



## 2.1 Exemplos de Funções Complexas

1. Sabendo que  $f(z) = 3z^2 + z$ , calcule  $f(2+i)$  e  $f(3i)$ .
2. Se  $z = x + iy$ , como se expressa a função  $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$  em termos de  $z$ ?
3. Considerando  $z = x + iy$ , determine o domínio máximo das seguintes funções:

$$(a) f(z) = \frac{z}{(z-i)\operatorname{sen} y} \quad (b) f(z) = \frac{z^2 + (z-i)^3}{(e^{iy} - 1)\cos y} \quad (c) f(z) = \frac{y}{x} + \frac{i}{1-y}.$$

4. Determine a parte real e a parte imaginária de  $w = f(z)$ .

$$(a) w = 2z^2 - 3z \quad (b) w = |z| + z\operatorname{Re}(z) \quad (c) w = \frac{1}{1-z} \quad (d) w = \frac{\operatorname{Im}(z)}{z^2 - i}.$$

5. Em cada caso, esboce o domínio  $D$  da função  $w = f(z)$ .

$$(a) w = z^2 + 1; \quad D: |z| \leq 2 \quad (b) w = 3z; \quad D: |\arg(z)| < \pi/2 \quad (c) w = z^2; \quad D: |z| > 3$$

$$(d) w = \frac{1}{z}; \quad D: \operatorname{Re}(z) \geq 1 \quad (e) w = \frac{1}{z^2}; \quad D: |z| > 1 \quad (f) w = |z| - \frac{iy^2}{\operatorname{Im}(z)}; \quad D: \operatorname{Im}(z) > 1.$$

6. Em cada caso, identifique a imagem do conjunto  $S$  pela função  $w = f(z)$ .

$$(a) w = 3z; \quad S: |\arg(z)| < \pi/2 \quad (b) w = z^2; \quad S: |z| > 3$$

$$(c) w = \frac{1}{z^2}; \quad S: |z| > 1 \text{ e } |\arg z| \leq \pi/4 \quad (d) w = \frac{1}{z}; \quad S: \operatorname{Re}(z) > 0.$$

7. Qual a imagem da faixa horizontal  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$  pela função  $w = e^x \cdot e^{iy}$ ? E se  $S$  fosse o retângulo

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$$

qual seria a imagem  $w(S)$ ?

8. Identifique a imagem do conjunto  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1, 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\}$  pela função  $w = z + 1/z$ .
-

## 2.2 Limite & Continuidade

1. Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ , mostre que  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$ .
2. Usando a definição, prove que a função  $f(z) = z^2$  é contínua.
3. Usando a definição de limite, prove que:

(a)  $\lim_{z \rightarrow 2i} (2x + iy^2) = 4i$ .

(b)  $\lim_{z \rightarrow i} (z^2 + 1) = 0$ .

(c)  $\lim_{z \rightarrow z_0} (\operatorname{Re}(z) + |z|) = \operatorname{Re}(z_0) + |z_0|$ .

(d)  $\lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$ .

(e)  $\lim_{z \rightarrow z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$ .

(f)  $\lim_{z \rightarrow i} (z^3 - i) = -2i$ .

4. Usando as propriedades básicas do limite, verifique que:

(a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2} = -1$    (b)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} = -3$    (c)  $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = -12$ .

5. Suponha que  $g(z)$  seja uma função limitada, isto é, que exista uma constante  $M > 0$ , tal que  $|g(z)| \leq M$ ,  $\forall z \in D(g)$ . Se  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ , mostre que  $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = 0$ . Note que não é necessário a função  $g$  ter limite em  $z_0$ .
6. Se  $f(z) = 1/z$ ,  $z \neq 0$ , calcule o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z_0 \neq 0.$$

7. Verifique se a função  $f(z) = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$ , definida para  $z \neq z_0$ , tem limite quando  $z \rightarrow z_0$ .

8. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}.$$

9. Verifique se a função

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2 + 4}{z - 2i}$$

tem limite quando  $z \rightarrow 2i$ .

10. Mostre que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  se, e somente se,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0$ , seja qual for a sequência  $(z_n)$  no domínio de  $f(z)$ , com  $z_n \rightarrow z_0$ .

11. Estude a continuidade, no ponto  $z = 0$ , da função  $w = f(z)$ , sendo  $f(0) = 0$  e, para  $z \neq 0$ :

(a)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$    (b)  $f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1+|z|}$    (c)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)^2}{|z|}$    (d)  $f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z^2|}$ .

