

1.1 Números Complexos

1. Em cada caso, reduza a expressão à forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $(2 - i) + (3 + 4i)$ (b) $(2 + i) - i \cdot (3 + 4i)$ (c) $(1 + i) \cdot (2 + 2i)$ (d) $(1 - i)^{12}$
 (e) $(1 - i) \cdot (\sqrt{3} + i)$ (f) $(2 - i) \cdot (2 + i)$ (g) $(1 - 2i) \cdot (3 + 2i)^{-1}$ (h) i^{-45}

2. Repita o exercício precedente com as expressões:

(a) $\frac{2}{2 - 3i}$ (b) $\frac{2 + i}{2 - 3i}$ (c) $\frac{1}{(1 - i)^2}$ (d) $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$ (e) $\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$.

3. Encontre números reais x e y , tais que $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

4. Em cada caso, calcule o valor da expressão.

(a) $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2 + i} \right)$ (b) $\operatorname{Im} \left(\frac{2 + i}{3 + 4i} \right)$ (c) $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z^2} \right)$ (d) $\left| \frac{1 + 4i}{4 + i} \right|$ (e) $|3e^{i\theta}|$ (f) $|\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta|$.

5. Determine o argumento principal dos seguintes números complexos:

(a) $z = 3$ (b) $z = 2 - 2i$ (c) $z = 1 - i\sqrt{3}$ (d) $z = -4i$ (e) $z = \frac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$ (f) $z = (\sqrt{3} - i)^6$.

6. Demonstre as seguintes propriedades:

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (b) $\overline{\bar{z}} = z$ (c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (d) $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$.

7. Qual número real λ faz com que o número complexo $\frac{2 + \lambda i}{1 - i}$ seja:

(a) Um número real (b) Um imaginário puro, isto é, com parte real nula.

8. Se $z = 2i$ e $w = 3e^{i\pi/3}$, represente no plano \mathbb{C} os números complexos z , $z + w$, $z - w$ e \bar{w} .

9. Verifique que os números $z = 1 \pm i$ satisfazem à equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

10. Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Mostre que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ e a partir daí deduza que se z é uma raiz de $P(z)$, então o conjugado \bar{z} também o é.

11. Mostre que um número complexo z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$.

12. Usando a forma polar, deduza que:

$$(a) i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + 2i\sqrt{3} \quad (b) \frac{5i}{2+i} = 1 + 2i \quad (c) (-1 + i)^7 = -8(1 + i).$$

13. Se $z^2 = (\bar{z})^2$, mostre que o número complexo z ou é real ou é imaginário puro.

14. Use a Fórmula de De Moivre

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

e comprove as seguintes relações trigonométricas:

$$(a) \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \quad e \quad \operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

$$(b) \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \quad e \quad \operatorname{sen}(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta.$$

15. Dado $z \in \mathbb{C}$, mostre que $|1 - z|^2 + |1 + z|^2 = 2 + 2|z|^2$.

16. Prove que $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|$.

17. Estabeleça a fórmula de recorrência: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, $z \neq 1$. Expresse o número complexo $1 + i + i^2 + \dots + i^{179}$ na forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

18. Determine todos os valores de:

$$(a) (2i)^{1/2} \quad (b) (-i)^{1/3} \quad (c) 8^{1/6} \quad (d) (-\sqrt{3} + i)^{3/2} \quad (e) (-1)^{-3/4}.$$

19. Determine as 4 raízes complexas da equação $z^4 + 4 = 0$ e, usando o resultado, decomponha o polinômio $z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.

20. Se w é uma raiz n -ésima da unidade, $w \neq 1$, mostre que $1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = 0$.

21. Se $|z| = |w|$ e $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$, mostre que $z = w$ ou $z = \bar{w}$.

22. Sabendo que $|z| < 1$ e $|w| < 1$, mostre que $|z + w| < |1 + z \cdot \bar{w}|$.

23. Se $z \cdot w \neq 0$, mostre que $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = |z||w|$ se, e somente se, $\arg z - \arg w = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, tem-se $|z + w| = |z| + |w|$.

