



4.1. INTEGRAIS DUPLAS ITERADAS

1. Seja D a região do plano xy descrita por:

$$D : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2; \quad x, y \geq 0, \quad 0 < a < b.$$

(a) Ilustre graficamente a região D .

(b) Classifique a região D em: Tipo I (vertical simples) ou Tipo II (horizontal simples).

(c) Expresse $\iint_D f(x, y) dA$ nas duas ordens: $dx dy$ e $dy dx$.

2. Calcule as seguintes integrais sobre as regiões retangulares:

$$(a) \int_0^3 \int_1^2 (12xy^2 - 8x^3) dy dx \quad (b) \int_1^2 \int_0^1 (x - 3 \ln y) dx dy \quad (c) \int_0^2 \int_1^3 |x - 2| \sin y dx dy.$$

3. Calcule as seguintes integrais iteradas e em cada caso esboce a região de integração.

$$(a) \int_{-1}^1 \int_0^{|x|} dy dx \quad (b) \int_0^\pi \int_0^x \cos(x^2) dy dx \quad (c) \int_{-2}^1 \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy dx.$$

$$(d) \int_1^3 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} xy dy dx \quad (e) \int_0^\pi \int_{-y}^y \sin x dx dy \quad (f) \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} xy dx dy.$$

$$(g) \int_0^1 \int_{x^2}^x e^{y/x} dy dx \quad (h) \int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx \quad (i) \int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} xy dx dy.$$

$$(j) \int_0^\pi \int_{-1}^{\cos y} x \sin y dx dy \quad (k) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \quad (l) \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (x \cos y - y \cos x) dy dx.$$

$$(m) \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} xy dy dx \quad (n) \int_0^1 \int_0^x x \sin y dy dx \quad (o) \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx dy.$$

4. Inverta a ordem de integração e calcule:

$$(a) \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy \quad (b) \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy \quad (c) \int_0^\pi \int_y^\pi \cos(x^2) dx dy.$$

5. Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dA$.

(a) D é a região descrita por: $0 \leq x \leq 1$, $2x \leq y \leq 2$; e $f = e^{y^2}$.

- (b) D é a região descrita por: $0 \leq y \leq 8$, $\sqrt[3]{y} \leq x \leq 2$; e $f = xy$.
- (c) D é a região descrita por: $x \geq 0$, $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$; e $f = x^2$.
- (d) D é a região descrita por: $-1 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 4-x^2$; e $f = 1$.
- (e) D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,4)$; e $f = x^2 - y^2$.
- (f) D é a região delimitada por $y^2 = x$, $x = 0$ e $y = 1$; e $f = \exp(x/y)$.
- (g) D é a região delimitada por $y = x^2/2$ e $y = x$; e $f = x(x^2 + y^2)^{-1}$.
- (h) D é a região delimitada por $y = x$, $y = 0$, $x = 5$ e $xy = 16$; e $f = 1$.
- (i) D é a região delimitada por $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$ e $x + y = 1 + e$; e $f = 1$.
- (j) D é a região delimitada por $y = x^2$, $y = 0$ e $x + y = 2$; e $f = xy$.
- (k) D é a região triangular de vértices $(2,9)$, $(2,1)$ e $(-2,1)$; e $f = xy^2$.
- (l) D é a região retangular de vértices $(-1,-1)$, $(2,-1)$, $(2,4)$ e $(-1,4)$; e $f = 2x + y$.
- (m) D é a região delimitada por $8y = x^3$, $y = -x$ e $4x + y = 9$; e $f = x$.
- (n) D é a região do 1º quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $f = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

4.2. MUDANÇA DE VARIÁVEL EM INTEGRAL DUPLA

1. Use coordenadas polares e calcule as seguintes integrais duplas:

$$(a) \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x \, dx dy$$

$$(b) \int_1^2 \int_0^x (x^2 + y^2)^{-1} \, dy dx$$

$$(c) \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp(-x^2 - y^2) \, dy dx$$

$$(d) \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \, dA, \quad D : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x$$

$$(e) \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y) \, dA$$

$$(f) \iint_D (x + y) \, dA, \quad D : x^2 + y^2 - 2y \leq 0.$$

2. Com a mudança de variável $u = x + y$ e $v = x - y$, calcule a integral dupla

$$\iint_D (x + y)^2 \operatorname{sen}^2(x - y) \, dx dy$$

sobre a região $D : |x| + |y| \leq \pi$.

