

## 5.1 Séries Numéricas & Séries de Funções

1. A série  $\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^k$  é convergente ou divergente?
2. Determine o disco de convergência da série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+i)^k}{(2+i)^{k-1}}$ .
3. Calcule a soma da série do exercício precedente, no ponto  $z = 2 - i$ .
4. Se  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  é convergente e  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$  é divergente, mostre que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + w_k)$  é divergente.
5. Em cada caso, determine o raio de convergência da série.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(z+i)^k}{(2i)^{k-1}} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\text{Log}(ik)} \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2i}(z-\pi)^k}{2^k} \quad (d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{2^{ik}} \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{\sqrt{3ik}}$$

6. Calcule o valor da soma infinita  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi i)^k}{k!}$ .
7. Mostre que a série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2)^k}{(k+1)^3 4^k}$  converge absolutamente no disco compacto  $D : |z+2| \leq 4$ .
8. O TESTE M DE WEIRSTRASS Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções de  $D \rightarrow \mathbb{C}$  e suponha que

$$|f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall n, \quad \forall z \in D.$$

Se a série real  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  é convergente, mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  converge uniformemente em  $D$ .

9. Usando o Teste M de Weierstrass, estabeleça convergência uniforme das séries, no domínio indicado.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{n!}; |z| < R \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k z^n}{R^n}; |z| \leq r < R \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{n^2 + z^2}; |z| < R, z \neq in, n \in \mathbb{Z}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - \cos n) z^{2n}}{n^2 + 1}; |z| \leq R < 1 \quad (e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{z/n} \cos n}{n^3 + 1}; |z| < R \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}; 1 < |z| < 2.$$

10. Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções analíticas de  $D \rightarrow \mathbb{C}$  e suponha que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  seja uniformemente convergente em  $D$ . Mostre que a função  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

é analítica em  $D$ .

11. Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$  define uma função analítica na faixa  $|\operatorname{Im}(z)| < \ln 2$ .
12. Mostre que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$  converge uniformemente no eixo real e que a convergência não é uniforme em região alguma do plano  $\mathbb{C}$ .

## 5.2 Série de Taylor & Série de Laurent

1. Represente a função  $f(z) = (1+z)^{-1}$  em série de potências de  $z$ . Indique o domínio de convergência.

2. A partir do desenvolvimento de Maclaurin

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \quad |z| < 1,$$

obtenha a representação:

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1.$$

3. Mostre que:

(a)  $\frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n$ , no disco  $|z+1| < 1$ .

(b)  $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(z-2)^n}{2^n}$ , no disco  $|z-2| < 2$ .

4. Desenvolva  $\cos z$  em série de Taylor em torno de  $z_0 = \pi/2$  e  $\sinh z$  em torno de  $z_0 = \pi i$ . Com o resultado, deduza que:

(a)  $\lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{\cos z}{z - \pi/2} = -1$  e (b)  $\lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{\sinh z}{z - \pi i} = -1$ .

5. No disco  $0 < |z| < 4$ , mostre que

$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

6. No disco  $0 < |z - 1| < 2$ , represente a função  $f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 3)}$  em série de potências de  $z - 1$ .

Idem para a função  $g(z) = \frac{1}{1 - z}$  em série de potências de  $z - i$ .

7. Represente a função  $\text{Log} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$  em série de potências de  $z$ .

8. Em cada caso, desenvolva a função  $w = f(z)$  em série de Laurent na região  $0 < |z| < r$ .

(a)  $w = \frac{e^{-z}}{z^3}$     (b)  $w = \frac{e^{1/z^2}}{z^6}$     (c)  $w = \frac{\cos(2z)}{z^2}$     (d)  $w = \frac{1}{z^2(z - 3)}$ .

9. Usando derivação termo a termo, prove que:

(a)  $\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1}$     (b)  $\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2}$ .

10. Use a série de Taylor de  $\text{sen } z$  e mostre que a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $f(z) = \frac{\text{sen } z}{z}$ ,  $z \neq 0$  e  $f(0) = 1$ , é inteira.

11. Dê dois desenvolvimentos em série de Laurent, em potências de  $z$ , para a função  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$  e especifique onde os desenvolvimentos são válidos. A unicidade de representação em série de Laurent é violada?

12. Considere a função  $f(z) = \frac{z-1}{z^2}$ .

(a) Obtenha o desenvolvimento de  $f(z)$  em série de Taylor em torno de  $z_0 = 1$ .

(b) Represente  $f(z)$  em série de Laurent, no domínio  $|z - 1| > 1$ .

