1.1 Números Complexos

1. Em cada caso, reduza a expressão à forma $a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) $(2-i)+(3+4i)$ **(b)** $(2+i)-i\cdot(3+4i)$ **(c)** $(1+i)\cdot(2+2i)$ **(d)** $(1-i)^{12}$
   (e) $(1-i)\cdot(\sqrt{3}+i)$ **(f)** $(2-i)\cdot(2+i)$ **(g)** $(1-2i)\cdot(3+2i)^{-1}$ **(h)** i^{-45}

2. Repita o exercício precedente com as expressões:

   (a) $\dfrac{2}{2-3i}$ **(b)** $\dfrac{2+i}{2-3i}$ **(c)** $\dfrac{1}{(1-i)^2}$ **(d)** $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$ **(e)** $\dfrac{5+5i}{3-4i}+\dfrac{20}{4+3i}$.

3. Encontre números reais x e y, tais que $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

4. Em cada caso, calcule o valor da expressão.

   (a) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{2+i}\right)$ **(b)** $\operatorname{Im}\left(\dfrac{2+i}{3+4i}\right)$ **(c)** $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z^2}\right)$ **(d)** $\left|\dfrac{1+4i}{4+i}\right|$ **(e)** $\left|3e^{i\theta}\right|$ **(f)** $|\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta|$.

5. Determine o argumento principal dos seguintes números complexos:

   (a) $z = 3$ **(b)** $z = 2-2i$ **(c)** $z = 1 - i\sqrt{3}$ **(d)** $z = -4i$ **(e)** $z = \dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ **(f)** $z = (\sqrt{3}-i)^6$.

6. Demonstre as seguintes propriedades:

   (a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ **(b)** $\overline{\overline{z}} = z$ **(c)** $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$ **(d)** $\overline{(z/w)} = \overline{z}/\overline{w}$.

7. Qual número real λ faz com que o número complexo $\dfrac{2+\lambda i}{1-i}$ seja:

   (a) Um número real **(b)** Um imaginário puro, isto é, com parte real nula.

8. Se $z = 2i$ e $w = 3e^{i\pi/3}$, represente no plano $\mathbb{C}$ os números complexos $z,\ z+w,\ z-w$ e $\overline{w}$.

9. Verifique que os números $z = 1 \pm i$ satisfazem à equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

10. Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Mostre que $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ e a partir daí deduza que se z é uma raiz de $P(z)$, então o conjugado $\overline{z}$ também o é.

11. Mostre que um número complexo z é real se, e somente se, $z = \overline{z}$.

12. Usando a forma polar, deduza que:

    (a) $i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + 2i\sqrt{3}$ **(b)** $\dfrac{5i}{2+i} = 1 + 2i$ **(c)** $(-1+i)^7 = -8\,(1+i)$.

13. Se $z^2 = (\overline{z})^2$, mostre que o número complexo z ou é real ou é imaginário puro.

14. Use a Fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

    e comprove as seguintes relações trigonométricas:

    (a) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$.

    (b) $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta$ e $\operatorname{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$.

15. Dado $z \in \mathbb{C}$, mostre que $|1 - z|^2 + |1 + z|^2 = 2 + 2\,|z|^2$.

16. Prove que $|\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)| \leq \sqrt{2}\,|z|$.

17. Estabeleça a fórmula de recorrência: $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$, $z \neq 1$. Expresse o número complexo $1 + i + i^2 + \cdots + i^{179}$ na forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

18. Determine todos os valores de:

    (a) $(2i)^{1/2}$ **(b)** $(-i)^{1/3}$ **(c)** $8^{1/6}$ **(d)** $\left(-\sqrt{3} + i\right)^{3/2}$ **(e)** $(-1)^{-3/4}$.

19. Determine as 4 raízes complexas da equação $z^4 + 4 = 0$ e, usando o resultado, decomponha o polinômio $z^4 + 4$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.

20. Se w é uma raiz n-ésima da unidade, $w \neq 1$, mostre que $1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

21. Se $|z| = |w|$ e $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Re}\,w$, mostre que $z = w$ ou $z = \overline{w}$.

22. Sabendo que $|z| < 1$ e $|w| < 1$, mostre que $|z + w| < |1 + z \cdot \overline{w}|$.

23. Se $z \cdot w \neq 0$, mostre que $\mathrm{Re}\,(z \cdot \overline{w}) = |z|\,|w|$ se, e somente se, $\arg z - \arg w = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, tem-se $|z + w| = |z| + |w|$.

24. Dado um número inteiro n, quantos valores distintos a expressão $i^n + i^{-n}$ pode assumir?

25. Calcule o valor de $(2+i)(3+i)$ e com o resultado, mostre que $\dfrac{\pi}{4} = \arctan(1/2) + \arctan(1/3)$.

26. Sabendo que $z = \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}$ é solução da equação $z^3 = 7 + i\sqrt{15}$, calcule o valor de $\left|\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}\right|$.