### 2.3 Derivação no Plano $\mathbb{C}$

1. Mostre que a função  $f(z) = |z + i|^2$  é derivável apenas no ponto  $z = -i$ .

2. Em cada caso, mostre que a função  $w = f(z)$  não é derivável em ponto algum do plano  $\mathbb{C}$ .

(a)  $f(z) = \operatorname{Im}(z)$    (b)  $f(z) = e^x (\cos y - i \operatorname{sen} y)$    (c)  $f(z) = z - \bar{z}$

3. Em cada caso, calcule  $f''(z)$ , sendo:

(a)  $f(z) = iz + 2$    (b)  $f(z) = e^{-x} (\cos y - i \operatorname{sen} y)$    (c)  $f(z) = z^3$

4. Determine, onde existir, a derivada da função  $f(z)$ .

(a)  $f(z) = \frac{1}{z}$    (b)  $f(z) = x^2 + iy^2$    (c)  $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$    (d)  $f(z) = z^2 + 1$    (e)  $f(z) = \frac{z}{z-1}$

5. Para a função  $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$ , mostre que  $u_x + iv_x = 3x^2$ . Por que  $3x^2$  representa a derivada dessa função apenas em  $z = i$ ?

6. Mostre que a função  $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$  é derivável apenas na origem e calcule  $f'(0)$ .

7. Mostre que as funções  $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$  e  $g(z) = (z^2 - z) e^{-x} e^{-iy}$  são inteiras.

8. Mostre que as funções  $f(z) = e^y e^{ix}$  e  $g(z) = xy + iy$  não são analíticas em ponto algum.

9. Se uma função complexa  $w = f(z)$  é analítica em uma vizinhança de um ponto  $z_0$ , exceto em  $z_0$ , o ponto  $z_0$  recebe o nome de *singularidade* ou *ponto singular* da função  $f$ .

(a) Um polinômio  $P(z)$  não tem ponto singular, por ser uma função inteira.

(b) As singularidades de uma função racional  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  são as raízes do polinômio  $Q(z)$ .

(c) A função  $f(z) = \bar{z}$  não tem singularidade, porque não é analítica em ponto algum.

Determine, caso exista alguma, as singularidades das seguintes funções:

$$(a) f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)} \quad (b) g(z) = \frac{z^3+i}{z^2-3z+2} \quad (c) h(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} - i \operatorname{Im}(z) \quad (d) f(z) = z \operatorname{Re}(z)$$

10. Calcule a derivada e as singularidades da função  $f(z) = \frac{1}{z(z-i)(z^2+i)}$ .

11. Dado  $z = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , designe  $F(z) = \ln r + i\theta$ . Mostre que a função  $F$  assim definida é analítica no domínio indicado e  $F'(z) = 1/z$ .

12. Se  $f(z) = z^2$  e  $k$  é uma constante real, verifique que as curvas  $u(x, y) = k$  e  $v(x, y) = k$ , onde  $u = \operatorname{Re}[f(z)]$  e  $v = \operatorname{Im}[f(z)]$ , são ortogonais. Idem para a função  $g(z) = 1/z$ .

13. Seja  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  uma função analítica em um domínio<sup>1</sup>  $D$  que não contém a origem. Use as equações de Cauchy-Riemann para provar que as funções  $u$  e  $v$  satisfazem à equação de Laplace:

$$r^2 \Phi_{rr} + r \Phi_r + \Phi_{\theta\theta} = 0.$$

14. Se as funções  $f(z)$  e  $\overline{f(z)}$  são analíticas em um domínio  $D$ , mostre que  $f$  é constante.

15. Suponha que uma função  $f(z)$  seja analítica em um domínio  $D$ . Mostre que  $f$  é constante em  $D$  se, e somente se,  $|f(z)|$  é constante. E se  $\operatorname{Re}[f(z)]$  for constante?

16. Determine onde a função  $w = f(z)$  é analítica:

$$(a) f(z) = z^3 + z \quad (b) f(z) = (1-z)^{-1} \quad (c) f(z) = z^{-2} \quad (d) f(z) = \arg(z).$$

17. Verifique que a função  $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$  é inteira e calcule  $f'(a+ib)$ .

18. Se uma função  $w = f(z)$  é holomorfa em um domínio  $D$  e  $f'(z) = 0$ ,  $\forall z \in D$ , mostre que  $f$  é constante em  $D$ .

19. Se  $f(z)$  é uma função inteira, mostre que  $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$  também é uma função inteira.

20. Se  $f(z)$  é analítica em  $z = 0$  e  $h(z) = \overline{f(z)}$ , mostre que  $h(z)$  é derivável em  $z = 0$  se, e só se,  $f'(0) = 0$ .

---

<sup>1</sup>Por *domínio* entende-se um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  aberto e conexo.

