## 4.1 Função Complexa de uma Variável Real

1. Calcule as seguintes integrais:

**(a)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{it}dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-wt}dt, \quad (\operatorname{Re} w > 0)$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{-int}dt, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$

2. Calcule as integrais trigonométricas:

**(a)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t \exp\left(it^2\right) dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(e^{it} + i \operatorname{sen} t\right) dt$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos\left(it\right) dt.$

---

## 4.2 Contornos

1. Represente as seguintes arcos sob a forma $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.

   **(a)** O segmento de reta de $z = 0$ a $z = 1 + 2i$.

   **(b)** O segmento de reta de $z = -2 + i$ a $z = -2 + 4i$.

   **(c)** A circunferência $|z - 2i| = 4$.

   **(d)** A circunferência de raio 5 e centro na origem

   **(e)** O arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

   **(f)** A elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

2. Em cada caso, identifique e esboce o gráfico do contorno $\gamma$ descrito por:

   **(a)** $\gamma : z(t) = 3i + 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

   **(b)** $\gamma : z(t) = t + 3t^2, \quad 1 \leq t \leq 2.$

   **(c)** $\gamma : z(t) = t + (2 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$

   **(d)** $\gamma : z(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1.$

**(e)** $\gamma : z(t) = 1 + 2i/t, \quad -\infty \leq t < 0.$

**(f)** $\gamma : z(t) = \sqrt{1-t^2} + it, \quad -1 \leq t \leq 1.$

3. Seja $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)\,,\ a \leq t \leq b$, um arco suave contido no domínio de uma função analítica $w = F(z)$. Mostre que
$$\frac{d}{dt}\left[F(z(t))\right] = F'(z(t))\, z'(t)\,.$$
Use o resultado para concluir que $\displaystyle\int_\gamma f'(z(t))\, z'(t)\, dt = f(z(b)) - f(z(a))\,.$

---

## 4.3 Função Complexa de uma Variável Complexa

1. Em cada caso, calcule $\displaystyle\int_\gamma 3z^2 dz$, onde $\gamma$ é:

**(a)** o segmento de $-i$ até $i$

**(b)** o arco $|z| = 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 0$

**(c)** o arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(3,9)\,.$

2. Calcule $\displaystyle\int_\gamma |z|\, dz$, onde $\gamma$ é o arco $|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \leq 0$. E se $\gamma$ fosse o segmento de $-i$ até $i$, qual seria o valor da intgral?

3. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\, dz$, onde $\gamma$ é o arco $z = \exp(i\theta)$, nos seguintes casos:

**(a)** $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ **(b)** $0 \leq \theta \leq 2\pi$ **(c)** $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

4. Calcule as seguintes integrais:

**(a)** $\displaystyle\int_\gamma \left[x^2 - y^2 + i\left(x^2 - y^2\right)\right] dz, \quad \gamma$ é o segmento de $3 + 2i$ até a origem.

**(b)** $\displaystyle\int_0^{2+i} \left(y - x^2\right) dz, \quad$ ao longo da poligonal constituida do eixo $y$ e da reta $y = 1$.

**(c)** $\displaystyle\int_{|z|=R} \operatorname{Log} z dz.$

**(d)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad$ ao longo do arco de circunferência $|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0.$

**(e)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz$, ao longo do arco $z = 2\exp(i\theta)$, $\pi \le \theta \le 2\pi$.

**(f)** $\displaystyle\int_{|z|=1} z^m (\overline{z})^n \, dz$.

**(g)** $\displaystyle\int_\gamma \exp(z)\, dz$, ao longo da poligonal de $\pi i$ até 1, sobre os eixos coordenados.

**(h)** $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cos z dz$.

**(i)** $\displaystyle\int_0^{\pi i} z\cos\left(z^2\right) dz$.

5. Dado $z = x + iy$, defina a função $w = f(z)$ por:

$$f(z) = \left| \begin{array}{ll} 4y, & \text{se } y > 0 \\ 1, & \text{se } y < 0. \end{array} \right.$$

Se $\gamma$ é o arco ao longo da curva $y = x^3$, de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$, calcule $\int_\gamma f(z)\, dz$.