27. Resolva em $\mathbb{C}$ as seguintes equações:

    (a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$ **(b)** $z^4 = -16$ **(c)** $z^4 - (1-2i)z^2 - 1 - i = 0$

    (d) $z^7 = -1 - i$ **(e)** $(\overline{z})^3 = -i$ **(f)** $z^4 - (1-i)z^2 = i$

1.2 Topologia do Plano $\mathbb{C}$

1. Esboce e classifique em Aberto (A) ou Fechado (F) os subconjuntos do plano $\mathbb{C}$ caracterizados por:

    (a) $|\operatorname{Re} z| < 2$ **(b)** $|\operatorname{Im} z| > 1$

    (c) $|z - 4| > |\overline{z}|$ **(d)** $0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2$

    (e) $\operatorname{Re} z > 0$ e $1 < |z - 2i| < 2$ **(f)** $0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, \quad z \neq 0$

    (g) $\operatorname{Re}(1/z) < 1/2$. **(h)** $\operatorname{Im}(1/\overline{z}) \geq 1/2$

    (i) $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$. **(j)** $\operatorname{Im}(z^3) < 0$.

2. Identifique as curvas do plano complexo descritas por:

    (a) $|z-2| = |z-3i|$ **(b)** $|z-1+i| = |3+i-z|$ **(c)** $|z-i| + |z+2| = 3$

    (d) $|z+1| = 2|z-i|$ **(e)** $\operatorname{Re}(1-z) = |z|$ **(f)** $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 < \theta \leq 2\pi$

3. Dado um número real λ, identifique o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \lambda |z| = |z-1|\}$.

4. Sejam R uma constante positiva e z_0 um número complexo fixado. Identifique o subconjunto do plano complexo descrito pela equação $|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$.

5. Por que o conjunto vazio $\varnothing$ é aberto? Por que ele é um conjunto fechado?

6. Mostre que a união e a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto. O que se pode dizer sobre a união e a interseção de dois conjuntos fechados?

7. Dada uma família infinita $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abertos do plano $\mathbb{C}$, a interseção $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é um conjunto aberto?

1.3 Exercícios Adicionais

1. Determine todos os valores inteiros de n para os quais $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ é um número real.

2. Dado z um número complexo, com $|\bar{z} - iz| \neq 0$, mostre que $w = \dfrac{z - i\bar{z}}{\bar{z} - iz}$ é um número real.

3. Mostre que as raízes n-ésimas do número complexo z formam um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio $R = \sqrt[n]{|z|}$.

4. Se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais e $P(3+2i) = 1 - 2i$, qual o valor de $|P(3-2i)|$?

5. Se $|z_2| \neq |z_3|$, mostre que $\left|\dfrac{z_1}{z_2 + z_3}\right| \leq \dfrac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$.

6. Usando o Método de Indução Finita, estabeleça a Fórmula Binomial:

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + \cdots + z^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

7. Ainda com o Método de Indução, estabeleça a Desigualdade Triangular:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|\,.$$

8. Demonstre a identidade:

$$\frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} = e^{2i\theta}.$$

9. Se $-\pi < \theta \leq \pi$, use a fórmula de recorrência do Exercício 17 da Seção 1.1 para estabeler as relações:

   (a) $1 + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \dfrac{\operatorname{sen}[(n+1/2)\theta]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$

   (b) $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(2\theta) + \cdots + \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}(\theta/2) - \dfrac{\cos[(n+1/2)\theta]}{2\operatorname{sen}(\theta/2)}$

10. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| = 1$, mostre que $|z + \lambda| \leq \left|1 + \overline{\lambda}z\right|$, $\forall z \in \mathbb{C}$, e ocorre a igualdade se, e somente se, $|z| = 1$.

11. Demonstre a identidade:

$$\sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|z| + \operatorname{Re}(z)\right)} + i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|z| - \operatorname{Re}(z)\right)}\;\right]$$

    e use-a para resolver as equações:

(a) $z^2 + z + 1 = i$ **(b)** $z^2 - 3z + 3 = i$ **(c)** $z^2 - (5+i)\,z + 8 + i = 0.$

12. Se N é um inteiro ≥ 4, mostre que os possíveis valores de $1 + i + i^2 + \cdots + i^N$ são $1,\ 1+i,\ i$ ou 0, conforme o resto da divisão de N por 4 seja $3,\ 2,\ 1$ ou 0.

13. Usando a forma polar, mostre que $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ é raiz da equação $z^4 - (1+4i)\,z^2 + 4i = 0$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

1.1. NÚMEROS COMPLEXOS, EXPOENTES E RAÍZES

1. Das operações com números complexos, resulta:

(a) $(2-i) + (3+4i) = 5 + 3i.$

(b) $(2+i) - i\,(3+4i) = 2 + i - 3i + 4 = 6 - 2i.$

(c) $(1+i)\cdot(2+2i) = 0 + 4i = 4i.$

(d) $(1-i)^{12} = \left[(1-i)^2\right]^6 = (-2i)^6 = -64.$

(e) $(1-i)\,(\sqrt{3}+i) = 1 + \sqrt{3} + (1-\sqrt{3})i.$

(f) $(2-i)\cdot(2+i) = 2^2 - i^2 = 5.$

(g) $(1-2i)\,(3+2i)^{-1} = \dfrac{1-2i}{3+2i} = \dfrac{(1-2i)\cdot(3-2i)}{13} = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{8}{13}i.$