(c) Qual o desenvolvimento de Laurent de  $f(z)$ , no disco  $|z| > 0$ ?

13. Suponha que  $f(z)$  e  $g(z)$  sejam funções analíticas em  $z_0$  e que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  e  $g'(z_0) \neq 0$ . Prove

a REGRA DE L'HÔPITAL:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Se ocorrer  $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$  e  $g''(z_0) \neq 0$ , então:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)}.$$

14. Se  $f(z)$  é analítica em  $z_0$  e  $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k)}(z_0) = 0$ , mostre que a função  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por:

$$g(z) = \begin{cases} f(z)(z - z_0)^{-k-1}, & \text{se } z \neq z_0 \\ f^{(k+1)}(z_0) [(k+1)!]^{-1}, & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

é analítica em  $z_0$ .

15. Sabendo que  $g(z) = \text{sen}(z^2)$ , use a série de Maclaurin de  $g(z)$  e mostre que:

$$(2+i)g^{(31)}(0) + (4-3i)g^{(40)}(0) = 0.$$

16. Certa função inteira  $f(z)$  é tal que  $f(z) = (4z)^{-1} \text{sen}(2z)$ , nos pontos do contorno  $\gamma : |z| = 2$ . Calcule o valor de  $f''(0)$ .

17. OS ZEROS DE UMA FUNÇÃO ANALÍTICA Um ponto  $z_0$  denomina-se um zero de ordem  $m$  de uma função analítica  $f(z)$  quando:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Em torno de um zero de ordem  $m$  a série de Taylor de  $f(z)$  se reduz a:

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

- (a) Mostre que os zeros de uma função analítica, não identicamente nula, são pontos isolados. Na demonstração, expresse  $f(z)$  sob a forma

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

com  $g(z)$  analítica e  $g(z) \neq 0$ , em alguma vizinhança do ponto  $z_0$ .

- (b) Mostre que  $z_0$  é um zero de ordem  $m$  de  $f(z)$  se, e somente se,  $(z - z_0)^{-m} f(z)$  tem limite finito e diferente de zero, com  $z \rightarrow z_0$ .

- (c) Suponha que  $z_0$  seja o único zero de uma função analítica  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $\gamma$  é um contorno em  $D$ , simples, fechado e regular, envolvendo o ponto  $z_0$ , com orientação positiva, mostre que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

coincide com a ordem do zero em questão.

### 5.3 Resíduos & Pólos

1. Mostre que uma singularidade isolada  $z_0$  da função  $f(z)$  é removível se, e só se,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  existe e é finito.
2. Em cada caso, mostre que as singularidades da função  $f(z)$  é do tipo pólo; determine a ordem  $m$  do pólo e o valor do resíduo de  $f$ .

(a)  $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$    (b)  $f(z) = \tanh z$    (c)  $f(z) = \frac{1-\exp(2z)}{z^4}$    (d)  $f(z) = \frac{z}{\cos z}$ .

3. Classifique as singularidades da função  $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-i)}$  e mostre que  $\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; 2) = 0$ .
4. Se  $h(z)$  é analítica em  $z_0$  e  $h(z_0) \neq 0$ , mostre que a função  $g(z) = \frac{h(z)}{z-z_0}$ , tem um pólo simples em  $z_0$  e que  $\text{Res}(g, z_0) = h(z_0)$ . Comprove esse resultado com a função  $g(z) = (e^z - 2z + 2)/z$ .
5. Determine e classifique os pólos da função  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$ .
6. Em cada caso, determine e classifique as singularidades da função  $w = f(z)$ .

(a)  $w = z + \frac{1}{z}$    (b)  $w = \frac{1}{z(e^z-1)}$    (c)  $w = \text{sen}(1/z^2)$    (d)  $w = e^z + e^{1/z}$    (e)  $w = \frac{1}{(\text{Log } z)^2}$ .

7. Se  $z_0$  é um pólo de uma função  $f(z)$ , analítica no disco  $0 < |z - z_0| < R$ , mostre que  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ . Comprove esse resultado com a função  $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$ .
8. Calcule  $\text{Res}(f; 0)$ , em cada um dos seguintes casos:

(a)  $f(z) = \text{cosec}^2 z$    (b)  $f(z) = z^{-3} \text{cosec}(z^2)$    (c)  $f(z) = z \cos(1/z)$ .

9. Em cada caso, mostre que as singularidades da função  $f(z)$  são pólos e calcule o resíduo de  $f$  em cada um deles.