21. Mostre que a função  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  satisfaz às equações de Cauchy-Riemann em  $z = 0$  e, contudo, não é derivável, e muito menos analítica, em  $z = 0$ .
22. Se  $f = u + iv$  é uma função holomorfa em  $z_0$  e  $\theta$  representa o ângulo de uma direção  $\vec{\eta}$  com o eixo positivo dos  $x$ , mostre que:

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} \right).$$

23. Se  $f$  e  $g$  são funções deriváveis em  $z_0$ , com  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  e  $g'(z_0) \neq 0$ , mostre que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Use o resultado e calcule  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$ .

## 2.4 Funções Harmônicas

- Mostre que a função  $u(x, y) = x^2 - y^2$  é harmônica em todo  $\mathbb{C}$  e construa uma função analítica  $w = f(z)$ , tal que  $\text{Re}[f(z)] = u(x, y)$ .
- Mostre que  $u = x - 5xy$  é harmônica em todo plano, determine sua conjugada  $v(x, y)$  e expresse  $f = u + iv$  em termos de  $z = x + iy$ .
- Repita o exercício precedente com a função  $u(x, y) = e^x \cos y$ .
- Mostre que a função  $v(x, y) = -\sin x \sinh y$  é harmônica e construa uma função analítica  $f(z)$ , com  $v(x, y) = \text{Im}[f(z)]$ .
- Repita o exercício precedente com a função  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ .
- Mostre que a forma mais geral dos polinômios do terceiro grau, homogêneos e harmônicos é

$$u(x, y) = ax^3 - 3bx^2y - 3axy^2 + by^3.$$

Determine a harmônica conjugada  $v(x, y)$  e a função inteira correspondente  $f(z) = u + iv$ .

- Se  $f(z)$  é uma função de classe  $C^2$  em um domínio  $D$ , mostre que

$$\Delta \left( |f(z)|^2 \right) = 4 |f'(z)|^2, \quad \text{nos pontos de } D.$$

**2.1. EXEMPLOS DE FUNÇÕES COMPLEXAS**

1.  $f(2+i) = 11 + 13i$  e  $f(3i) = -27 + 3i$ .
2. Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2ix - 2xy \\ &= (x - iy)^2 + 2i(x + iy) = \bar{z}^2 + 2iz. \end{aligned}$$

3. Sendo  $z = x + iy$ , temos:

(a)  $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : z \neq i \text{ e } z \neq k\pi i\}$ .

(b)  $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \text{Im}(z) \neq k\pi + \pi/2 \text{ e } \text{Im}(z) \neq 2k\pi\}$ .

(c)  $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \text{Re}(z) \neq 0 \text{ e } \text{Im}(z) \neq 1\}$ .

4. Considerando  $u(x, y) = \text{Re}[f(z)]$  e  $v(x, y) = \text{Im}[f(z)]$ , com  $z = x + iy$ , temos:

(a)  $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x$  e  $v(x, y) = 2xy - 3y$ .

(b)  $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2$  e  $v(x, y) = xy$ .

(c)  $u(x, y) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2}$  e  $v(x, y) = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2}$ .

(d)  $u(x, y) = \frac{x^2y - y^3}{x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 4xy + 1}$  e  $v(x, y) = \frac{1 - 2xy}{x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 4xy + 1}$ .

5. Figuras em Construção

6. Figuras em Construção

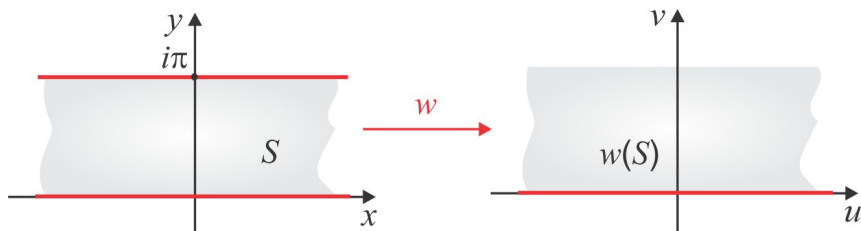
7. As partes real e imaginária da função  $w = f(x + iy) = e^x \cdot e^{iy}$  são, respectivamente:

