5.1 Séries Numéricas & Séries de Funções

1. A série $\sum_{k=1}^{\infty}(1+i)^k$ é convergente ou divergente?

2. Determine o disco de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z+i)^k}{(2+i)^{k-1}}$.

3. Calcule a soma da série do exercício precedente, no ponto $z=2-i$.

4. Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ é divergente, mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty}(z_k+w_k)$ é divergente.

5. Em cada caso, determine o raio de convergência da série.

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(z+i)^k}{(2i)^{k-1}}$ **(b)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\operatorname{Log}(ik)}$ **(c)** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^{2i}(z-\pi)^k}{2^k}$ **(d)** $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k z^k}{2^{ik}}$ **(e)** $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}z^k}{\sqrt{3}ik}$.

6. Calcule o valor da soma infinita $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi i)^k}{k!}$.

7. Mostre que a série $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2)^k}{(k+1)^3 4^k}$ converge absolutamente no disco compacto $D:|z+2|\leq 4$.

8. O TESTE M DE WEIRSTRASS Seja (f_n) uma sequência de funções de $D\to\mathbb{C}$ e suponha que

$$|f_n(z)|\leq M_n,\quad \forall n,\quad \forall z\in D.$$

   Se a série real $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente em D.

9. Usando o Teste M de Weierstrass, estabeleça convergência uniforme das séries, no domínio indicado.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n z^n}{n!}$; $|z|<R$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k z^n}{R^n}$; $|z|\leq r<R$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{z/n}}{n^2+z^2}$; $|z|<R,\ z\neq in,\ n\in\mathbb{Z}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-\cos n)z^{2n}}{n^2+1}$; $|z|\leq R<1$ **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{z/n}\cos n}{n^3+1}$; $|z|<R$ **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+z^2}$; $1<|z|<2$.

10. Seja (f_n) uma sequência de funções analíticas de $D \to \mathbb{C}$ e suponha que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ seja uniformemente convergente em D. Mostre que a função $f : D \to \mathbb{R}$, definda por:
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$
é analítica em D.

11. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ define uma função analítica na faixa $|\operatorname{Im}(z)| < \ln 2$.

12. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$ converge uniformemente no eixo real e que a convergência não é uniforme em região alguma do plano $\mathbb{C}$.

5.2 Série de Taylor & Série de Laurent

1. Represente a função $f(z) = (1+z)^{-1}$ em série de potências de z. Indique o domínio de convergência.

2. A partir do desenvolvimento de Maclaurin
$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \quad |z| < 1,$$
obtenha a representação:
$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1.$$

3. Mostre que:

(a) $\dfrac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n,$ no disco $|z+1| < 1$.

(b) $\dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n+1)(z-2)^n}{2^n},$ no disco $|z-2| < 2$.

4. Desenvolva $\cos z$ em série de Taylor em torno de $z_0 = \pi/2$ e $\sinh z$ em torno de $z_0 = \pi i$. Com o resultado, deduza que:

(a) $\lim_{z \to \pi/2} \dfrac{\cos z}{z - \pi/2} = -1$ e **(b)** $\lim_{z \to \pi i} \dfrac{\operatorname{senh} z}{z - \pi i} = -1.$

5. No disco $0 < |z| < 4$, mostre que
$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

6. No disco $0 < |z - 1| < 2$, represente a função $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$ em série de petências de $z - 1$. Idem para a função $g(z) = \dfrac{1}{1-z}$ em série de potências de $z - i$.

7. Represente a função $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ em série de potências de z.

8. Em cada caso, desenvolva a função $w = f(z)$ em série de Laurent na região $0 < |z| < r$.

   (a) $w = \dfrac{e^{-z}}{z^3}$ **(b)** $w = \dfrac{e^{1/z^2}}{z^6}$ **(c)** $w = \dfrac{\cos(2z)}{z^2}$ **(d)** $w = \dfrac{1}{z^2(z-3)}$.

9. Usando derivação termo a termo, prove que:

   (a) $\dfrac{1}{(1+z)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1}$ **(b)** $\dfrac{2}{(1-z)^3} = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2}$.