24. Dado um número inteiro n , quantos valores distintos a expressão $i^n + i^{-n}$ pode assumir?
25. Calcule o valor de $(2 + i)(3 + i)$ e com o resultado, mostre que $\frac{\pi}{4} = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$.
26. Sabendo que $z = \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}$ é solução da equação $z^3 = 7 + i\sqrt{15}$, calcule o valor de $\left| \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} \right|$.
27. Resolva em \mathbb{C} as seguintes equações:
- (a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$ (b) $z^4 = -16$ (c) $z^4 - (1 - 2i)z^2 - 1 - i = 0$
 (d) $z^7 = -1 - i$ (e) $(\bar{z})^3 = -i$ (f) $z^4 - (1 - i)z^2 = i$
-

1.2 Topologia do Plano \mathbb{C}

1. Esboce e classifique em Aberto (A) ou Fechado (F) os subconjuntos do plano \mathbb{C} caracterizados por:
- (a) $|\operatorname{Re} z| < 2$ (b) $|\operatorname{Im} z| > 1$
 (c) $|z - 4| > |\bar{z}|$ (d) $0 < \arg(z) < 3\pi/4, |z| > 2$
 (e) $\operatorname{Re} z > 0$ e $1 < |z - 2i| < 2$ (f) $0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, z \neq 0$
 (g) $\operatorname{Re}(1/z) < 1/2$. (h) $\operatorname{Im}(1/\bar{z}) \geq 1/2$
 (i) $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$. (j) $\operatorname{Im}(z^3) < 0$.
2. Identifique as curvas do plano complexo descritas por:
- (a) $|z - 2| = |z - 3i|$ (b) $|z - 1 + i| = |3 + i - z|$ (c) $|z - i| + |z + 2| = 3$
 (d) $|z + 1| = 2|z - i|$ (e) $\operatorname{Re}(1 - z) = |z|$ (f) $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 < \theta \leq 2\pi$
3. Dado um número real λ , identifique o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \lambda|z| = |z - 1|\}$.
4. Sejam R uma constante positiva e z_0 um número complexo fixado. Identifique o subconjunto do plano complexo descrito pela equação $|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$.
5. Por que o conjunto vazio \emptyset é aberto? Por que ele é um conjunto fechado?
6. Mostre que a união e a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto. O que se pode dizer sobre a união e a interseção de dois conjuntos fechados?
7. Dada uma família infinita $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abertos do plano \mathbb{C} , a interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é um conjunto aberto?
-

1.3 Exercícios Adicionais

1. Determine todos os valores inteiros de n para os quais $(1 - i\sqrt{3})^n$ é um número real.
2. Dado z um número complexo, com $|\bar{z} - iz| \neq 0$, mostre que $w = \frac{z - i\bar{z}}{\bar{z} - iz}$ é um número real.
3. Mostre que as raízes n -ésimas do número complexo z formam um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio $R = \sqrt[n]{|z|}$.

4. Se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais e $P(3 + 2i) = 1 - 2i$, qual o valor de $|P(3 - 2i)|$?

5. Se $|z_2| \neq |z_3|$, mostre que $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$.

6. Usando o Método de Indução Finita, estabeleça a Fórmula Binomial:

$$(1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}z^k + \cdots + z^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

7. Ainda com o Método de Indução, estabeleça a Desigualdade Triangular:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

8. Demonstre a identidade:

$$\frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} = e^{2i\theta}.$$

9. Se $-\pi < \theta \leq \pi$, use a fórmula de recorrência do Exercício 17 da Seção 1.1 para estabelecer as relações:

$$(a) \quad 1 + \cos \theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(n+1/2)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)}$$

$$(b) \quad \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2\theta) + \cdots + \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2} \cotg(\theta/2) - \frac{\cos[(n+1/2)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)}$$

10. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| = 1$, mostre que $|z + \lambda| \leq |1 + \bar{\lambda}z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e ocorre a igualdade se, e somente se, $|z| = 1$.

11. Demonstre a identidade:

$$\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|z| + \operatorname{Re}(z))} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \sqrt{\frac{1}{2}(|z| - \operatorname{Re}(z))} \right]$$

e use-a para resolver as equações:

(a) $z^2 + z + 1 = i$ (b) $z^2 - 3z + 3 = i$ (c) $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$.

12. Se N é um inteiro ≥ 4 , mostre que os possíveis valores de $1 + i + i^2 + \dots + i^N$ são 1, $1 + i$, i ou 0, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 3, 2, 1 ou 0.

13. Usando a forma polar, mostre que $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ é raiz da equação $z^4 - (1 + 4i)z^2 + 4i = 0$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

1.1. NÚMEROS COMPLEXOS, EXPOENTES E RAÍZES

1. Das operações com números complexos, resulta:

(a) $(2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i$.

(b) $(2 + i) - i(3 + 4i) = 2 + i - 3i + 4 = 6 - 2i$.

(c) $(1 + i) \cdot (2 + 2i) = 0 + 4i = 4i$.

(d) $(1 - i)^{12} = [(1 - i)^2]^6 = (-2i)^6 = -64$.

(e) $(1 - i)(\sqrt{3} + i) = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i$.

(f) $(2 - i) \cdot (2 + i) = 2^2 - i^2 = 5$.