(h) $i^{-45} = i^{-44}\cdot i^{-1} = \frac{1}{i} = -i.$

2. Usando a relação

$$\frac{z}{w} = \frac{z\cdot\overline{w}}{|w|^2},$$

encontrammos:

(a) $\dfrac{2}{2-3i} = \dfrac{4}{13} + \dfrac{6}{13}i.$

(b) $\dfrac{2+i}{2-3i} = \dfrac{1}{13} + \dfrac{8}{13}i.$

(c) $\dfrac{1}{(1-i)^2} = \dfrac{i}{2}.$

(d) Considerando que $i^{30} = -1$ e $i^{19} = -i$, obtemos:[1]

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = 1 + i.$$

(e) $\dfrac{5+5i}{3-4i} + \dfrac{20}{3+4i} = 3 - i.$

3. Os números x e y formam a solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{array}\right. ,$$

isto é, $x = -1$ e $y = 2$.

4. Dado um número compexo $z = x + iy$, recordemos que

$$\mathrm{Re}\,(z) = x, \quad \mathrm{Im}\,(z) = y, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \left|re^{i\theta}\right| = r.$$

(a) $z = \dfrac{1}{2+i} = \dfrac{2-i}{5} \Rightarrow \mathrm{Re}\,(z) = 2/5.$

(b) $z = \dfrac{2+i}{3+4i} = \dfrac{(2+i)\cdot(3-4i)}{25} = \dfrac{10-5i}{25} \Rightarrow \mathrm{Im}\,(z) = -1/5.$

(c) Se $z = x + iy$, então:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{|z^4|} - \frac{2xyi}{|z^4|} \Rightarrow \mathrm{Im}\left(1/z^2\right) = -\frac{2\,\mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Im}\,(z)}{|z|^4}.$$

(d) $\left|\dfrac{1+4i}{4+i}\right| = \dfrac{|1+4i|}{|4+i|} = \dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 1.$

(e) $\left|3e^{i\theta}\right| = 3$

(f) $|\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta| = \left|e^{i\theta}\right| = 1.$

5. Expresse o número complexo sob a forma $z = re^{i\theta}$, para descobrir o argumento.

(a) 0 **(b)** $-\pi/4$ **(c)** $-\pi/3$ **(d)** $-\pi/2$ **(e)** $5\pi/6$ **(f)** $-\pi$.

6. Como ilustração, faremos os ítens (c) e (d). Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, então:

(c) $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - i\,(ad + bc)$ e $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)\cdot(c - id) = (ac - bd) - i\,(ad + bc)\,.$

[1] De forma geral, temos: $i^n = (-1)^k$, se $n = 2k$, e $i^n = (-1)^k \cdot i$, se $n = 2k+1$.

(d) Primeiro, mostremos que $1/\overline{w} = \overline{(1/w)}$. De fato, notando que $1/w = \overline{w}/|w|^2$ e $1/\overline{w} = w/|w|^2$, temos:

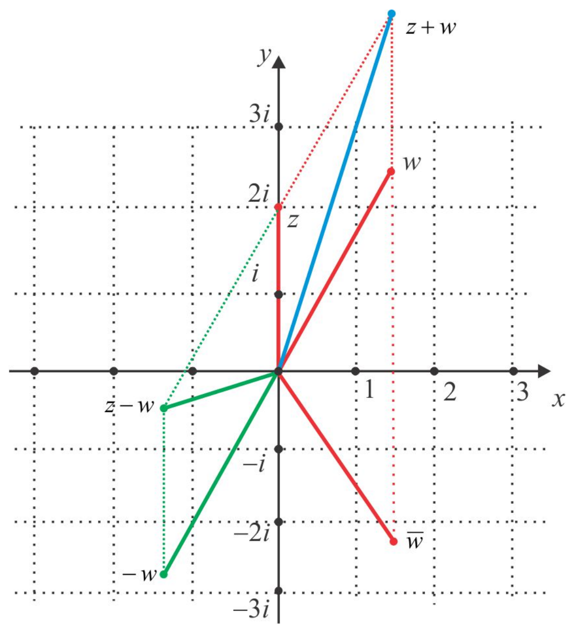
$$1/\overline{w} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{\overline{\overline{w}}}{|w|^2} = \overline{\left(\frac{\overline{w}}{|w|^2}\right)} = \overline{(1/w)}.$$

Agora, temos:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

7. Se $z = \dfrac{2+\lambda i}{1-i}$, então $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{2-\lambda}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = -\dfrac{2+\lambda}{2}$. Sendo assim, z é real se $\lambda = -2$ e será imaginário puro quando $\lambda = 2$.