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x, y) = e^x \sin y,$$

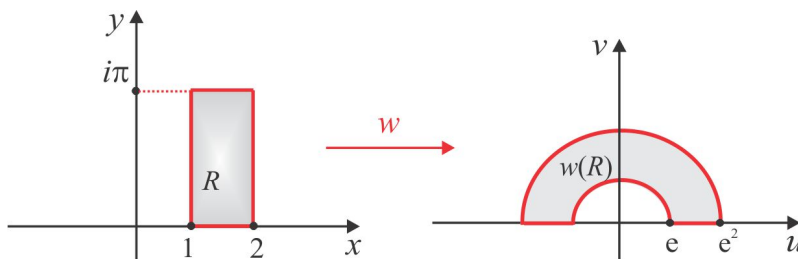
de modo que  $u^2 + v^2 = e^{2x}$  (circunferência de centro  $z_0 = 0$  e raio  $r = e^x$ ). É oportuno ressaltar que  $y$  é, ao mesmo tempo, a parte imaginária de  $z$  e o argumento de  $w$ . No caso da faixa horizontal  $S$ , vemos que:

$$|w| = e^x \rightarrow +\infty, \quad \text{com } x \rightarrow \infty, \quad \text{e} \quad 0 \leq \text{Arg}(w) \leq \pi.$$

e a imagem  $w(S)$  é o semiplano  $v \geq 0$ .



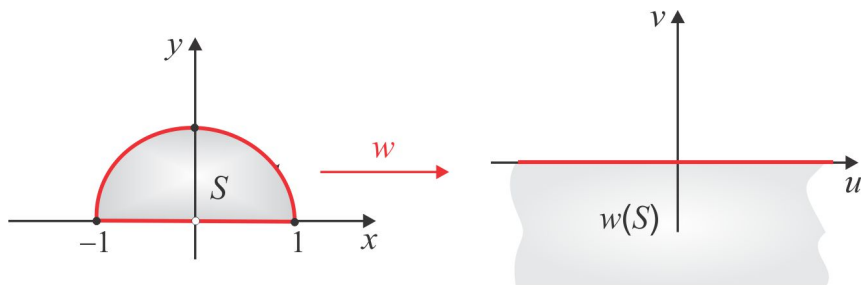
No caso do retângulo  $R$ , a imagem está ilustrada na figura abaixo.



8. Olhando as componentes  $u(x, y) = \text{Re}(w)$  e  $v(x, y) = \text{Im}(w)$  ao longo do eixo real e imaginário, respectivamente, vemos que:

$$u(x, 0) = x \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{e} \quad v(0, y) = \text{Im}(w) = y \left( 1 - \frac{1}{y^2} \right)$$

de onde resulta  $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = \pm\infty$  e  $v(0, y) \leq 0$ , com  $\lim_{y \rightarrow 0^+} v(0, y) = -\infty$ . A imagem  $w(S)$  é o semiplano inferior  $v \leq 0$ .



**2.2. LIMITE & CONTINUIDADE**

1. Use a definição de limite e a desigualdade  $||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$ .

2. É suficiente provar que  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$ , seja qual for o ponto  $z_0$  do plano  $\mathbb{C}$ . Seja, então,  $\varepsilon > 0$  dado e determinemos  $\delta > 0$ , tal que:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

O raio  $\delta$  procurado pode depender do  $\varepsilon$  dado e do ponto  $z_0$  e, considerando  $\delta < 1$ , teremos:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| < \delta + |z_0| < 1 + |z_0|.$$

Assim, se  $|z - z_0| < \delta$ , então:

$$|z^2 - z_0^2| = |z + z_0| |z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot |z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot \delta$$

Para concluir, basta escolher o raio  $\delta$  de modo que:

$$\delta < \min \{1, \varepsilon / (1 + |z_0|)\}.$$

3. Comprovar limite pela definição torna-se uma **caçada ao  $\delta$** . Para que se tenha  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ , procuramos, a partir de um  $\varepsilon > 0$  dado, um  $\delta > 0$ , tal que:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

(a) Se  $f(z) = z^3 - i$ , então:

$$|f(z) + 2i| = |z^3 + i| = |(z - i) \cdot (z^2 + iz - 1)| \leq |z - i| |z| |z + i| + |z - i|. \quad (2.1)$$

Considerando  $\delta < 1$ , então  $|z - i| < \delta$  acarreta:

$$|z| < |z - i| + 1 < 2 \quad \text{e} \quad |z + i| < |z - i| + 2 < 3$$

e de (2.1) chegamos a:

$$|f(z) + 2i| < 7|z - i| < 7\delta$$

e para concluir, basta escolher  $\delta < \min \{1, 7/\varepsilon\}$ .

(b) Se  $\delta < 1$ , temos:

$$|z^2 + 1| = |z - i| |z + i| < 3\delta, \quad \text{se } |z - i| < \delta$$

e dado  $\varepsilon > 0$ , escolhamos  $\delta < \min \{1, \varepsilon/3\}$  para concluir que  $|z - i| < \delta \Rightarrow |z^2 + 1| < \varepsilon$ .