(g) $(1 - 2i)(3 + 2i)^{-1} = \frac{1 - 2i}{3 + 2i} = \frac{(1 - 2i) \cdot (3 - 2i)}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{8}{13}i$.

(h) $i^{-45} = i^{-44} \cdot i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$.

2. Usando a relação

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2},$$

encontramos:

(a) $\frac{2}{2 - 3i} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13}i$.

(b) $\frac{2 + i}{2 - 3i} = \frac{1}{13} + \frac{8}{13}i$.

(c) $\frac{1}{(1 - i)^2} = \frac{i}{2}$.

(d) Considerando que $i^{30} = -1$ e $i^{19} = -i$, obtemos:¹

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = 1 + i.$$

(e) $\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{3 + 4i} = 3 - i.$

3. Os números x e y formam a solução do sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases},$$

isto é, $x = -1$ e $y = 2$.

4. Dado um número complexo $z = x + iy$, recordemos que

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |re^{i\theta}| = r.$$

(a) $z = \frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{5} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 2/5.$

(b) $z = \frac{2 + i}{3 + 4i} = \frac{(2 + i) \cdot (3 - 4i)}{25} = \frac{10 - 5i}{25} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = -1/5.$

(c) Se $z = x + iy$, então:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{|z^4|} - \frac{2xyi}{|z^4|} \Rightarrow \operatorname{Im}(1/z^2) = -\frac{2 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z)}{|z|^4}.$$

(d) $\left| \frac{1 + 4i}{4 + i} \right| = \frac{|1 + 4i|}{|4 + i|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 1.$

(e) $|3e^{i\theta}| = 3$

(f) $|\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| = |e^{i\theta}| = 1.$

5. Expresse o número complexo sob a forma $z = re^{i\theta}$, para descobrir o argumento.

(a) 0 (b) $-\pi/4$ (c) $-\pi/3$ (d) $-\pi/2$ (e) $5\pi/6$ (f) $-\pi.$

6. Como ilustração, faremos os itens (c) e (d). Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, então:

(c) $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - i(ad + bc)$ e $\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - ib) \cdot (c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc).$

¹De forma geral, temos: $i^n = (-1)^k$, se $n = 2k$, e $i^n = (-1)^k \cdot i$, se $n = 2k + 1$.

(d) Primeiro, mostremos que $1/\bar{w} = \overline{(1/w)}$. De fato, notando que $1/w = \bar{w}/|w|^2$ e $1/\bar{w} = w/|w|^2$, temos:

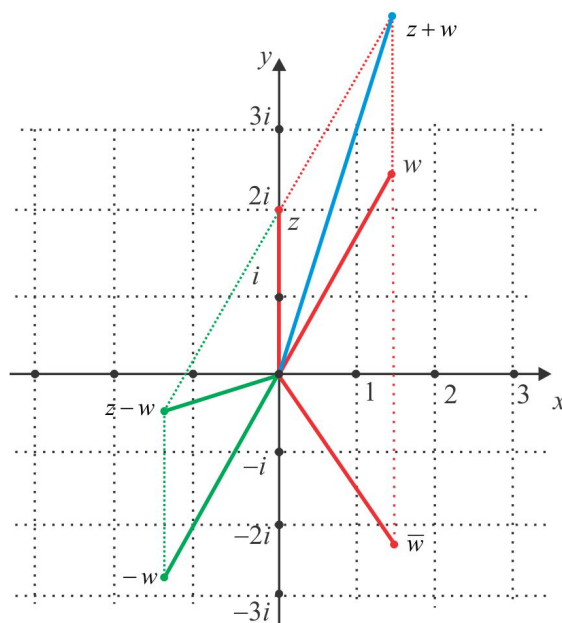
$$1/\bar{w} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{\bar{\bar{w}}}{|w|^2} = \overline{\left(\frac{\bar{w}}{|w|^2}\right)} = \overline{(1/w)}.$$

Agora, temos:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \bar{z} \cdot \frac{1}{\bar{w}} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

7. Se $z = \frac{2 + \lambda i}{1 - i}$, então $\operatorname{Re}(z) = \frac{2 - \lambda}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = -\frac{2 + \lambda}{2}$. Sendo assim, z é real se $\lambda = -2$ e será imaginário puro quando $\lambda = 2$.