6. Sem calcular a integral, mostre que:

**(a)** $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \le 1$, sendo $\gamma$ o segmento de $z = 1$ até $z = 1 + i$;

**(b)** $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\right| \le \frac{\pi}{3}$, sendo $\gamma$ o arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ até $z = 2i$.

7. Se a função $w = f(z)$ é contínua em $z = 0$, mostre que:

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi f(0).$$

8. Se $\gamma$ o triângulo de vértices $z = 0$, $z = 3i$ e $z = -4$, com orientação positiva, mostre que:

$$\left|\int_\gamma (\exp z - \overline{z})\, dz\right| \le 60.$$

9. Se $\gamma_R$ é o círculo $|z| = R$, $R > 1$, orientado no sentido positivo, mostre que:

**(a)** $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}dz\right| \le \frac{2\pi(\pi + \ln R)}{R}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2}dz = 0.$

10. Se $f(z)$ é contínua no círculo $\gamma_r : |z - z_0| = r$, mostre que:

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = ir\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta.$$

Use esse fato e deduza que:

**(a)** $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$ **(b)** $\displaystyle\int_{\gamma_r} (z-z_0)^{n-1}\,dz = 0,\ n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

---

## 4.4 Teoremas Clássicos & Consequências

1. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica e usando o Teorema de Cauchy-Goursat deduza que $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz = 0$ :

   **(a)** $w = \dfrac{z^2}{z-3}$ **(b)** $w = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$ **(c)** $w = \dfrac{z}{\exp z}$ **(d)** $w = z\,\mathrm{Log}\,(z+2i)$ **(e)** $w = \tan z$.

2. Seja $\mathcal{R}$ a região compreendida entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado de vértices $(\pm1, 0)$ e $(0, \pm1)$, com a fronteira $\partial\mathcal{R}$ orientada no sentido positivo. Em cada caso, explique por quê $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\,dz = 0$.

   **(a)** $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z+2}{\mathrm{sen}\,(z/2)}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{z}{1-\exp z}$.

3. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\,dz$, sendo $w = f(z)$ dada por:

   **(a)** $\dfrac{1}{z}$ **(b)** $\dfrac{1}{4+iz}$ **(c)** $\dfrac{\exp(2z)}{z+2i}$ **(d)** $\dfrac{\cos z}{z}$ **(e)** $\dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{2z-1}$ **(f)** $\dfrac{\cosh(3z)}{z}$.

4. Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4-1}dz$, sendo $\gamma$ o círculo $|z-i| = 1/2$.

5. Seja $\gamma$ o contorno $|z| = 3$, com orientação positiva, e defina a função

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{2\xi^2 - \xi - 2}{\xi - z}d\xi, \quad |z| \neq 3.$$

   Calcule os valores de $g(2)$ e $g(4i)$. Qual o valor de $g(z)$, para $|z| > 3$?

6. Seja $\gamma$ um contorno simples, fechado, regular e defina a função $g(z) = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{\xi^2 + 2\xi}{\xi - z}d\xi$. Quais os possíveis valores para $g(z)$? Note que $g$ não está definida nos pontos do contorno $\gamma$.

7. Seja $\mathcal{R}$ a região delimitada pelo quadrado de vértices $z = \pm2$ e $z = \pm2i$ e considere a fronteira $\partial\mathcal{R}$ com orientação positiva. Calcule $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\,dz$, sendo:

   **(a)** $f(z) = \dfrac{\exp(-z)}{2z - \pi i}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{2z+1}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{\tan(z/2)}{(z-z_0)^2}$, $|z_0| < 1/2$.