(c) Supondo  $|z - z_0| < \delta$  e considerando  $\delta < 1$ , temos

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z) + |z|| &= |\operatorname{Re}(z - z_0) + \operatorname{Re}(z_0) + |z - z_0 + z_0|| \\ &\leq |\operatorname{Re}(z - z_0)| + |\operatorname{Re}(z_0)| + |z - z_0| + |z_0| \\ &\leq |z - z_0| + 2|z_0| < 1 + 2|z_0|. \end{aligned}$$

Escolha  $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|z_0|)\}$ .

(d) Se  $z_0 = 1 - i$ ,  $w_0 = 1 + i$  e  $f(z) = x + i(2x + y)$ , então:

$$|f(z) - w_0| = |z - z_0 + 2i \operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0| + 2|\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq 3|z - z_0|$$

e para concluir, seja  $\delta = \varepsilon/3$ .

(e) Temos

$$\left|(\bar{z})^2 - (\bar{z}_0)^2\right| = |z - z_0| |z + z_0|$$

e considerando  $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|z_0|)\}$  comprovamos a definição.

4. Em alguns casos, o resultado é obtido por substituição direta; em outros é necessário fatoração.

(a)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{i^2} = -1.$

(b)  $\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{i(z - i)(z^2 + iz - 1)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} i(z^2 + iz - 1) = -3.$

(c) Usando a fatoração do Exercício ?? do Capítulo 1, temos:

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)}{z + 2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z^2 - 2iz - 4) = -12.$$

5. Um cálculo direto nos dá:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{-1}{z \cdot z_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

No caso em que  $f(z) = z^n$ , usamos a identidade (??) e chegamos a:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = nz_0^{n-1}.$$

6. O limite não existe, tendo em vista que:

(i) sobre a trajetória  $\gamma_1 : \operatorname{Re}(z) = x_0$  o valor do limite é  $-1$ .

(ii) sobre a trajetória  $\gamma_2 : \text{Im}(z) = y_0$  o valor do limite é 1.

7. Se  $w = (1 + z)^{1/4}$  então  $z = w^4 - 1$  e, portanto:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + z)^{1/4} - 1}{z} = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w - 1}{w^4 - 1} = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{(w - i)(w + i)(w + 1)} = \frac{1}{4}.$$

8. Considere as trajetórias  $\gamma_1 : \text{Re}(z) = 0$  e  $\gamma_2 : \text{Im}(z) = 2$ , ao longo das quais o limite tem valores  $4i$  e  $-4i$ , respectivamente. Daí conclui-se que o limite não existe.

9. A função  $f(z)$  será contínua em  $z = 0$  quando  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ . Sejam  $u(x, y) = \text{Re}[f(z)]$  e  $v(x, y) = \text{Im}[f(z)]$ , sendo  $z = x + iy$ .

(a)  $u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  não tem limite em  $(0, 0)$  e  $f(z)$  é descontínua em  $z = 0$ .

(b) Neste caso,  $u(x, y) \equiv 0$  e, na forma polar,  $v(x, y) = \frac{r \sin \theta}{1 + r} \rightarrow 0$ , com  $r \rightarrow 0$ . A função é contínua em  $z = 0$ .

(c) Temos  $u(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$ , com  $z \rightarrow 0$ , e  $v(x, y) \equiv 0$ . Assim,  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$  e a função é contínua em  $z = 0$ .

(d) A componente  $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  não tem limite em  $(0, 0)$  e a função é descontínua em  $z = 0$ .

10. Suponha que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  e seja  $(z_n)$  uma sequência no domínio de  $f$ , convergindo para  $z_0$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , existem  $\delta > 0$  e um número natural  $n_0$ , tais que:

$$\left| \begin{array}{l} \text{(i)} \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{se } z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ \text{(i)} \quad |z_n - z_0| < \delta, \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n \geq n_0. \end{array} \right.$$

e daí resulta que  $|f(z_n) - w_0| < \varepsilon$ , se  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq n_0$ . Isto nos diz que  $\lim f(z_n) = w_0$ . A recíproca é provada por contradição. Supondo que  $f(z)$  não tenha limite  $w_0$ , com  $z \rightarrow z_0$ , existe um raio  $\varepsilon_0 > 0$  e para cada índice  $n$  escolhemos um número complexo  $z_n$  no domínio de  $f$ , tal que:

$$|z_n - z_0| < 1/n \quad \text{e} \quad |f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon_0.$$

Dessa forma, construímos uma sequência  $(z_n)$  no domínio de  $f$ , convergindo para  $z_0$ , sem que  $f(z_n)$  convirja para  $w_0$ , contradizendo a hipótese.