8. Veja a ilustração no gráfico.



9. A comprovação pode ser feita por substituição direta de z na equação.

10. Use as propriedades da conjugação dadas no Exercício 6 da Seção 1.1.

11. Primeiro observamos que $z = a + ib$ é um número real se, e somente se, $\operatorname{Im}(z) = 0$, isto é, $b = 0$. Ora,

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

12. Como ilustração faremos os itens (b) e (c).

(b) Se $\varphi = \text{Arg}(2 + i)$, então $2 + i = \sqrt{5}e^{i\varphi}$ e, portanto:

$$\frac{5i}{2+i} = \sqrt{5} e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \sqrt{5} \sin \varphi + i\sqrt{5} \cos \varphi.$$

Como $\text{tg } \varphi = 1/2$, segue que $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$ e $\cos \varphi = 2/\sqrt{5}$ e obtemos o resultado.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} z &= -1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7 e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2} e^{(6\pi - \frac{3\pi}{4})i} \\ &= 8\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 8\sqrt{2} (\cos(3\pi/4) - i \sin(3\pi/4)) = -8(1 + i). \end{aligned}$$

13. Considerando $z = x + iy$, temos que $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ e $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$. Assim,

$$z^2 = \bar{z}^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 2xy = 0.$$

Ora, $2xy = 0$ se, e somente se, $x = 0$ (neste caso z é imaginário puro) ou $y = 0$ (neste caso z é real).

14. Considere na Fórmula de De Moivre $n = 2$ e $n = 3$ para chegar aos resultados.

(a) No caso $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \Leftrightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \\ &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

(b) No caso $n = 3$, proceda de forma similar!

15. Das propriedades algébricas em \mathbb{C} e lembrando que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, temos:

$$\begin{aligned} |1 - z|^2 + |1 + z|^2 &= (1 - z) \cdot (1 - \bar{z}) + (1 + z) \cdot (1 + \bar{z}) \\ &= 1 - z - \bar{z} + z \cdot \bar{z} + 1 + z + \bar{z} + z \cdot \bar{z} = 2 + 2|z|^2. \end{aligned}$$

16. Considerando que $|z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$, temos:

$$\begin{aligned} (|\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|)^2 &= |\text{Re}(z)|^2 + 2|\text{Re}(z)||\text{Im}(z)| + |\text{Im}(z)|^2 \\ &\leq 2\left(|\text{Re}(z)|^2 + |\text{Im}(z)|^2\right) = 2|z|^2. \end{aligned}$$

17. Para comprovar a relação

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

ou efetuamos a divisão de $1 - z^{n+1}$ por $1 - z$ ou usamos a propriedade distributiva e comprovamos diretamente a relação

$$(1 - z) \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n) = 1 - z^{n+1}.$$

Considerando $n = 179$ e $z = i$, temos:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{179} = \frac{1 - i^{180}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{90}}{1 - i} = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0.$$

18. Recordemos que $w = z^{1/\alpha}$ se, e somente se, $z = w^\alpha$.

- (a) $\pm(1 - i)$ (b) $i, \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} - i)$ (c) $\pm\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$
 (d) $\pm 2(1 + i)$ (e) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

19. As quatro raízes de $z^4 + 4 = 0$ são $1 \pm i$ e $-1 \pm i$. A fatoração do polinômio $z^4 + 4$ fica assim:

$$z^4 + 4 = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2).$$

20. Considerando que $w^n = 1$, por ser w uma raiz da unidade, obtemos

$$1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0.$$

21. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, as igualdades $|z| = |w|$ e $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$ nos conduz ao sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ x = a \end{cases}$$

de onde deduzimos que $y = \pm b$. Logo, $z = a \pm ib$.

22. Considerando que $|z| < 1$ e $|w| < 1$, temos:

$$|z|^2(1 - |w|^2) < 1 - |w|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 < 1 + |z|^2|w|^2.$$

Daí resulta:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w < 1 + |z|^2|w|^2 + z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = |1 + z \cdot \bar{w}|^2.$$

23. Se fizermos $z = re^{i\theta}$ e $w = z = \rho e^{i\varphi}$, teremos:

$$z \cdot \bar{w} = r\rho e^{i(\theta-\varphi)} = r\rho [\cos(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta - \varphi)]$$

e, conseqüentemente,

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = r\rho \cos(\theta - \varphi) = |z||w| \cos(\theta - \varphi).$$

Da última relação, resulta:

$$\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = |z||w| \Leftrightarrow \cos(\theta - \varphi) = 1 \Leftrightarrow \theta - \varphi = 2k\pi.$$

Neste caso, temos:

$$|z + w| = \left| re^{i\theta} + \rho e^{i(\theta+2n\pi)} \right| = (r + \rho) = |z| + |w|.$$

24. Um cálculo direto nos conduz a:

$$i^n + i^{-n} = \frac{i^{2n} + 1}{i^n} = \frac{(-1)^n + 1}{i^n} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2/(-1)^k, & \text{se } n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Logo, os possíveis valores assumidos por $i^n + i^{-n}$ são: 0 e ± 2 .