8. Seja $w = f(z)$ uma função analítica na região delimitada por um contorno simples fechado $\gamma$ e seja $z_0$ um ponto fora de $\gamma$. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

9. Seja $\gamma$ o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$. Se $\lambda$ é uma constante real, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\lambda z}\, dz}{z} = 2\pi i$ e usando o resultado conclua que $\displaystyle\int_0^\pi e^{\lambda \cos\theta} \cos(\lambda \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \pi$.

10. Seja $w = f(z)$ uma função analítica em um domínio limitado $D$ e suponha que $f$ seja contínua e não constante no compacto $\overline{D}$ e que $f(z) \neq 0$, em todo ponto $z$ de $\overline{D}$. Mostre que o valor mínimo de $|f(z)|$ não é atingido no interior de $\mathcal{R}$. A condição $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathcal{R}$, pode ser removida?

11. Ilustre o Exercício 10 no caso em que $f(z) = (z+1)^2$ e $\mathcal{R}$ é a região delimitada pelo triângulo de vértices $z = 0$, $z = 2$ e $z = i$.

12. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, nas condições do Exercício 10. Mostre que o valor máximo e o valor mínimo da função harmônica $u(x, y)$ é atingido em $\partial D$ e nunca em um ponto interior da região, a menos que $u$ seja constante. Ilustre a situação com os dados: $f(z) = e^z$ e $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \pi$.

13. Seja $w = f(z)$ uma função analítica e limitada no disco $|z - z_0| < r$. Se $0 < \delta < r$, mostre a desigualdade de Cauchy:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! \max|f(z)|}{\delta^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.1}$$

14. Usando (4.1), com $n = 2$, mostre que se $f$ for inteira e $|f(z)| \leq a|z|$, $\forall z$, então: $f \equiv 0$ ou existe $\lambda \neq 0$ tal que $f(z) = \lambda z$, $\forall z$.

15. Seja $w = f(z)$ uma função analítica no disco $|z| < 1$, no qual se tem $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1 - |z|}$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy no contorno $\gamma_n : |z| = \dfrac{n}{n+1}$, deduza que:

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

16. Calcule as seguintes integrais:

**(a)** $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2 + 3z - 1)\, dz}{(2z+3)^2}$ **(b)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}(z^2 + 2)\, dz}{(3z-2)^2}$ **(c)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + z + i)\, dz}{(4z - i)^3}$.

17. Suponha que a função $f(z) = \sqrt{z^2+4}$ seja determinada pela condição $f(0) = -2$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{4z^2+4z-3}$, sendo $\gamma$ o quadrado de vértices $z = \pm 1 \pm i$.

18. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função inteira e suponha que $u(x,y)$ seja limitada em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $u(x,y)$ é constante.

19. Se $\gamma$ é o contorno $|z-i| = 2$, com orientação positiva, calcule o valor de $\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz$, sendo:

    **(a)** $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ **(b)** $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

## RESPOSTAS & SUGESTÕES

### 4.1. INTEGRANDO FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL

1. Usando primitivas, obtemos:

    **(a)** $-\sqrt{2}/2 + \left(1 - \sqrt{2}/2\right) i$.

    **(b)** $1/w$.

    **(c)** A integral é igual a $2\pi$, se $m = n$, e igual a 0, caso contrário.

2. **(a)** $i$ **(b)** $2 + 2i$ **(c)** $\frac{1}{2}\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right)$.

3. $I = 2 + 3i$.

### 4.2. CONTORNOS

1. Usando a parametrização canônica.

    **(a)** $z(t) = t + 2it, \quad 0 \le t \le 1$.

    **(b)** $z(t) = -2 + it, \quad 1 \le t \le 4$.

    **(c)** $z(t) = 4\cos t + (2 + 4\,\mathrm{sen}\,t)\,i, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

    **(d)** $z(t) = 5\cos t + 5i\,\mathrm{sen}\,t, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

**(e)** $z(t) = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 3.$

**(f)** $z(t) = 3\cos t + i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. Em construção

3. Se $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[F(z(t))] &= \frac{d}{dt}[u(x(t), y(t))] + i\frac{d}{dt}[v(x(t), y(t))] \\
&= u_x x' + u_y y' + i\left(v_x x' + v_y y'\right) \\
&= (u_x + iv_x) x' + i(v_y - iu_y) y' \\
&= f'(z(t))\left(x' + iy'\right) = F'(z(t)) z'(t).
\end{aligned}$$

## 4.3. INTEGRANDO FUNÇÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA

1. **(a)** $-2i$ **(b)** $-2i$ **(c)** $27(1+i)^3$.