10. Use a série de Taylor de $\operatorname{sen} z$ e mostre que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$, $z \neq 0$ e $f(0) = 1$, é inteira.

11. Dê dois desenvolvimento em série de Laurent, em potências de z, para a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ e especifique onde os desenvolvimentos são válidos. A unicidade de representação em série de Laurent é violada?

12. Considere a função $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2}$.

    (a) Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$.

    (b) Represente $f(z)$ em série de Laurent, no domínio $|z - 1| > 1$.

    (c) Qual o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$, no disco $|z| > 0$?

13. Suponha que $f(z)$ e $g(z)$ sejam funções analítcas em z_0 e que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$. Prove a **REGRA DE L'HÔPITAL:**
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$
Se ocorrer $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ e $g''(z_0) \neq 0$, então:
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)}.$$

14. Se $f(z)$ é analítica em z_0 e $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k)}(z_0) = 0$, mostre que a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$g(z) = \left| \begin{array}{ll} f(z)(z - z_0)^{-k-1}, & \text{se } z \neq z_0 \\ f^{(k+1)}(z_0)\left[(k+1)!\right]^{-1}, & \text{se } z = z_0 \end{array} \right.$$

é analítica em z_0.

15. Sabendo que $g(z) = \operatorname{sen}(z^2)$, use a série de Maclaurin de $g(z)$ e mostre que:

$$(2+i)\, g^{(31)}(0) + (4-3i)\, g^{(40)}(0) = 0.$$

16. Certa função inteira $f(z)$ é tal que $f(z) = (4z)^{-1} \operatorname{sen}(2z)$, nos pontos do contorno $\gamma : |z| = 2$. Calcule o valor de $f''(0)$.

17. OS ZEROS DE UMA FUNÇÃO ANALÍTICA Um ponto z_0 denomina-se um zero de ordem m de uma função analítica $f(z)$ quando:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

e em torno de um zero de ordem m a série de Taylor de $f(z)$ se reduz a:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

(a) Mostre que os zeros de uma função analítica, não identicamente nula, são pontos isolados. Na demonstração, expresse $f(z)$ sob a forma

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

com $g(z)$ analítica e $g(z) \neq 0$, em alguma vizinhança do ponto z_0.

(b) Mostre que z_0 é um zero de ordem m de $f(z)$ se, e somente se, $(z - z_0)^{-m} f(z)$ tem limite finito e diferente de zero, com $z \to z_0$.

(c) Suponha que z_0 seja o único zero de uma função analítica $f : D \to \mathbb{C}$. Se γ é um contorno em D, simples, fechado e regular, envolvendo o ponto z_0, com orientação positiva, mostre que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

coincide com a ordem do zero em questão.

5.3 Resíduos & Pólos

1. Mostre que uma singularidade isolada z_0 da função $f(z)$ é removível se, e só se, $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe e é finito.

2. Em cada caso, mostre que as singularidades da função $f(z)$ é do tipo pólo; determine a ordem m do pólo e o valor do resíduo de f.

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$ **(b)** $f(z) = \tanh z$ **(c)** $f(z) = \dfrac{1 - \exp(2z)}{z^4}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$.

3. Classifique as singularidades da função $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)^2 (z-i)}$ e mostre que $\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; 2) = 0$.

4. Se $h(z)$ é analítica em z_0 e $h(z_0) \neq 0$, mostre que a função $g(z) = \dfrac{h(z)}{z - z_0}$, tem um pólo simples em z_0 e que $\text{Res}(g, z_0) = h(z_0)$. Comprove esse resultado com a função $g(z) = (e^z - 2z + 2)/z$.

5. Determine e classifique os pólos da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)^5} + \dfrac{3}{(z-2)^2}$.

6. Em cada caso, determine e classifique as singularidades da função $w = f(z)$.

   (a) $w = z + \dfrac{1}{z}$ **(b)** $w = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$ **(c)** $w = \text{sen}\left(1/z^2\right)$ **(d)** $w = e^z + e^{1/z}$ **(e)** $w = \dfrac{1}{(\text{Log}\, z)^2}$.