8. Veja a ilustração no gráfico.



9. A comprovação pode ser feita por substituição direta de z na equação.

10. Use as propriedades da conjugação dadas no Exercício 6 da Seção 1.1.

11. Primeiro observamos que $z = a + ib$ é um número real se, e somente se, $\operatorname{Im}(z) = 0$, isto é, $b = 0$. Ora,

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

12. Como ilustração faremos os ítens **(b)** e **(c)**.

(b) Se $\varphi = \operatorname{Arg}(2+i)$, então $2+i = \sqrt{5}e^{i\varphi}$ e, portanto:

$$\frac{5i}{2+i} = \sqrt{5}\; e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)} = \sqrt{5}\operatorname{sen}\varphi + i\sqrt{5}\cos\varphi.$$

Como $\operatorname{tg}\varphi = 1/2$, segue que $\operatorname{sen}\varphi = 1/\sqrt{5}$ e $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$ e obtemos o resultado.

(c) Temos que

$$\begin{aligned} z &= -1+i = \sqrt{2}\; e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7\; e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}\; e^{\left(6\pi-\frac{3\pi}{4}\right)i} \\ &= 8\sqrt{2}\; e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 8\sqrt{2}\left(\cos(3\pi/4) - i\operatorname{sen}(3\pi/4)\right) = -8\,(1+i)\,. \end{aligned}$$

13. Considerando $z = x+iy$, temos que $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ e $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$. Assim,

$$z^2 = \bar{z}^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 2xy = 0.$$

Ora, $2xy = 0$ se, e somente se, $x = 0$ (neste caso z é imaginário puro) ou $y = 0$ (neste caso z é real).

14. Considere na Fórmula de De Moivre $n = 2$ e $n = 3$ para chegar aos resultados.

(a) No caso $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} (\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^2 &= \cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta) \Leftrightarrow \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta) \\ &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

(b) No caso $n = 3$, proceda de forma similar!

15. Das propriedades algébricas em $\mathbb{C}$ e lembrando que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, temos:

$$\begin{aligned} |1-z|^2 + |1+z|^2 &= (1-z)\cdot(1-\overline{z}) + (1+z)\cdot(1+\overline{z}) \\ &= 1 - z - \overline{z} + z\cdot\overline{z} + 1 + z + \overline{z} + z\cdot\overline{z} = 2 + 2\,|z|^2\,. \end{aligned}$$

16. Considerando que $|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$, temos:

$$\begin{aligned} (|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2 &= |\operatorname{Re}(z)|^2 + 2\,|\operatorname{Re}(z)|\,|\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2 \\ &\le 2\left(|\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2\right) = 2\,|z|^2\,. \end{aligned}$$

17. Para comprovar a relação

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

ou efetuamos a divisão de $1 - z^{n+1}$ por $1 - z$ ou usamos a propriedade distributiva e comprovamos diretamente a relação

$$(1 - z) \cdot \left(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n\right) = 1 - z^{n+1}.$$

Considerando $n = 179$ e $z = i$, temos:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{179} = \frac{1 - i^{180}}{1 - i} = \frac{1 - \left(i^2\right)^{90}}{1 - i} = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0.$$

18. Recordemos que $w = z^{1/\alpha}$ se, e somente se, $z = w^\alpha$.

(a) $\pm(1 - i)$ **(b)** $i,\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3} - i\right)$ **(c)** $\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right),\ \frac{1}{2}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$

(d) $\pm 2(1 + i)$ **(e)** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

19. As quatro raízes de $z^4 + 4 = 0$ são $1 \pm i$ e $-1 \pm i$. A fatoração do polinômio $z^4 + 4$ fica assim:

$$z^4 + 4 = \left(z^2 + 2z + 2\right)\left(z^2 - 2z + 2\right).$$

20. Considerando que $w^n = 1$, por ser w uma raiz da unidade, obtemos

$$1 + w + w^2 + w^3 + \cdots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0.$$

21. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, as igualdades $|z| = |w|$ e $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$ nos conduz ao sistema:

$$\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ x = a \end{array}\right.$$

de onde deduzimos que $y = \pm b$. Logo, $z = a \pm ib$.

22. Considerando que $|z| < 1$ e $|w| < 1$, temos:

$$|z|^2\left(1 - |w|^2\right) < 1 - |w|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 < 1 + |z|^2|w|^2.$$

Daí resulta:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w < 1 + |z|^2|\overline{w}|^2 + z \cdot \overline{w} + \overline{z} \cdot w = |1 + z \cdot \overline{w}|^2.$$

23. Se fizermos $z = re^{i\theta}$ e $w = z = \rho e^{i\varphi}$, teremos:

$$z \cdot \overline{w} = r\rho e^{i(\theta-\varphi)} = r\rho \left[\cos(\theta-\varphi) + i \operatorname{sen}(\theta-\varphi)\right]$$

e, consequentemente,

$$\operatorname{Re}(z\overline{w}) = r\rho\cos(\theta-\varphi) = |z|\,|w|\cos(\theta-\varphi).$$

Da última relação, resulta:

$$\operatorname{Re}(z\cdot\overline{w}) = |z|\,|w| \Leftrightarrow \cos(\theta-\varphi) = 1 \Leftrightarrow \theta-\varphi = 2k\pi.$$

Neste caso, temos:

$$|z+w| = \left|re^{i\theta} + \rho e^{i(\theta+2n\pi)}\right| = (r+\rho) = |z| + |w|.$$

24. Um cálculo direto nos conduz a:

$$i^n + i^{-n} = \frac{i^{2n}+1}{i^n} = \frac{(-1)^n+1}{i^n} = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2/(-1)^k, & \text{se } n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Logo, os possíveis valores assumidos por $i^n + i^{-n}$ são: 0 e ± 2.