(a)  $f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z}$    (b)  $f(z) = \frac{z}{\cos z}$    (c)  $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}$ .

10. Calcule a integral  $\int_{\gamma} \frac{(3z^3+2) dz}{(z-1)(z^2+9)}$ , sabendo que:

(a)  $\gamma$  é o círculo  $|z-2| = 2$    (b)  $\gamma$  é o círculo  $|z| = 4$

11. Repita o exercício precedente para a integral  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z+4)}$  e os círculos:

(a)  $|z+2|=3$  (b)  $|z|=2$ .

12. O PRODUTO DE CAUCHY O Produto de Cauchy das séries

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

é a série  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n (z-z_0)^n$ , onde  $p_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Em cada ponto  $z$  do disco  $D_C(f) \cap D_C(g)$ , esse produto converge uniforme e absolutamente para  $f(z) \cdot g(z)$ . Quando  $g(z)$  não se anular em uma vizinhança de  $z_0$ , o quociente das séries de  $f$  e  $g$  é a série  $\sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n$ , determinada pela relação:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} q_n (z-z_0)^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \right).$$

Os dois primeiros coeficientes da série quociente são:  $q_0 = \frac{a_0}{b_0}$  e  $q_1 = \frac{a_1}{b_0} - \frac{a_0 b_1}{b_0^2}$ . Use o quociente de séries para encontrar os primeiros termos das séries de potências de  $z$  das seguintes funções:

(a)  $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$  (b)  $f(z) = \frac{z}{\sen z}$  (c)  $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$  (d)  $\frac{1}{z^2 \sinh z}$ .

13. UM ATALHO PARA O CÁLCULO DO RESÍDUO Suponha que  $p(z)$  e  $q(z)$  sejam analíticas em  $z_0$  e designe  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ .

(a) Mostre que as singularidades isoladas de  $f(z)$  são precisamente os zeros de  $q(z)$ .

(b) Se  $q(z_0) = 0$  e  $p(z_0)q'(z_0) \neq 0$ , mostre que  $z_0$  é um pólo simples de  $f(z)$  e que:

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

(c) Se  $q(z_0) = q'(z_0) = 0$  e  $p(z_0) \cdot q''(z_0) \neq 0$ , mostre que  $z_0$  é um pólo de ordem  $m = 2$  de  $f(z)$  e que:

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2p(z_0)q'''(z_0)}{3[q''(z_0)]^2}.$$

14. Com auxílio do Teorema dos Resíduos, calcule a integral  $\int_{|z|=1} f(z) dz$ , em cada caso.

(a)  $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2}$  (b)  $f(z) = \frac{\text{cosec } z}{z^2}$  (c)  $f(z) = ze^{1/z}$  (d)  $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ .

15. Repita o exercício precedente com as funções:

$$(a) f(z) = \frac{z+1}{4z^3 - z} \quad (b) f(z) = \frac{z}{1+9z^2} \quad (c) f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} \quad (d) f(z) = \frac{\sinh(\pi z)}{2z - i}.$$

16. Seja  $\gamma$  o círculo  $|z| = 2$ , percorrido no sentido positivo. Em cada caso, calcule  $\int_{\gamma} f(z) dz$ .

$$(a) f(z) = \tan z \quad (b) f(z) = \frac{1}{\sinh(2z)} \quad (c) f(z) = \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2 + 1)} \quad (d) f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}.$$

17. Se  $f(z)$  é analítica em  $|z - z_0| < R$  e  $z_0$  é um zero de ordem  $m$  de  $f$ , mostre que a função  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  tem um pólo de ordem  $m$  em  $z_0$ .

## 5.4 Calculando Integrais Reais

1. Cada integral imprópria dada a seguir é do tipo  $\int_0^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$  e o  $\text{gr}(p(x)) \geq 2 + \text{gr}(q(x))$ . Use resíduos para calcular cada uma delas.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6} \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad (e) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$

2. Ainda com auxílio de resíduos, calcule as integrais:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 2x + 2} \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

3. Calcule as integrais impróprias, envolvendo as funções  $\text{sen } x$  e  $\cos x$ .

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx) dx}{a^2 + x^2} \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(kx) dx}{a^2 + x^2} \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx \quad (d) \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$$

$$(e) \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(1+x^2)^2} \quad (f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \text{sen}(ax) dx}{4+x^2} \quad (g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x dx}{x^2 + 4x + 5} \quad (h) \int_0^{\infty} \frac{x \text{sen } x dx}{(1+x^2)(4+x^2)}$$

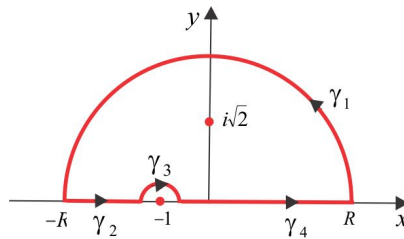
4. Calcule as integrais definidas.