7. Se z_0 é um pólo de uma função $f(z)$, analítica no disco $0 < |z - z_0| < R$, mostre que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Comprove esse resultado com a função $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$.

8. Calcule $\text{Res}(f; 0)$, em cada um dos seguintes casos:

   (a) $f(z) = \text{cosec}^2 z$ **(b)** $f(z) = z^{-3} \text{cosec}\left(z^2\right)$ **(c)** $f(z) = z \cos(1/z)$.

9. Em cada caso, mostre que as singularidades da função $f(z)$ são pólos e calcule o resíduo de f em cada um deles.

   (a) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$.

10. Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\left(3z^3 + 2\right) dz}{(z-1)\left(z^2 + 9\right)}$, sabendo que:

    (a) γ é o círculo $|z - 2| = 2$ **(b)** γ é o círculo $|z| = 4$

11. Repita o exercício precedente para a integral $\int_\gamma \frac{dz}{z^3(z+4)}$ e os círculos:

(a) $|z+2| = 3$ **(b)** $|z| = 2$.

12. Seja $f(z) = \frac{5z-2}{z^2-z}$ e designe γ a circunferência de $|z| = 2$. Calcule $\int_\gamma f(z)\,dz$, utilizando os seguintes argumentos:

(a) O Teorema dos Resíduos, considerando os pólos simples $z = 0$ e $z = 1$.

(b) A representação de Laurent de $f(z)$ no domínio $|z| > 1$. Nesta representação, o coeficiente b_1 **não** é o resíduo da função na singularidade $z_0 = 0$. Recorde-se que o resíduo é o coeficiente b_1 gerado na representação de Laurent, no anel $0 < |z - z_0| < R$.

13. O PRODUTO DE CAUCHY O Produto de Cauchy das séries

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

é a série $\sum_{n=0}^{\infty} p_n (z-z_0)^n$, onde $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Em cada ponto z do disco $D_C(f) \cap D_C(g)$, esse produto converge uniforme e absolutamente para $f(z) \cdot g(z)$. Quando $g(z)$ não se anular no domínio de convergência, o quociente das séries de f e g é a série $\sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n$, determinada pela relação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n\right).$$

Se, por exemplo, $b_0 \neq 0$, temos: $q_0 = \frac{a_0}{b_0}$ e $q_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0}$. Use o quociente de séries para encontrar os primeiros termos das séries de potências de z das seguintes funções:

(a) $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ **(b)** $f(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}$ **(c)** $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ **(d)** $\frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z}$.

14. UM ATALHO PARA O CÁLCULO DO RESÍDUO Suponha que $p(z)$ e $q(z)$ sejam analíticas em z_0 e designe $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$.

(a) Mostre que as singularidades isoladas de $f(z)$ são precisamente os zeros de $q(z)$.

(b) Se $q(z_0) = 0$ e $p(z_0)\,q'(z_0) \neq 0$, mostre que z_0 é um pólo simples de $f(z)$ e que:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

(c) Se $q(z_0) = q'(z_0)\,0$ e $p(z_0) \cdot q''(z_0) \neq 0$, mostre que z_0 é um pólo de ordem $m = 2$ de $f(z)$ e que:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2p(z_0)\,q'''(z_0)}{3\left[q''(z_0)\right]^2}.$$

15. Com auxílio do Teorema dos Resíduos, calcule a integral $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz$, em cada caso.

(a) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{cosec} z}{z^2}$ **(c)** $f(z) = ze^{1/z}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{e^z}{\cos z}$.

16. Repita o exercício precedente com as funções:

(a) $f(z) = \dfrac{z+1}{4z^3 - z}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{1+9z^2}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2z}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh}(\pi z)}{2z - i}$.

17. Seja γ o círculo $|z| = 2$, percorrido no sentido positivo. Em cada caso, calcule $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$.

(a) $f(z) = \tan z$ **(b)** $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(2z)}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh} z}$.