25. Se $\theta_1 = \arg(2+i)$ e $\theta_2 = \arg(3+i)$, então $\theta_1 = \arctan(1/2)$ e $\theta_2 = \arctan(1/3)$ e teremos:

$$\arg\left[(2+i)\cdot(3+i)\right] = \theta_1 + \theta_2.$$

Por outro lado, $(2+i)\cdot(3+i) = 5+5i$ e, portanto,

$$\pi/4 = \arg\left[(2+i)\cdot(3+i)\right] = \theta_1 + \theta_2.$$

26. Se $\theta \in \arg(z)$, então

$$z^3 = 8e^{i\theta} \Rightarrow z = \sqrt[3]{8}\, e^{i\theta/3} \Rightarrow |z| = 2.$$

27. Para resolver a equação $z^n = w$, o primeiro passo é expressar o número w sob a forma polar.

(a) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3} - i\right).$

(b) $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}.$

(c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt[4]{2}\left[\pm\cos(\pi/8) \mp \operatorname{sen}(\pi/8)\right]$

(d) Considerando que $|-1-i| = \sqrt{2}$ e $\mathrm{Arg}\,(-1-i) = -3\pi/4$, temos:

$$z^7 = -1-i \Leftrightarrow z^7 = \sqrt{2}\; e^{-i3\pi/4}$$

e as raízes são dadas por:

$$z_k = 2^{1/14}\left[\cos\left(\frac{-3\pi/4+2k\pi}{7}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{-3\pi/4+2k\pi}{7}\right)\right], \quad k = 0,1,2,\ldots,6.$$

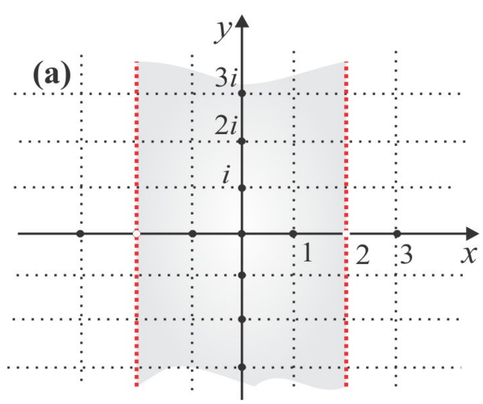
(e) Temos que $\overline{z}^3 = -i$ se, e somente se, $z^3 = i$ e as raízes desta última equação são:

$$z_k = \left[\cos\left(\pi/6 + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pi/6+2k\pi\right)\right], \quad k = 0,1,2.$$

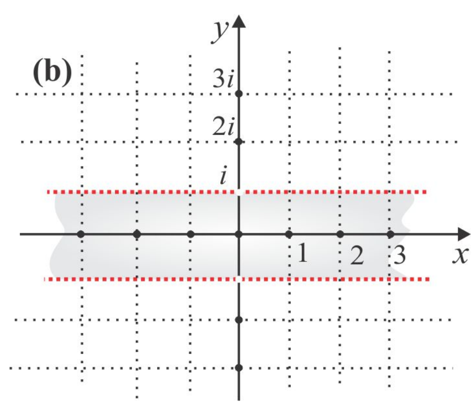
(f) $z = \pm 1$ ou $z = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)$.

1.2. TOPOLOGIA DO PLANO $\mathbb{C}$

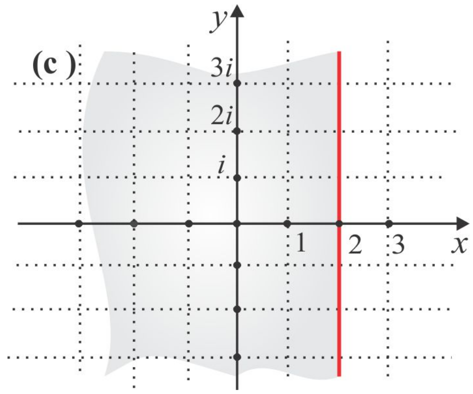
1. Em certos casos, é conveniente olhar a descrição do conjunto em coordenadas cartesiana. Para isto, consideramos $z = x + iy$.