25. Se $\theta_1 = \arg(2 + i)$ e $\theta_2 = \arg(3 + i)$, então $\theta_1 = \arctan(1/2)$ e $\theta_2 = \arctan(1/3)$ e teremos:

$$\arg[(2 + i) \cdot (3 + i)] = \theta_1 + \theta_2.$$

Por outro lado, $(2 + i) \cdot (3 + i) = 5 + 5i$ e, portanto,

$$\pi/4 = \arg[(2 + i) \cdot (3 + i)] = \theta_1 + \theta_2.$$

26. Se $\theta \in \arg(z)$, então

$$z^3 = 8e^{i\theta} \Rightarrow z = \sqrt[3]{8} e^{i\theta/3} \Rightarrow |z| = 2.$$

27. Para resolver a equação $z^n = w$, o primeiro passo é expressar o número w sob a forma polar.

(a) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - i).$

(b) $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}.$

(c) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \mp i \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt[4]{2} [\pm \cos(\pi/8) \mp \operatorname{sen}(\pi/8)]$

(d) Considerando que $|-1 - i| = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4$, temos:

$$z^7 = -1 - i \Leftrightarrow z^7 = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$$

e as raízes são dadas por:

$$z_k = 2^{1/14} \left[\cos \left(\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{7} \right) + i \text{sen} \left(\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{7} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

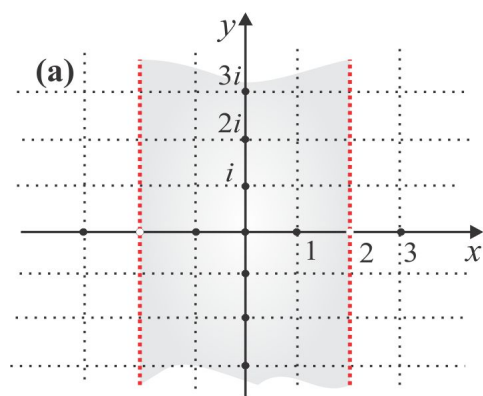
(e) Temos que $\bar{z}^3 = -i$ se, e somente se, $z^3 = i$ e as raízes desta última equação são:

$$z_k = [\cos(\pi/6 + 2k\pi) + i \text{sen}(\pi/6 + 2k\pi)], \quad k = 0, 1, 2.$$

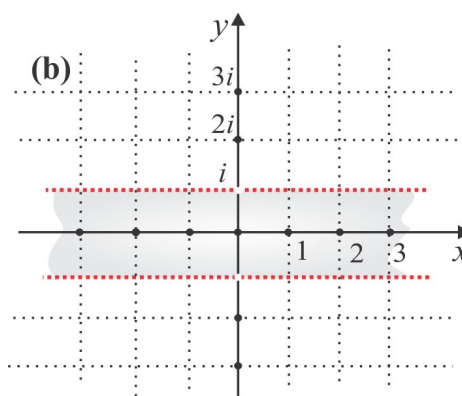
(f) $z = \pm 1$ ou $z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.

1.2. TOPOLOGIA DO PLANO \mathbb{C}

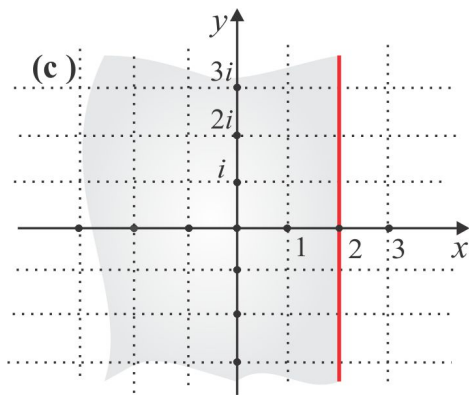
1. Em certos casos, é conveniente olhar a descrição do conjunto em coordenadas cartesianas. Para isto, consideramos $z = x + iy$.



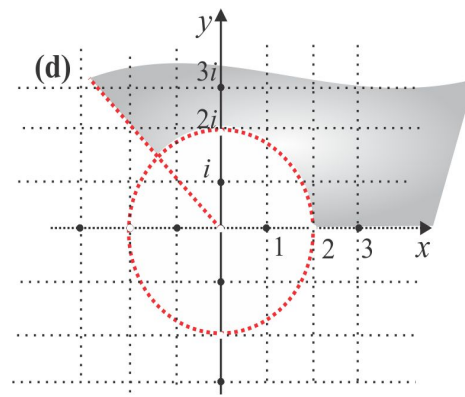
$$|\text{Re}(z)| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2. \quad (\text{A})$$