18. Se $f(z)$ é analítica em $|z - z_0| < R$ e z_0 é um zero de ordem m de f, mostre que a função $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ tem um pólo de ordem m em z_0.

5.4 Calculando Integrais Reais

1. Cada integral imprópria dada a seguir é do tipo $\displaystyle\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)}dx$ e o $\operatorname{gr}(p(x)) \geq 2 + \operatorname{gr}(p(x))$. Use resíduos para calcular cada uma delas.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^6}$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ **(c)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$ **(d)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ **(d)** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}$.

2. Ainda com auxílio de residuos, calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{x^2+2x+2}$ **(b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^2+4x+5}$.

3. Calcule as integrais impróprias, envolvendo as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)\,dx}{a^2+x^2}$ (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(kx)\,dx}{a^2+x^2}$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}dx$ (d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos\left(x^2\right)dx$

(e) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)^2}$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen}(ax)\,dx}{4+x^2}$ (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^2+4x+5}$ (h) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x\operatorname{sen} x dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$

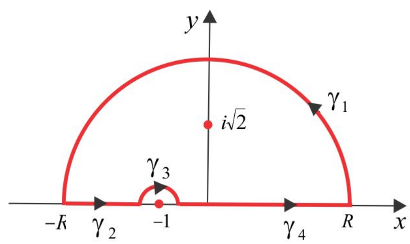
4. Calcule as integrais definidas.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\operatorname{sen}\theta}$ **(b)** $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$ **(c)** $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$.

5. Integre $\exp\left(-z^2\right)$ sobre o retângulo de vértices $\pm a$ e $\pm a+ib$ e, em seguida, faça $a\to\infty$ para encontrar o valor de:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(bx)\,dx.$$

6. Use o contorno indicado na figura abaixo e calclule $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$.



RESPOSTAS & SUGESTÕES

5.1. SÉRIES NUMÉRICAS & SÉRIES DE POTÊNCIAS

1. Trata-se de uma série geométrica divergente, já que a razão $z=1+i$ é tal que $|z|=\sqrt{2}>1$.

2. O disco de convergência é $|z+i|<\sqrt{5}$.

3. No ponto $z=2-i$ a soma da série é:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(2+i)^{k-1}}=2-4i.$$

4. Fazer em sala de aula.

5. (a) $R = 2$ (b) $R = 1$ (c) $R = 1$ (d) $R = 1$ (e) $R = 1$.

6. A soma da série é $S = -1$.

5.2. SÉRIES DE TAYLOR & SÉRIES DE LAURENT

1. No domínio $|z| > 1$, temos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}}.$$

2. Expresse $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+(z-1)}$ e use a série geométrica para chegar ao resultado.

3. Use a série geométrica, notando que:

(a) $\dfrac{1}{z^2} = -\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{-1+(z+1)}\right]$ e **(b)** $\dfrac{1}{z^2} = \frac{1}{2}\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{1}{1-(z-2)/2}\right]$.

4. Considerando que $\cos z = -\operatorname{sen}(z - \pi/2)$, obtemos:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(z-\pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Por outro lado, $\operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$ e dái resulta:

$$\operatorname{senh} z = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-\pi i)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

5. O ponto de partida é a série geométrica, notando que:

$$\frac{1}{4z - z^2} = \left(\frac{1}{4z}\right)\left[\frac{1}{1-(z/2)}\right].$$

6. No disco $0 < |z-1| < 2$, temos:

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} - 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{k-1}}{2^{k-1}}.$$

No disco $|z - i| < \sqrt{2}$, temos

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(1-i)^k}.$$

7. Por integração da série geométrica, encontramos:

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[(-1)^k-1\right]z^{k+1}}{k+1},\quad |z|<1.$$

8. (a) $\dfrac{e^{-z}}{z^3}=\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2z}+\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{k-3}}{k!},\quad 0<|z|<\infty.$

(b) $\dfrac{e^{1/z^2}}{z^6}=\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k!z^{2k+6}},\quad 0<|z|<\infty.$

(c) $\dfrac{\cos(2z)}{z^2}=\dfrac{1}{z^2}-1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}4^k z^{2k}}{(2k)!},\quad 0<|z|<\infty.$