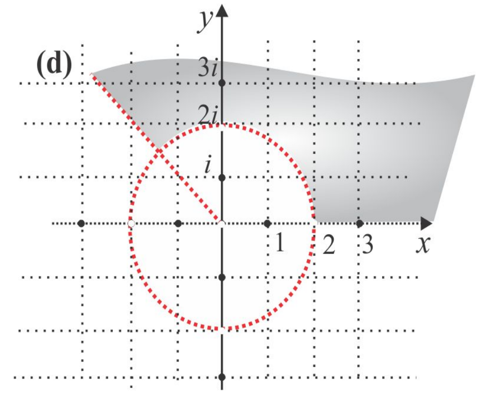
$|\mathrm{Re})z| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2.$ (A)



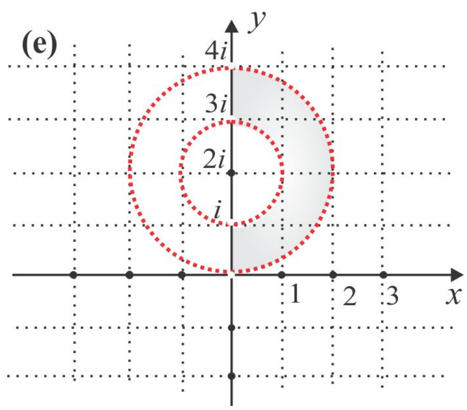
$|\mathrm{Im}\,(z)| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1.$ (A)



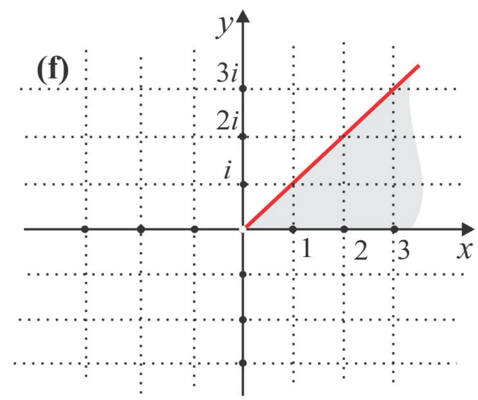
$|z-4| \leq |\overline{z}| \Leftrightarrow x \leq 2.$ (F)



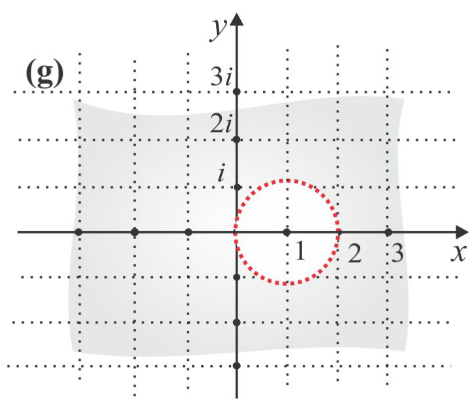
$0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2.$ (A)



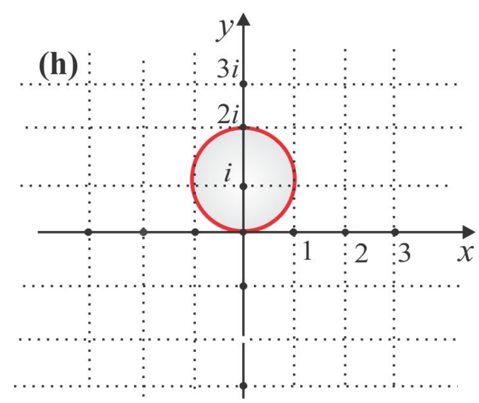
$\operatorname{Re}(z) > 0, \quad 1 < |z-2i| < 2.$ (A)



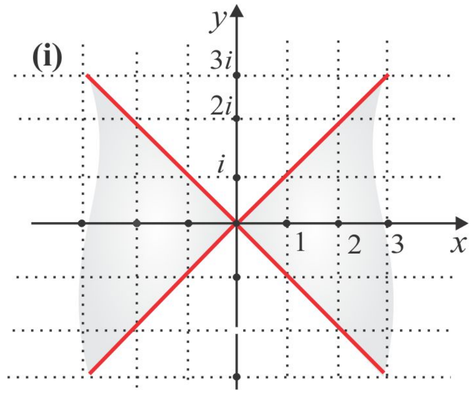
$0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, \ z \neq 0.$



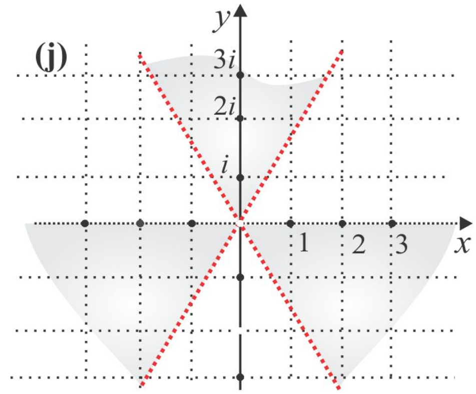
$\operatorname{Re}(z) < 1/2.$ (A)



$\operatorname{Im}(1/\overline{z}) \geq 1/2.$ (F)



$\mathrm{Re}\left(z^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$. (F)



$\mathrm{Im}\left(z^3\right) < 0 \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 < 0$. (A)