2. Ao longo arco $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$, a integral é $-2i$ e ao longo do segmento de $-i$ até $i$ a integral é igual a $i$.

3. **(a)** $2\sqrt{2}i/3$ **(b)** $-4/3$ **(c)** $4i/3$.

4. Em alguns caso, pode-se usar primitivas.

**(a)** $\frac{5}{3}(1 + 5i)$.

**(b)** $-\frac{2}{3} + \frac{i}{2}$.

**(c)** $0$.

**(d)** $2 - 2i$.

**(e)** $4 - 2\pi i$

**(f)** A integral vale $2\pi i$, se $m = n - 1$ e vale zero, caso contrário.

**(g)** $1 + e$.

**(h)** $0$.

**(i)** $-\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\pi^2\right)$.

5. $I = 2 + 3i$.

6. **(a)** No arco $\gamma$, temos que $|1/z| \leq 1$ e, portanto:

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{z} \right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|} \leq \int_\gamma |dz| = 1.$$

**(b)** No arco $\gamma$, temos $\left|1 + z^2\right| \geq |z|^2 - 1 = 3$. Logo,

$$\left| \int_\gamma \frac{dz}{1 + z^2} \right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|1 + z^2|} \leq \frac{1}{3} \int_\gamma |dz| = \frac{1}{3} L(\gamma) = \frac{\pi}{3}.$$

7. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$, tal que $\left|f\left(re^{i\theta}\right) - f(0)\right| < \varepsilon$, $\forall \theta$ e $0 < r < \delta$. Assim,

$$\left| \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta - 2\pi f(0) \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) - f(0) \right| d\theta < 2\pi\varepsilon.$$

8. No triângulo $\gamma$, temos $x = \operatorname{Re}(z) \leq 0$, de modo que $e^x \leq 1$ e $|\overline{z}| = |z| \leq 4$. Assim:

$$\left| \int_\gamma (e^z - \overline{z})\, dz \right| \leq \int_\gamma (e^x + |\overline{z}|)\, |dz| \leq \int_\gamma (1 + 4)\, |dz| = 5 \cdot L(\gamma) = 60.$$

9. **(a)** No contorno $\gamma_R : z = R \exp(i\theta)\,,\ -\pi < \theta \leq \pi$, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz \right| &\leq \int_{\gamma_R} \frac{|\log z|\, |dz|}{R^2} \leq \frac{1}{R^2} \int_{\gamma_R} |\ln R + i\theta|\, |dz| \leq \frac{1}{R^2} \int_{\gamma_R} (\ln R + |\theta|)\, |dz| \\ &= \frac{1}{R^2} (\ln R + \pi) \int_{\gamma_R} |dz| = \frac{2\pi}{R} (\ln R + \pi)\,. \end{aligned}$$

**(b)** Segue de **(a)**, com $R \to \infty$.

## 4.4. TEOREMAS CLÁSSICOS & CONSEQUÊNCIAS

1. Se uma função $w = f(z)$ é analítica em uma região delimitada por um contorno $\gamma$, simples, fechado e suave (curva de Jordan), então $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$. Em cada caso, representamos por $\mathcal{R}$ a região onde $f(z)$ é analítica.

**(a)** $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 3\}\,.$

**(b)** $\mathcal{R} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 \pm i\sqrt{2}\right\}.$

**(c)** $\mathcal{R} = \mathbb{C}$. (a função $f(z)$ é inteira.)

**(d)** $\mathcal{R} = \mathbb{C} \backslash E$. (a função $f(z)$ é analítica fora do semi-eixo $E = [x \leq 0 \text{ e } y = -2]$.)