11. São contínuas as funções em (b) e (c).

**2.3. DERIVAÇÃO NO PLANO  $\mathbb{C}$**

1. Temos  $f(x + iy) = x^2 + (y + 1)^2$  e as componentes de  $f(z)$  são:

$$u(x, y) = x^2 + (y + 1)^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) \equiv 0.$$

(a) O conjunto imagem de  $w = f(z)$  é:

$$\mathcal{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \text{ e } \text{Re}(z) \geq 0\}.$$

(b) No ponto  $z_0 = -i$ , temos:

$$f'(-i) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(-i + \Delta z) - f(-i)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{(\Delta z)} = 0.$$

2. Basta comprovar que o sistema de Cauchy-Riemann não é satisfeito em ponto algum do plano  $\mathbb{C}$ .

(a) Temos  $u(x, y) = y$ ,  $v(x, y) = 0$  e, portanto,  $u_y \neq -v_x$  em todo ponto  $z$ .

(b) Temos  $u(x, y) = e^x \cos y$  e  $v(x, y) = -e^x \sin y$  e o sistema é, neste caso:

$$\left| \begin{array}{l} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \sin y = e^x \sin y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \cos y = -\cos y \\ -\sin y = \sin y \end{array} \right. \Leftrightarrow \cos y = 0 \quad \text{e} \quad \sin y = 0.$$

um tal  $y$  não existe!

(c) Neste caso,  $u(x, y) \equiv 0$  e  $v(x, y) = 2y$ . A equação  $u_x = v_y$  não é satisfeita em ponto algum.

3. O cálculo pode ser feito via regras de derivação ou com a fórmula (??).

(a)  $f(z) = iz + 2 \Rightarrow f''(z) = 0$ .

(b)  $f(z) = \exp(-z) \Rightarrow f''(z) = \exp(-z)$ .

Para usar a fórmula (??), notamos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = U + iV \Rightarrow f''(z) = U_x + iV_x = u_{xx} + iv_{xx} \quad \text{ou} \\ f''(z) &= V_y - iU_y = v_{xy} - iu_{xy}. \end{aligned}$$

(c)  $f(z) = z^3 \Rightarrow f''(z) = 6z$ .

4. Usando regras de derivação ou a fórmula (??), temos:

(a) Se  $z \neq 0$ , então  $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$ .

(b) A derivada existe nos pontos da reta  $S : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$  e é dada por:  $f'(z) = 2x + 2iy$ .

(c) As componentes de  $f(z)$  são as funções  $u = xy$  e  $v = y^2$ , de classe  $C^\infty$ , e o sistema de Cauchy-Riemann é atendido apenas em  $z = 0$ . Temos  $f'(0) = 0$ .

(d)  $f'(z) = 2z, \quad z \in \mathbb{C}$ . (função inteira)

(e) Se  $z \neq 1$ , então  $f'(z) = \frac{-1}{(z-1)^2}$ .

5. As componentes  $u = x^3$  e  $v = -(y-1)^3$  são de classe  $C^1$  em todo plano  $\mathbb{C}$ , mas, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em  $z = i$  e neste ponto temos  $f'(i) = 3x^2$ .

6. Temos  $f(z) = x^2 + ixy$  e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em  $z = 0$ . A derivada é  $f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$ .

7. Verifique que o sistema de Cauchy-Riemann é satisfeito em cada ponto  $(x,y)$  do plano  $\mathbb{C}$ . Note que a função  $g(z)$  é o produto da função inteira  $z^2 - z$  pela função  $e^{-z}$ , também inteira.

8. As componentes da função  $f(z)$  são  $u = e^y \cos x$  e  $v = e^y \sin x$ , que não satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann em ponto algum, já que as funções  $\cos x$  e  $\sin x$  não se anulam simultaneamente. A função  $f(z)$  não é derivável, e muito menos analítica, em ponto algum. Já a função  $g(z)$  é derivável apenas em  $z = i$ , mas, não é analítica em ponto algum.

9. A inexistência da derivada no ponto  $z_0$  não indica singularidade nesse ponto. Recorde-se que  $z_0$  é uma singularidade de  $f(z)$  quando  $f$  for analítica em alguma vizinhança de  $z_0$ , exceto no ponto  $z_0$ .

(a)  $z = 0$  e  $z = \pm i$  são as singularidades de  $f(z)$ .

(b)  $z = 0$  e  $z = 2$  são as singularidades de  $g(z)$ .

(c) A função  $h(z)$  não é analítica em ponto algum e, portanto, não tem singularidade.