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \text{sen } \theta} \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \quad (c) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \text{sen}^2 \theta}.$$

5. Integre  $\exp(-z^2)$  sobre o retângulo de vértices  $\pm a$  e  $\pm a+ib$  e, em seguida, faça  $a \rightarrow \infty$  para encontrar o valor de:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(bx) dx.$$

6. Use o contorno indicado na figura abaixo e calcule  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$ .



## RESPOSTAS & SUGESTÕES

### 5.1. SÉRIES NUMÉRICAS & SÉRIES DE POTÊNCIAS

- Trata-se de uma série geométrica divergente, já que a razão  $z = 1 + i$  é tal que  $|z| = \sqrt{2} > 1$ .
- O disco de convergência é  $|z + i| < \sqrt{5}$ .
- No ponto  $z = 2 - i$  a soma da série é:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2+i)^{k-1}} = 2 - 4i.$$

- Fazer em sala de aula.
- (a)  $R = 2$  (b)  $R = 1$  (c)  $R = 1$  (d)  $R = 1$  (e)  $R = 1$ .
- A soma da série é  $S = -1$ .

### 5.2. SÉRIES DE TAYLOR & SÉRIES DE LAURENT

- No domínio  $|z| > 1$ , temos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}}.$$



2. Expresse  $\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)}$  e use a série geométrica para chegar ao resultado.

3. Use a série geométrica, notando que:

$$(a) \frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{-1 + (z + 1)} \right] \quad e \quad (b) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{1}{1 - (z - 2)/2} \right].$$

4. Considerando que  $\cos z = -\text{sen}(z - \pi/2)$ , obtemos:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (z - \pi/2)^{2k+1}}{(2k + 1)!}.$$

Por outro lado,  $\text{senh } z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$  e daí resulta:

$$\text{senh } z = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^{2k+1}}{(2k + 1)!}.$$

5. O ponto de partida é a série geométrica, notando que:

$$\frac{1}{4z - z^2} = \left( \frac{1}{4z} \right) \left[ \frac{1}{1 - (z/2)} \right].$$

6. No disco  $0 < |z - 1| < 2$ , temos:

$$f(z) = \frac{-1}{2(z - 1)} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z - 1)^{k-1}}{2^{k-1}}.$$

No disco  $|z - i| < \sqrt{2}$ , temos

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i)^k}{(1 - i)^k}.$$

7. Por integração da série geométrica, encontramos:

$$\text{Log} \left( \frac{1 + z}{1 - z} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^k - 1] z^{k+1}}{k + 1}, \quad |z| < 1.$$

8. (a)  $\frac{e^{-z}}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k-3}}{k!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(b)  $\frac{e^{1/z^2}}{z^6} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k! z^{2k+6}}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(c)  $\frac{\cos(2z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

$$(d) \frac{1}{z^2(z-3)} = -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{3^{k+1}}, \quad 0 < |z| < 3.$$

9. Use as seguintes regras de derivação:

$$(a) \frac{1}{(1+z)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{1+z} \right) \quad e \quad (b) \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left( \frac{1}{1-z} \right).$$

10. A função  $\frac{\text{sen } z}{z}$  é representada pela série

$$\frac{\text{sen } z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}, \quad 0 < |z| < \infty, \quad (5.1)$$

e, considerando que  $f(0) = 1$ , a série em (5.1) representa a função  $f(z)$  em todo plano  $\mathbb{C}$ . Ocorre que uma série de potências representa, no seu disco de convergência, uma função analítica.

11. Notamos que:

$$(i) f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-2}, \quad 0 < |z| < 1.$$

$$(ii) f(z) = -\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-3}, \quad |z| > 1.$$

Ressaltamos que não há violação da unicidade de representação em série de Laurent, porque as representações acima ocorrem em domínios disjuntos.

$$12. (a) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1. \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k (z-1)^{-k}, \quad |z-1| > 1.$$

13. Fazer em sala de aula.

14. No disco de convergência da série de Taylor de  $f(z)$ , temos:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n,$$

onde  $a_n = \frac{f^{(n+k+1)}(z_0)}{(n+k+1)!}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Como  $g(z)$  é representada por uma série de Taylor, em torno de  $z_0$ , segue que  $g(z)$  é analítica em  $z_0$ . (compare com o Exercício 10)

15. A série de Maclaurin de  $g(z)$ , obtida a partir da série de  $\text{sen } z$ , vem dada por:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

onde vemos que as derivadas  $g^{(2k-1)}(0)$  e  $g^{(4k)}(0)$  são nulas, para  $k = 1, 2, 3, \dots$

16.  $f''(0) = -1/12$ .