(d) $\dfrac{1}{z^2(z-3)}=-\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty}\frac{z^{k-2}}{3^{k+1}},\quad 0<|z|<3.$

9. Use as seguintes regras de derivação:

(a) $\dfrac{1}{(1+z)^2}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{1+z}\right)$ e **(b)** $\dfrac{1}{(1-z)^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2}{dz^2}\left(\dfrac{1}{1-z}\right).$

10. A função $\dfrac{\operatorname{sen}}{z}$ é representada pela série

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!},\quad 0<|z|<\infty, \tag{5.1}$$

e , considerando que $f(0)=1$, a série em (5.1) representa a função $f(z)$ em todo plano $\mathbb{C}$. Ocorre que uma série de potências representa, no seu disco de convergência, uma função analítica.

11. Notamos que:

(i) $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\cdot\dfrac{1}{1-z}=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}z^{k-2},\quad 0<|z|<1.$

(ii) $f(z)=-\dfrac{1}{z^3}\cdot\dfrac{1}{1-1/z}=-\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}z^{-k-3},\quad |z|>1.$

Ressaltamos que não há violação da unicidade de representação em série de Laurent, porque as representações acima ocorrem em domínios disjuntos.

12. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}k(z-1)^k,\ |z-1|<1$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)}{(z-1)^{k+2}},\ |z-1|>1$ **(c)** $-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z},\ |z|>0.$

13. Usando as representações de Taylor:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \\ g(z) &= b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \cdots, \quad b_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \end{aligned}$$

encontramos:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \left[\frac{a_1 + a_2(z-z_0) + \cdots}{b_1 + b_2(z-z_0) + \cdots}\right] = \frac{a_1}{b_1}.$$

14. No disco de convergência da série de Taylor de $f(z)$, temos:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

onde $a_n = \dfrac{f^{(n+k+1)}(z_0)}{(n+k+1)!}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$. Como $g(z)$ é representada por uma série de Taylor, em torno de z_0, segue que $g(z)$ é analítica em z_0. (compare com o Exercício 10)

15. A série de Maclaurin de $g(z)$, obtida a partir da série de $\operatorname{sen} z$, vem dada por:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

onde vemos que as derivadas $g^{(2k-1)}(0)$ e $g^{(4k)}(0)$ são nulas, para $k = 1,2,3,\ldots$.

16. $f''(0) = -2/3$.

5.3. RESÍDUOS & PÓLOS

1. Recorde-se que uma singularidade removível é uma "falsa"singularidade e que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$ se, e só se, $f(z)$ é limitada em alguma vizinhança de z_0.

2. As singularidades são os pontos que anulam o denominador de $f(z)$.

   (a) $z = 0$ e $z = 2$ são pólos simples $(m = 1)$ de $f(z)$, com $\operatorname{Res}(f;0) = 1/2$ e $\operatorname{Res}(f;2) = 3/2$.

   (b) $f(z)$ tem pólos simples nos pontos $z_k = (k + 1/2)\pi i$, com $\operatorname{Res}(f;z_k) = 1$.

   (c) $z = 0$ é um pólo de ordem $m = 3$, com $\operatorname{Res}(f;0) = -4/3$.

   (d) $z_k = k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}$, são os pólos simples de $f(z)$; $\operatorname{Res}(f;z_k) = (-1)^k (k\pi + \pi/2)$.

3. A singularidade $z = i$ é um pólo simples, com $\operatorname{Res}(f; i) = \dfrac{-1+7i}{25}$. A singularidade $z = 2$ é um pólo duplo, com $\operatorname{Res}(f; 2) = \dfrac{1-7i}{25}$. Logo, $\operatorname{Res}(f; i) + \operatorname{Res}(f; 2) = 0$.

4. Que z_0 é um pólo simples de $g(z)$ decorre de

$$\lim_{z \to z_0} [(z - z_0) g(z)] = h(z_0) \neq 0.$$

Se $h(z) = e^z - 2z + 2$, então:

$$\lim_{z \to 0} [z \cdot g(z)] = \lim_{z \to 0} (e^z - 2z + 2) = 3.$$

5. $z_1 = 0$ é um pólo simples e $z_2 = 2$ é um pólo de ordem 5.