**(e)** $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi + \pi/2\}$.

2. As singularidades da função estão fora da região $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.

3. Nos casos (a), (d), (e) e (f) o resultado segue da Fórmula Integral de Cauchy. Em (b) e (c) a integral é 0, pelo Teorema de Cauchy-Goursat.

   **(a)** $2\pi i$ (d) $2\pi i$ (e) $\pi i (\sqrt{e} - 1)$ (f) $2\pi i$.

4. Fatorando o polinômio $z^4 - 1$ e considerando $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 + iz^2 - z - i}$ encontramos:

$$\int_\gamma \frac{z^2 dz}{z^4 - 1} = \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{z - i} == 2\pi i f(i) = 8\pi.$$

5. Temos que $g(2) = 8\pi i$ e se $|z| > 3$, então $g(z) = 0$.

6. $g(z) = 0$ ou $g(z) = \pm 2\pi i \left(z^2 + 2z\right)$.

7. (a) $\pi$ (b) $-\pi i/2$ (c) $\pi i \sec^2(z_0/2)$

8. Resolva por etapas, observando a posição do ponto $z_0$ em relação à região $\mathcal{R}$ delimitada por $\gamma$.

   **(i)** Se o ponto $z_0$ for exterior à região $\mathcal{R}$, então os integrandos são analíticos e as integrais serão nulas.

   **(ii)** Se o ponto $z_0$ é interior á região, segue da Fórmula integral de Cauchy que as duas intgerais valem $2\pi i f'(z_0)$.

9. Diretamente da Fórmula Integral de Cauchy, com $f(z) = \exp(\lambda z)$, encontramos:

$$\int_\gamma \frac{\exp(\lambda z)}{z} = 2\pi i.$$

10. Aplique o princípio do Módulo Máximo à função analítica $g(z) = [f(z)]^{-1}$. O máximo de $|g(z)|$ é o mínimo de $|f(z)|$. A condição $f(z) \neq 0$, $\forall z$, não pode ser removida, como fica evidente considerando a função $f(z) = z$, no disco $|z| \leq 1$, para a qual $|f(z)|$ atinge seu valor mínimo na origem.

11. Temos $|f(z)|^2 = (x+1)^2 + y^2$ e o valor máximo de $|f(z)|$ é $M = 4$, atingido nos pontos $z = 1$ e $z = i$ da fronteira de $\mathcal{R}$.

12. Note que $u(x,y) = e^x \cos y$ não tem pontos críticos no interior da região $\mathcal{R}$, de modo que os extremos são atingidos em pontos da fronteira da região.

13. Consequência direta da Fórmula Integral de Cauchy.

14. x

15. Sobre o contorno $\gamma_n$ temos $\dfrac{1}{1-|z|} = n+1$ e da Fórmula Integral de Cauchy, resulta:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} &= \left|\int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \leq \int_{\gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \int_{\gamma_n} \frac{|dz|}{1-|z|} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}(n+1)L(\gamma_n) = 2\pi(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

16. (a) 0 (b) $4\pi i/33$ (c) $\pi i/32$.

17. É fundamental a escolha do ramo de $\operatorname{Log} z$, para podermos aplicar a Fórmula Integral de Cauchy. Após a fatoração do denominador, encontramos:

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{z^2+4}\,dz}{4(z+3/2)(z-1/2)} = 2\pi i\left[\frac{\sqrt{z^2+4}}{4(z+3/2)}\right]_{z=1/2} = \sqrt{17}\pi i/8.$$

18. Se $u(x,y)$ é limitada, então a função $g(z) = \exp[f(z)]$ é inteira e limitada, já que $|g(z)| = \exp[u(x,y)]$. Segue do Teorema de Liouville que $g(z)$, e, portanto, $u(x,y)$, é constante.

19. **(a)** $\pi/2$ **(b)** $\pi/16$.