2. Como no exercício precedente, podemos considerar $z = x + iy$ e olhar a equação na forma cartesiana.

   (a) $|z-2| = |z-3i| \Leftrightarrow 4x - 6y + 5 = 0$. (Reta)

   (b) $|z-1+i| = |3+i-z| \Leftrightarrow 4x + 4y + 5 = 0$. (Reta)

   (c) $|z-i| + |z+2| = 3$. (Elipse com Focos: $z_1 = i$ e $z_2 = -2$)

   (d) $|z+1| = 2\,|z-i|$. (Circunferência de centro $z_0 = 1 + 2i$ e raio $R = \sqrt{7}$)

   (e) $\mathrm{Re}\,(1-z) = |z| \Leftrightarrow 1 - 2x = y^2$. (Parábola com Foco: $z_0 = -i/2$)

   (f) $z = z_0 + re^{i\theta} \Leftrightarrow |z - z_0| = r$. (Circunferência de centro z_0 e raio r)

3. Se $z = x + iy$, a equação se reduz a:

$$\left(\lambda^2 - 1\right)\left(x^2 + y^2\right) + 2x = 1.$$

- Se $\lambda = 0$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1$.
- Se $\lambda = 1$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1/2$.
- Se $\lambda = -1$, o conjunto é vazio.
- Nos demais casos, o conjunto é a circunferência

$$(x-a)^2 + y^2 = 1 + a^2, \quad a = \left(\lambda^2 - 1\right)^{-1}.$$

4. Considerando $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e passando a equação $|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$ para coordenadas cartesianas, encontramos

$$(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2,$$

que representa uma circunferência de centro z_0 e raio R.

5. O plano $\mathbb{C}$ é o complementar do conjunto vazio. Considerando que o plano $\mathbb{C}$ é, ao mesmo tempo, um conjunto aberto e também fechado, deduzimos que o conjunto vazio $\varnothing$ é aberto e fechado!

6. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos do plano $\mathbb{C}$ e sejam $A = S_1 \cap S_2$ e $B = S_1 \cup S_2$.

(i) Se S_1 e S_2 são abertos, entãoA e B são abertos. De fato, dado z_0 em A, então $z_0 \in S_1 \cap S_2$ e, portanto, existem δ_1 e δ_2 posiitivos, tais que

$$V_{\delta_1}(z_0) \subset S_1 \quad \text{e} \quad V_{\delta_2}(z_0) \subset S_2.$$

Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos $V_\delta(z_0) \subset S_1 \cap S_2$, isto é, $V_\delta(z_0) \subset A$. Por outro lado, dado z_1 em B, então $z_1 \in S_1$ ou $z_1 \in S_2$ e, portanto, $V_\delta(z_0) \subset B$.

(ii) Se S_1 e S_2 são fechados, então A e B são fechados. Passando aos complementares, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\backslash A &= \mathbb{C}\backslash(S_1 \cap S_2) = (\mathbb{C}\backslash S_1) \cup (\mathbb{C}\backslash S_2) \quad \text{é aberto (união de dois abertos)} \\
\mathbb{C}\backslash B &= \mathbb{C}\backslash(S_1 \cup S_2) = (\mathbb{C}\backslash S_1) \cap (\mathbb{C}\backslash S_2) \quad \text{é aberto (interseção de dois abertos)}
\end{aligned}$$

7. A interseção pode não ser um conjunto aberto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos (discos) abertos $A_n = \{z \in \mathbb{R} : |z| < 1/n\}$. É fácil deduzir que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

não é um conjunto aberto.

1.3. EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Temos que

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n = \left(2\, e^{-i\pi/3}\right)^n = 2^n\left[\cos(n\pi/3) - i\operatorname{sen}(n\pi/3)\right]$$

e $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^n$ será um número real quando $\operatorname{sen}(n\pi/3) = 0$, isto é, n for múltiplo inteiro de 3.

2. Sabemos do Exercício 11 da Seção 1.1 que w é real se, e somente se, $w = \overline{w}$. Temos:

$$\overline{w} = \frac{\overline{z} - i\overline{\overline{z}}}{\overline{\overline{z}} - i\overline{z}} = \frac{\overline{z} + iz}{z + i\overline{z}} = \frac{i\left(-i\overline{z} + z\right)}{i\left(-iz + \overline{z}\right)} = w.$$

3. As n raízes complexas de $z = re^{i\theta}$ são

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots n-1,$$

e como $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, segue que as n raízes z_k estão igualmente espaçadas ao longo da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Ressaltamos que $\arg(z_k) - \arg(z_{k-1}) = 2\pi/n$ e o comprimento do arco entre essas raízes é $s = 2\pi\sqrt[n]{r}/n$.

4. Se $z = 3 + 2i$, então $P(3 - 2i) = P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = 1 + 2i$. Logo, $|P(3 - 2i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$.