6. Nos casos (c) e (d), a função tem uma singularidade essencial em $z = 0$.

(a) $f(z)$ tem um pólo simples em $z = 0$.

(b) $f(z)$ tem um pólo de ordem $m = 2$ em $z = 0$ e tem pólos simples nos pontos $z_k = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{k}$.

(e) $f(z)$ tem um pólo de ordem $m = 2$ em $z = 1$.

7. Admita que z_0 seja um pólo de ordem m e use a série de Laurent de $f(z)$, sob a forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_2 (z - z_0)^2 + b_1 (z - z_0)^{m-1} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Agora, use a desigualdade $|X + Y| \geq |X| - |Y|$.

8. (a) 0 (b) 1/6 (c) $-1/2$.

9. **(a)** πi **(b)** $6\pi i$.

10. (a) 0 (b) $\pi i/32$.

11. Similar ao anterior.

12. (a) Use o teorema dos Resíduos.

(b) Use a Fórmula Integral de Cauchy em cada termo da série de Laurent de $f(z)$.

13. Usando as séries já estabelecidas, encontramos:

(a) $\dfrac{e^z}{\cos z} = 1 + z + z^2 + \frac{2}{3}z^3 + \cdots$.

(b) $\dfrac{z}{\operatorname{sen} z} = 1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{34}{6!}z^4 + \cdots$.

(c) $\dfrac{1}{z\left(e^z - 1\right)} = \dfrac{1}{z^2} - \frac{1}{2}\dfrac{1}{z} + \frac{1}{12}z + \cdots$. $\quad (|z| > 0)$

(d) $\dfrac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \dfrac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\dfrac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \cdots$. $\quad (|z| > 0)$

14. Temos que $\operatorname{Res}(f;0) = 2$, $\operatorname{Res}(f;1) = 3$ e a integral é igual a $10\pi i$.

15. Use o produto de Cauchy ou faça o cálculo direto usando a relação

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[\frac{1}{(m-1)!} (z - z_0)^m f(z) \right] \right),$$

para um pólo de ordem m.

16. (a) Se $q(z_0) \neq 0$, existe $\delta > 0$, tal que $q(z) \neq 0$, $\forall z \in V_\delta(z_0)$, e, portanto, $f(z)$ é holomorfa em z_0.

(b) Nas condições descritas, resulta que z_0 é um zero de ordem $m = 1$ de $q(z)$, de modo que $q(z) = (z - z_0)\, h(z)$, com $h(z_0) \neq 0$ e $\lim\limits_{z \to z_0} h(z) = q'(z_0)$. Assim:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[\frac{p(z)}{h(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \neq 0$$

e, portanto, z_0 é um pólo simples de $f(z)$. Quanto ao resíduo, note que:

$$\operatorname{Res}(f;z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{h(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

17. (a) $-2\pi i$ (b) $\pi i/3$ (c) πi.

18. **(a)** $3\pi i/2$ **(b)** $2\pi i/9$ **(c)** $-\pi i$ **(d)** πi.

19. **(a)** $-4\pi i$ **(b)** $-\pi i$ **(c)** $4\pi i$ **(d)** $-\pi i/3$.

20. Use o Exercício 17 da Seção 5.2.

5.4. CALCULANDO INTEGRAIS REAIS

1. (a) $\pi/6$ (b) $\pi/6$ (c) $\pi\sqrt{2}/4$ (d) $\pi/4$.

2. (a) $\pi/5$ (b)

3. (a) $\pi e^{-k}/a$ (b) 0 (c) $\pi/2$ (d) $\sqrt{\pi/8}$ (e) $\pi/2e$ (f) $\frac{\pi}{2}e^{-a}\operatorname{sen} a$ (g) $-\frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 2$.

4. (a) $2\pi/3$ (b) $8\pi/\sqrt{3}$ (c) $\pi\sqrt{2}$.