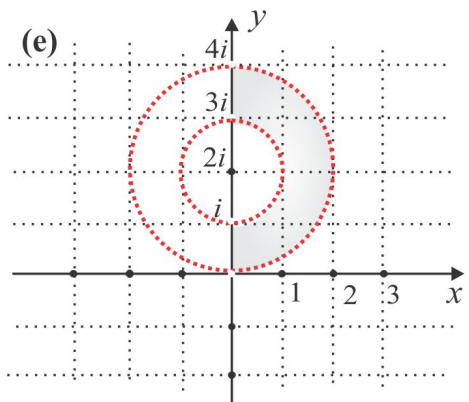
$$|\text{Im}(z)| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1. \quad (\text{A})$$



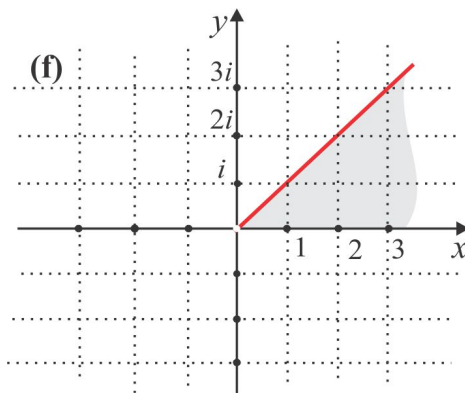
$$|z - 4| \leq |\bar{z}| \Leftrightarrow x \leq 2. \quad (\text{F})$$



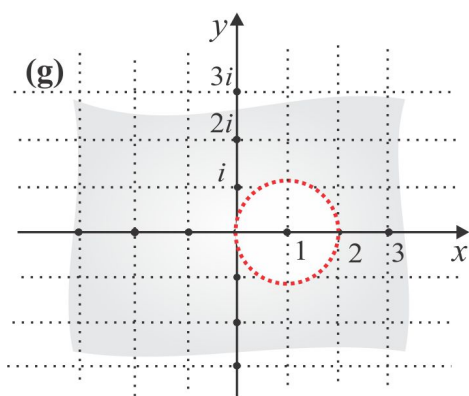
$$0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2. \quad (\text{A})$$



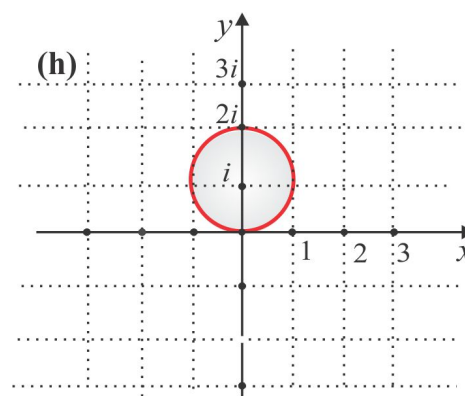
$$\operatorname{Re}(z) > 0, \quad 1 < |z - 2i| < 2. \quad (\text{A})$$



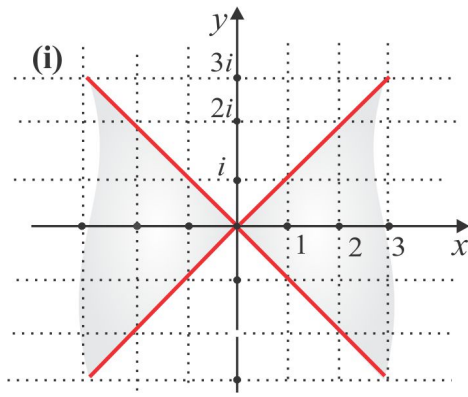
$$0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, \quad z \neq 0.$$



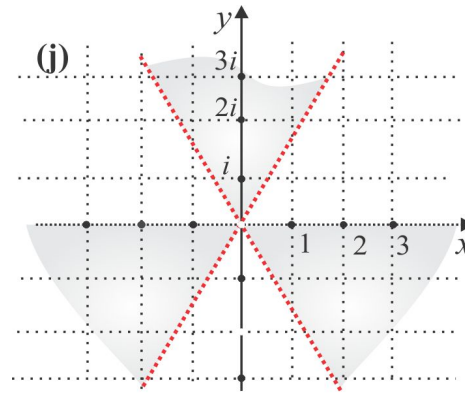
$$\operatorname{Re}(z) < 1/2. \quad (\text{A})$$



$$\operatorname{Im}(1/\bar{z}) \geq 1/2. \quad (\text{F})$$



$\text{Re}(z^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2. \quad (\text{F})$



$\text{Im}(z^3) < 0 \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 < 0. \quad (\text{A})$