10. A derivada pode ser calculada por meio de regras de derivação. As singularidades são:  $z = 0$ ,  $z = i$  e  $z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ .

11. Sendo  $F(z) = \ln r + i\theta$ , então as componentes  $u(r, \theta) = \ln r$  e  $v(r, \theta) = \theta$  são de classe  $C^1$  e facilmente comprovam-se as equações de Cauchy-Riemann:

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad \text{e} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta.$$

A derivada é dada por:

$$F'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

12. No caso de  $f(z) = z^2$ , temos  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(x, y) = 2xy$ . As curvas  $u(x, y) = k$  e  $v(x, y) = k$  são ortogonais se, e só se,  $\nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 0$ . Temos:

$$\begin{cases} \nabla u(x, y) = (2x) \vec{i} - (2y) \vec{j} \\ \nabla v(x, y) = (2y) \vec{i} + (2x) \vec{j} \end{cases} \Rightarrow \nabla u(x, y) \cdot \nabla v(x, y) = 4xy - 4xy = 0.$$

Repita o processo com a função  $g(z) = 1/z$ , nos ponto  $z \neq 0$ .

13. Partindo das equações de Cauchy-Riemann, encontramos:

$$\begin{aligned} u_r = \frac{1}{r}v_\theta &\Rightarrow u_{rr} = -\frac{1}{r^2}v_\theta + \frac{1}{r}v_{\theta r} \Rightarrow r^2u_{rr} = -v_\theta + rv_{\theta r} \\ u_\theta = -rv_r &\Rightarrow u_{\theta\theta} = -rv_{\theta r} \end{aligned}$$

e daí resulta:

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = (-v_\theta + rv_{\theta r}) + v_\theta + (-rv_{\theta r}) = 0.$$

Procedimento similar se adota para a função  $v(r, \theta)$ .

14. Como  $f(z) = u + iv$  e  $g(z) = u - iv$  são analítica no domínio  $D$ , resulta das equações de Cauchy-Riemann que:

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad \text{e} \quad v_x = -u_y \\ u_x = -v_y \quad \text{e} \quad v_x = u_y \end{aligned}$$

e daí segue que as derivadas primeiras de  $u$  e  $v$  são nulas em  $D$ . Logo,  $u$  e  $v$  (e portanto  $f(z)$ ) são constantes em  $D$ .

15. Se  $f(z) = u + iv$  é constante, é claro que  $|f(z)|$  também é constante. Reciprocamente, se  $|f(z)|$  é constante, digamos  $|f(z)| = k$ , obtemos por derivação implícita:

$$u^2 + v^2 = k^2 \Rightarrow \begin{cases} u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0 \\ u \cdot u_y + v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

e usando as equações de Cauchy-Riemann, chegamos:

$$\begin{cases} (u^2 + v^2) \cdot (u_x^2 + v_x^2) = 0, & \text{em } D \\ (u^2 + v^2) \cdot (u_y^2 + v_y^2) = 0, & \text{em } D. \end{cases} \quad (2.2)$$

Das equações (2.2) segue que ou  $u^2 + v^2 = 0$ , e isto acarreta  $f \equiv 0$ , ou as derivadas  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$  e  $v_y$  são todas nulas em  $D$  o que nos dá  $u$  e  $v$  constantes e, portanto,  $f(z)$  constante.

Se  $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$  for constante, digamos  $u = k$ , teremos  $u_x = u_y = 0$  e, conseqüentemente,  $v_x = -u_y = 0$  e  $v_y = u_x = 0$ . Logo,  $f(z)$  é constante.

16. Se  $\mathcal{A}$  representa o conjunto onde  $f(z)$  é analítica, então:

- (a)  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ , isto é,  $f(z)$  é uma função inteira.
- (b)  $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$ .
- (c)  $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ .
- (d)  $\mathcal{A} = \emptyset$ , isto é,  $f(z)$  não é analítica em ponto algum.

17. As componentes  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  e  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$  são funções polinomiais e, portanto, de classe  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo plano. Logo,  $f(z)$  é uma função inteira. A derivada no ponto  $z = a + ib$  é igual a:

$$f'(a + ib) = 3(a^2 - b^2) + (6ab)i.$$

18. Sendo  $f'(z) = 0$  em  $D$ , então

$$\begin{cases} u_x + iv_x = 0, & \text{em } D \\ u_y - iv_y = 0, & \text{em } D. \end{cases}$$

Daí resulta  $u$  e  $v$  constantes. Logo,  $f(z)$  é constante.

