrac{1}{z^2\operatorname{senh} z}=\dfrac{1}{z^3}-\frac{1}{6}\dfrac{1}{z}+\frac{7}{360}z+\cdots.$ $(|z|>0)$

10. Veja o Exercício 19 da Seção 5.2.

5.4 TEOREMA DOS RESÍDUOS & APLICAÇÕES

1. **(a)** $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{-z}/z^2 dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f;0) = 2\pi i \lim_{z\to 0}(-e^{-z}) = -2\pi i.$

   (b) $\pi i/3$ **(c)** πi **(d)** .....

2. **(a)** $3\pi i/2$ **(b)** $2\pi i/9$ **(c)** $-\pi i$ **(d)** πi.

3. **(a)** 0 **(b)** $\pi i/32$.

4. **(a)** $2\pi/3$ **(b)** $8\pi/\sqrt{3}$ **(c)** $\pi\sqrt{2}$.

5. $10\pi i$.

6. **(a)** $-4\pi i$ **(b)** $-\pi i$ **(c)** $4\pi i$ **(d)** $-\pi i/3$

7. **(a)** $\pi/6$ **(b)** $\pi/6$ **(c)** $\pi\sqrt{2}/4$ **(d)** $\pi/4$.

8. **(a)** $\pi/5$ **(b)**

9. **(a)** $\pi e^{-k}/a$ **(b)** 0 **(c)** $\pi/2$ **(d)** $\sqrt{\pi/8}$ **(e)** $\pi/2e$ **(f)** $\frac{\pi}{2}e^{-a}\operatorname{sen} a$ **(g)** $-(\pi/e)\operatorname{sen} 2$.

   (l) Integre $\exp\left(-z^2\right)$ sobre o retângulo de vértices $a,\ -a,\ a+ib$ e $-a+ib$ e faça $a\to\infty$.

10. **(a)** $2\pi/3$ **(b)** $8\pi/\sqrt{3}$ **(c)** $\pi\sqrt{2}$.

11. Fazer o item (a) como ilustração

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G. S. S. *Variávis Complexas e Aplicações*, LTC, Rio de Janeiro, 2000.

[2] Bartle, R. G. *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[3] Churchill, R. V., Brown, J. W. & Verhey, R. F. *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, Kogakusha Ltda, Tokyo, 1974.

[4] Courant, R. & John, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, vol.1, Springer, New York, 1965.

[5] Finney, R. L., Weir, M. D. & Giordano, F. R. *Cálculo de George B. Thomas Jr*, vol. 2, Addison-Wesley, São Paulo, 2003.

[6] Kaplan, W. *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1970.

[7] Medeiros, L. A. *Funções Complexas*, Ed. McGraw-Hill do Brasil, 1972.

[8] Protter, M. H. & Morrey, C. B. Jr. *Modern Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1964.

[9] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*, Ed. Universidade de Brasília, Brasília, 1971.

[10] Soares, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa, Coleção Matemática Universitária, IMPA.*

[11] Stewart, J. *Cálculo*, vol. 2, CENGAGE, Learning, São Paulo, 2008.

[12] Tolstov, G. P. *Fourier Series*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.