2. Como no exercício precedente, podemos considerar $z = x + iy$ e olhar a equação na forma cartesiana.

(a) $|z - 2| = |z - 3i| \Leftrightarrow 4x - 6y + 5 = 0. \quad (\text{Reta})$

(b) $|z - 1 + i| = |3 + i - z| \Leftrightarrow 4x + 4y + 5 = 0. \quad (\text{Reta})$

(c) $|z - i| + |z + 2| = 3. \quad (\text{Elipse com Focos: } z_1 = i \text{ e } z_2 = -2)$

(d) $|z + 1| = 2|z - i|. \quad (\text{Circunferência de centro } z_0 = 1 + 2i \text{ e raio } R = \sqrt{7})$

(e) $\text{Re}(1 - z) = |z| \Leftrightarrow 1 - 2x = y^2. \quad (\text{Parábola com Foco: } z_0 = -i/2)$

(f) $z = z_0 + re^{i\theta} \Leftrightarrow |z - z_0| = r. \quad (\text{Circunferência de centro } z_0 \text{ e raio } r)$

3. Se $z = x + iy$, a equação se reduz a:

$$(\lambda^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2x = 1.$$

- Se $\lambda = 0$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1$.
- Se $\lambda = 1$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1/2$.
- Se $\lambda = -1$, o conjunto é vazio.
- Nos demais casos, o conjunto é a circunferência

$$(x - a)^2 + y^2 = 1 + a^2, \quad a = (\lambda^2 - 1)^{-1}.$$

4. Considerando $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e passando a equação $|z|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$ para coordenadas cartesianas, encontramos

$$(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2,$$

que representa uma circunferência de centro z_0 e raio R .

5. O plano \mathbb{C} é o complementar do conjunto vazio. Considerando que o plano \mathbb{C} é, ao mesmo tempo, um conjunto aberto e também fechado, deduzimos que o conjunto vazio \emptyset é aberto e fechado!
6. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos do plano \mathbb{C} e sejam $A = S_1 \cap S_2$ e $B = S_1 \cup S_2$.

- (i) Se S_1 e S_2 são abertos, então A e B são abertos. De fato, dado z_0 em A , então $z_0 \in S_1 \cap S_2$ e, portanto, existem δ_1 e δ_2 positivos, tais que

$$V_{\delta_1}(z_0) \subset S_1 \quad \text{e} \quad V_{\delta_2}(z_0) \subset S_2.$$

Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos $V_\delta(z_0) \subset S_1 \cap S_2$, isto é, $V_\delta(z_0) \subset A$. Por outro lado, dado z_1 em B , então $z_1 \in S_1$ ou $z_1 \in S_2$ e, portanto, $V_\delta(z_0) \subset B$.

- (ii) Se S_1 e S_2 são fechados, então A e B são fechados. Passando aos complementares, temos:

$$\mathbb{C} \setminus A = \mathbb{C} \setminus (S_1 \cap S_2) = (\mathbb{C} \setminus S_1) \cup (\mathbb{C} \setminus S_2) \quad \text{é aberto (união de dois abertos)}$$

$$\mathbb{C} \setminus B = \mathbb{C} \setminus (S_1 \cup S_2) = (\mathbb{C} \setminus S_1) \cap (\mathbb{C} \setminus S_2) \quad \text{é aberto (interseção de dois abertos)}$$

7. A interseção pode não ser um conjunto aberto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos (discos) abertos $A_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1/n\}$. É fácil deduzir que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

não é um conjunto aberto.

1.3. EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Temos que

$$(1 - i\sqrt{3})^n = (2 e^{-i\pi/3})^n = 2^n [\cos(n\pi/3) - i \operatorname{sen}(n\pi/3)]$$

e $(1 - i\sqrt{3})^n$ será um número real quando $\operatorname{sen}(n\pi/3) = 0$, isto é, n for múltiplo inteiro de 3.

2. Sabemos do Exercício 11 da Seção 1.1 que w é real se, e somente se, $w = \bar{w}$. Temos:

$$\bar{w} = \frac{\bar{z} - i\bar{z}}{\bar{z} - i\bar{z}} = \frac{\bar{z} + iz}{z + i\bar{z}} = \frac{i(-i\bar{z} + z)}{i(-iz + \bar{z})} = w.$$

3. As n raízes complexas de $z = re^{i\theta}$ são

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

e como $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, segue que as n raízes z_k estão igualmente espaçadas ao longo da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Ressaltamos que $\arg(z_k) - \arg(z_{k-1}) = 2\pi/n$ e o comprimento do arco entre essas raízes é $s = 2\pi \sqrt[n]{r}/n$.

4. Se $z = 3 + 2i$, então $P(3 - 2i) = P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = 1 + 2i$. Logo, $|P(3 - 2i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$.