19. Basta observar que se  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , então  $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y)$ , onde  $U(x, y) = v(x, -y)$  e  $V(x, y) = -u(x, -y)$ . Agora, comprovemos as equações de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} U_x(x, y) = v_x(x, -y) = -u_y(x, -y) = V_y(x, y) \\ V_x(x, y) = -u_x(x, -y) = -v_y(x, -y) = U_y(x, y). \end{cases}$$

20. Se  $f = u + iv$ , então  $h = u - iv$  e supondo que  $h(z)$  seja derivável em  $z = 0$ , teremos:

$$\left| \begin{array}{l} u_x(0,0) = -v_y(0,0) \\ u_y(0,0) = v_x(0,0) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Mas, sendo  $f(z)$  analítica em  $z = 0$ , temos:

$$\left| \begin{array}{l} u_x(0,0) = v_y(0,0) \\ u_y(0,0) = -v_x(0,0) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Comparando (2.3) e (2.4) deduzimos que  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$  e  $v_y$  são nulas em  $(0,0)$  e, portanto,  $f'(0) = 0$ .

Reciprocamente, se  $f'(0) = 0$ , então:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(0)}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \overline{\left[ \frac{f(z) - f(0)}{z} \right]} \cdot \left( \frac{\bar{z}}{z} \right) = 0.$$

Logo,  $h(z)$  é derivável em  $z = 0$  e  $h'(0) = 0$ .

21. Temos que  $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$  e  $v(x, y) \equiv 0$ , de modo que:

$$\begin{aligned} u_x(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0 = v_y(0,0) \\ u_y(0,0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0 = -v_x(0,0). \end{aligned}$$

Por outro lado, no ponto  $z = 0$ , temos

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}$$

e para comprovar que o último limite não existe, considere a trajetória  $\gamma : \Delta x = \Delta y$ , ao longo da qual o limite pode ser  $\pm \frac{1}{2}(1 - i)$ , conforme  $\Delta x > 0$  ou  $\Delta x < 0$ .

22. A partir das equações de Cauchy-Riemann e notando que  $\vec{\eta} = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla u \cdot \vec{\eta} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = u_x \cos \theta - v_x \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla v \cdot \vec{\eta} = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta = v_x \cos \theta + u_x \sin \theta \end{aligned}$$

e daí resulta:

$$e^{-i\theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} \right) = e^{-i\theta} \left[ e^{i\theta} (u_x + iv_x) \right] = u_x + iv_x = f'(z_0).$$

23. Considerando que  $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ , temos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f(z)}{g(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

No cálculo do limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z}$$

consideramos  $f(z) = |z|^2$  e  $g(z) = z$  para encontrar

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{z} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

## 2.4. FUNÇÕES HARMÔNICAS

1.  $v(x, y) = 2xy + C$ ;  $f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$ .
2. As harmônicas conjugadas são  $v(x, y) = \frac{5}{2}(x^2 - y^2) + y + k$ . Considerando  $k = 0$ , temos a função analítica correspondente

$$\begin{aligned} f(z) &= x - 5xy + i \left[ \frac{5}{2}(x^2 - y^2) + y \right] = x + iy + i \frac{5}{2}(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= z + \frac{5}{2}iz^2. \end{aligned}$$

3. Harmônica conjugada  $v(x, y) = e^x \sin y$  e a função analítica é  $f(z) = \exp(z)$ .
4. A harmônica conjugada  $u(x, y) = \cos x \cosh y$  e a função analítica é  $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$ .
5.  $v(x, y) = 3x^2 - y^3$  e  $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ .
6. Considerando o polinômio do terceiro grau homogêneo e harmônico:

$$u(x, y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2$$

e usando a equação de Laplace  $\Delta u = 0$ , obtemos:

$$(6a + 2d)x + (6b + 2c)y = 0 \tag{2.5}$$

e de (2.5) chegamos a  $d = -3a$  e  $c = -3b$ . O polinômio é  $u(x, y) = ax^3 + by^3 - 3bx^2y - 3axy^2$ , com harmônica conjugada  $v(x, y) = bx^3 + 3ax^2y - 3bxy^2 - ay^3$ , e a função inteira correspondente é  $f(z) = (a + ib)z^3$ .



7. Se  $f(z) = u + iv$  é analítica em  $D$ , então  $u$  e  $v$  são harmônicas conjugadas e  $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ . logo:

$$\begin{aligned}\Delta(|f(z)|^2) &= \Delta(u^2) + \Delta(v^2) = 2(u_x^2 + u_y^2) + 2(v_x^2 + v_y^2) \\ &= 2(u_x^2 + v_x^2) + 2(u_y^2 + v_y^2) = 4|f'(z)|^2.\end{aligned}$$

---