**5.3. RESÍDUOS & PÓLOS**

1. As singularidades são os pontos que anulam o denominador de  $f(z)$ .

(a)  $z = 0$  e  $z = 2$  são pólos simples ( $m = 1$ ) de  $f(z)$ , com  $\text{Res}(f; 0) = 1/2$  e  $\text{Res}(f; 2) = 3/2$ .

(b)  $f(z)$  tem pólos simples nos pontos  $z_k = (k + 1/2)\pi i$ , com  $\text{Res}(f; z_k) = 1$ .

(c)  $z = 0$  é um pólo de ordem  $m = 3$ , com  $\text{Res}(f; 0) = -4/3$ .

(d)  $z_k = k\pi + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , são os pólos simples de  $f(z)$ ;  $\text{Res}(f; z_k) = (-1)^k (k\pi + \pi/2)$ .

2. A singularidade  $z = i$  é um pólo simples, com  $\text{Res}(f; i) = \frac{-1 + 7i}{25}$ . A singularidade  $z = 2$  é um pólo duplo, com  $\text{Res}(f; 2) = \frac{1 - 7i}{25}$ . Logo,  $\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; 2) = 0$ .

3. Que  $z_0$  é um pólo simples de  $g(z)$  decorre de

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)g(z)] = h(z_0) \neq 0.$$

Se  $h(z) = e^z - 2z + 2$ , então:

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} (e^z - 2z + 2) = 3.$$

4.  $z_1 = 0$  é um pólo simples e  $z_2 = 2$  é um pólo de ordem 5.

5. Nos casos (c) e (d), a função tem uma singularidade essencial em  $z = 0$ .

(a)  $f(z)$  tem um pólo simples em  $z = 0$ .

(b)  $f(z)$  tem um pólo de ordem  $m = 2$  em  $z = 0$  e tem pólos simples nos pontos  $z_k = 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{k}$ .

(c)  $f(z)$  tem um pólo de ordem  $m = 2$  em  $z = 1$ .

6. Admita que  $z_0$  seja um pólo de ordem  $m$  e use a série de Laurent de  $f(z)$ , sob a forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[ b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_2(z - z_0)^2 + b_1(z - z_0)^{m-1} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Agora, use a desigualdade  $|X + Y| \geq |X| - |Y|$ .

7. (a) 0 (b)  $1/6$  (c)  $-1/2$ .

8. x

9. (a)  $\pi i$  (b)  $6\pi i$ .

10. (a) 0 (b)  $\pi i/32$ .

11. Usando as séries já estabelecidas, encontramos:

(a)  $\frac{e^z}{\cos z} = 1 + z + z^2 + \frac{2}{3}z^3 + \dots$ .

(b)  $\frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{34}{6!}z^4 + \dots$ .

(c)  $\frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{12}z + \dots$ .

(d)  $\frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \dots$ .

12. Use o produto de Cauchy ou faça o cálculo direto usando a relação

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right),$$

para um pólo de ordem  $m$ .

13. (a)  $-2\pi i$  (b)  $\pi i/3$  (c)  $\pi i$ .

14. (a)  $3\pi i/2$  (b)  $2\pi i/9$  (c)  $-\pi i$  (d)  $\pi i$ .

15. (a)  $-4\pi i$  (b)  $-\pi i$  (c)  $4\pi i$  (d)  $-\pi i/3$ .

**5.4. CÁLCULO DE INTEGRAIS REAIS**

1. (a)  $\pi/6$  (b)  $\pi/6$  (c)  $\pi\sqrt{2}/4$  (d)  $\pi/4$ .

2. (a)  $\pi/5$  (b)

3. (a)  $\pi e^{-k/a}$  (b) 0 (c)  $\pi/2$  (d)  $\sqrt{\pi/8}$  (e)  $\pi/2e$  (f)  $\frac{\pi}{2}e^{-a} \operatorname{sen} a$  (g)  $-\frac{\pi}{e} \operatorname{sen} 2$ .

4. (a)  $2\pi/3$  (b)  $8\pi/\sqrt{3}$  (c)  $\pi\sqrt{2}$ .