5. Da desigualdade $||z| - |w|| \leq |z - w|$, segue que $||z_2| - |-z_3|| \leq |z_2 + z_3|$ e, portanto,

$$\frac{1}{||z_2| - |z_3||} = \frac{1}{||z_2| - |-z_3||} \geq \frac{1}{|z_2 + z_3|} \Rightarrow \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||} \geq \frac{|z_1|}{|z_2 + z_3|}.$$

6. Com a notação binomial, devemos mostrar que:

$$(1+z)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n-k+1}.$$

Admitindo a sentença válida pra $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned}
(1+z)^{n+1} &= (1+z)(1+z)^n = (1+z)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k+1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}z^{n-k+1} &= 1 + z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]z^{n-k+1} \\
&= \left[1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}z^{n-k+1}\right] + \left[z^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k+1}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^{n-j} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^{n-k+1} = (1+z)^{n+1}.
\end{aligned}$$

7. Admitindo a sentença válida para $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}| \,. \end{aligned}$$

8. Usando identidades trigonométricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta} &= \frac{1 - \tan^2\theta + 2i\tan\theta}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ &= \cos(2\theta) + i\operatorname{sen}(2\theta) = e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

9. Como ilustração, faremos a parte (a). Usando a identidade

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1,$$

com $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $\theta \neq 0$, encontramos

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta+i\left(1 + \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta\right) = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i\operatorname{sen}(n+1)\theta}{(1 - \cos\theta) - i\operatorname{sen}\theta}.$$

Da última igualdade, resulta:

$$\begin{aligned} 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(n+1)\theta\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta\cdot\operatorname{sen}\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)\theta\cdot\operatorname{sen}(\theta/2)}{1 - \cos\theta}. \end{aligned}$$

(aqui usamos a identidade $\cos x - \cos y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right)$). Para concluir a parte (a), use a identidade $1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$. A identidade (b) é deduzida de forma similar, igualando as partes imaginárias

10. Tendo em vista que $|\lambda| < 1$, então $|\lambda|^2\left(1 - |z|^2\right) \leq 1 - |z|^2$ e, sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned} |z + \lambda| &\leq \left|1 + \bar{\lambda}z\right| \Leftrightarrow |z + \lambda|^2 \leq \left|1 + \bar{\lambda}z\right|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \leq 1 + |\lambda|^2|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |\lambda|^2\left(1 - |z|^2\right) \leq 1 - |z|^2\,. \end{aligned}$$

Por fim, observamos que

$$\begin{aligned} |z + \lambda| &= \left|1 + \bar{\lambda}z\right| \Leftrightarrow |z + \lambda|^2 = \left|1 + \bar{\lambda}z\right|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} = 1 + |\lambda|^2|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |z|^2\left(1 - |\lambda|^2\right) \leq 1 - |\lambda|^2 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

11. Mostrar que $\sqrt{w} = \pm\xi$ é equivalente a mostar que $w = \xi^2$. Se fizermos

$$\xi = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| + \operatorname{Re}(w)\right)} + i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| - \operatorname{Re}(w)\right)}\ \right]$$

teremos

$$\begin{aligned}
\xi^2 &= \tfrac{1}{2}\left(|w| + \operatorname{Re}(w)\right) - \tfrac{1}{2}\left(|w| - \operatorname{Re}(w)\right) \pm i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w))\sqrt{|w|^2 - \operatorname{Re}(w)^2} \\
&= \operatorname{Re}(w) \pm i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w))\sqrt{\operatorname{Im}(w)^2} = \operatorname{Re}(w) + i\operatorname{Im}(w) = w.
\end{aligned}$$

(a) Temos

$$z^2 + z + 1 = i \Leftrightarrow \left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 = -\tfrac{3}{4} + i \Leftrightarrow z + \tfrac{1}{2} = \sqrt{w}, \quad w = -\tfrac{3}{4} + i.$$

Logo,

$$z + \tfrac{1}{2} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| + \operatorname{Re}(w)\right)} + i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(|w| - \operatorname{Re}(w)\right)}\ \right] = \pm\left(\tfrac{1}{2} + i\right)$$

Assim, as raízes da equação $z^2 + z + 1 = i$ são precisamente $z = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$, isto é, $z = i$ ou $z = -1 - i$.

12. Os possíveis valores de N são $4k,\ 4k+1,\ 4k+2$ e $4k+3\ \ k \in \mathbb{N}$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja $0,\ 1,\ 2$ ou 3. Use o Exercicio 17 da Seção 1.1 para concluir. Por exemplo, se o resto da divisão é 2, então $N = 4k + 2$ e encontramos:

$$\begin{aligned}
1 + i + i^2 + \cdots + i^N &= \frac{1 - i^{N+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{4k+2}}{1 - i} = \frac{1 - \left(i^2\right)^{2k+1}}{1 - i} \\
&= \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1 + i.
\end{aligned}$$

13. Temos que $z = 2e^{-i3\pi/4}$ e substituindo na equação, encontramos:

$$\begin{aligned}
z^4 - (1+4i)z^2 + 4i &= 16\, e^{i3\pi} - (1+4i)\ 4e^{i3\pi/2} + 4i \\
&= -16 - (1+4i)(-4i) + 4i = 0.
\end{aligned}$$