5. Da desigualdade $||z| - |w|| \leq |z - w|$, segue que $||z_2| - |-z_3|| \leq |z_2 + z_3|$ e, portanto,

$$\frac{1}{||z_2| - |z_3||} = \frac{1}{||z_2| - |-z_3||} \geq \frac{1}{|z_2 + z_3|} \Rightarrow \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||} \geq \frac{|z_1|}{|z_2 + z_3|}.$$

6. Com a notação binomial, devemos mostrar que:

$$(1 + z)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n-k+1}.$$

Admitindo a sentença válida pra $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} (1 + z)^{n+1} &= (1 + z)(1 + z)^n = (1 + z) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n-k+1} &= 1 + z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] z^{n-k+1} \\ &= \left[1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} z^{n-k+1} \right] + \left[z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k+1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k+1} = (1 + z)^{n+1}. \end{aligned}$$

7. Admitindo a sentença válida para $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|. \end{aligned}$$

8. Usando identidades trigonométricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} &= \frac{1 - \tan^2 \theta + 2i \tan \theta}{\sec^2 \theta} = \cos^2 \theta - \sen^2 \theta + 2i \sen \theta \cos \theta \\ &= \cos(2\theta) + i \sen(2\theta) = e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

9. Como ilustração, faremos a parte (a). Usando a identidade

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1,$$

com $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $\theta \neq 0$, encontramos

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta + i(1 + \sen \theta + \sen 2\theta + \cdots + \sen n\theta) = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i \sen(n+1)\theta}{(1 - \cos \theta) - i \sen \theta}.$$

Da última igualdade, resulta:

$$\begin{aligned} 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(n+1)\theta \cdot \cos \theta + \sen(n+1)\theta \cdot \sen \theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos \theta)} = \frac{1}{2} + \frac{\sen(n+1/2)\theta \cdot \sen(\theta/2)}{1 - \cos \theta}. \end{aligned}$$

(aqui usamos a identidade $\cos x - \cos y = 2 \sen\left(\frac{x+y}{2}\right) \sen\left(\frac{y-x}{2}\right)$). Para concluir a parte (a), use a identidade $1 - \cos \theta = 2 \sen^2(\theta/2)$. A identidade (b) é deduzida de forma similar, igualando as partes imaginárias

10. Tendo em vista que $|\lambda| < 1$, então $|\lambda|^2(1 - |z|^2) \leq 1 - |z|^2$ e, sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned} |z + \lambda| \leq |1 + \bar{\lambda}z| &\Leftrightarrow |z + \lambda|^2 \leq |1 + \bar{\lambda}z|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \leq 1 + |\lambda|^2|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |\lambda|^2(1 - |z|^2) \leq 1 - |z|^2. \end{aligned}$$

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} |z + \lambda| = |1 + \bar{\lambda}z| &\Leftrightarrow |z + \lambda|^2 = |1 + \bar{\lambda}z|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} = 1 + |\lambda|^2|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |z|^2(1 - |\lambda|^2) \leq 1 - |\lambda|^2 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

11. Mostrar que $\sqrt{w} = \pm \xi$ é equivalente a mostrar que $w = \xi^2$. Se fizermos

$$\xi = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))} \right]$$

teremos

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w)) - \frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w)) \pm i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w)) \sqrt{|w|^2 - \operatorname{Re}(w)^2} \\ &= \operatorname{Re}(w) \pm i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w)) \sqrt{\operatorname{Im}(w)^2} = \operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w) = w. \end{aligned}$$

(a) Temos

$$z^2 + z + 1 = i \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} + i \Leftrightarrow z + \frac{1}{2} = \sqrt{w}, \quad w = -\frac{3}{4} + i.$$

Logo,

$$z + \frac{1}{2} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))} \right] = \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$$

Assim, as raízes da equação $z^2 + z + 1 = i$ são precisamente $z = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$, isto é, $z = i$ ou $z = -1 - i$.

12. Os possíveis valores de N são $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ e $4k + 3$ $k \in \mathbb{N}$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 0, 1, 2 ou 3. Use o Exercício 17 da Seção 1.1 para concluir. Por exemplo, se o resto da divisão é 2, então $N = 4k + 2$ e encontramos:

$$\begin{aligned} 1 + i + i^2 + \dots + i^N &= \frac{1 - i^{N+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{4k+2}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{2k+1}}{1 - i} \\ &= \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i. \end{aligned}$$

13. Temos que $z = 2e^{-i3\pi/4}$ e substituindo na equação, encontramos:

$$\begin{aligned} z^4 - (1 + 4i)z^2 + 4i &= 16 e^{i3\pi} - (1 + 4i) 4e^{i3\pi/2} + 4i \\ &= -16 - (1 + 4i)(-4i) + 4i = 0. \end{aligned}$$