3. A fronteira da região D é o paralelogramo de vértices $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ e $(1,0)$. Use a mudança de variáveis do exercício precedente e calcule a integral dupla

$$\iint_D (x - y)^2 \cos^2(x + y) \, dx dy.$$

4. Com a mudança de variável do Exercício 2 desta seção, calcule a integral dupla:

$$\iint_D \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{x+y} \right) dA.$$

sendo D a região delimitada pelo quadrilátero de vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(4, 0)$, e $(2, 0)$.

5. Use a mudança de variáveis $u = xy$, $y = v$ e calcule a integral dupla $\iint_D (x^2 + 2y^2) dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = |x|$ e $y = 2x$.
6. Use a mudança de variáveis $x = u - v$, $y = 2u - v$ e calcule a integral dupla $\iint_D xy dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas retas $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$ e $y = x + 1$.
7. Use a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y$, $v = x - 2y$ e calcule a integral dupla da função $f(x, y) = \sqrt{x - 2y} + y^2/4$, sobre a região D delimitada pelo triângulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 2)$.
8. Calcule $\iint_D x^2 dA$, sobre a região delimitada pela cardióide $D : r = 1 - \cos \theta$.
9. Use coordenadas polares e calcule a integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$, sendo D a região do plano xy , do primeiro quadrante, entre as curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ e $y = x$.

4.3. ÁREA & VOLUME POR INTEGRAL DUPLA

1. Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e da elipse de semi-eixos a e b .
2. Em cada caso calcule, por integral dupla, a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas:
- (a) $D : x = 1, x = 2, y = -x^2$ e $y = 1/x^2$ (b) $D : x = 1, x = 4, y = -x$ e $y = \sqrt{x}$
- (c) $D : y = x^2$ e $y = 2/(1 + x^2)$ (d) $D : y^2 = -x, x - y = 4, y = -1$ e $y = 2$
- (e) $D : y = 0, x + y = 3a$ e $y^2 = 4ax, a > 0$ (f) $D : y = e^x, y = \operatorname{sen} x, x = \pi$ e $x = -\pi$.
3. Por integração dupla, calcule a área da região compreendida entre o círculo $r = a$ e a cardióide $r = a(1 + \operatorname{sen} \theta)$.
4. Use a mudança de variável: $x^2 = yu$; $y^2 = xv$ e calcule a área da região delimitada pelas parábolas $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$ e $y^2 = 2x$.

5. Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x$, e $y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$.

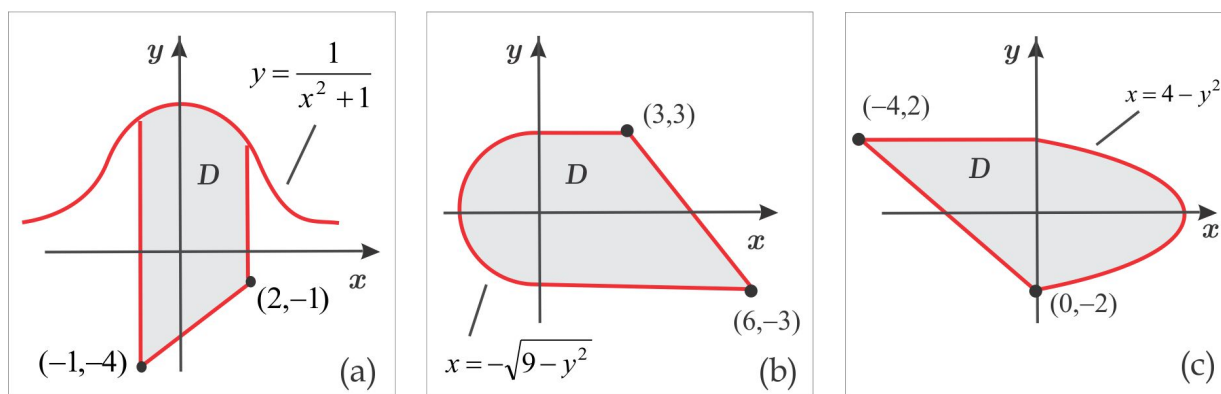
6. Em coordenadas polares, a área de certa região D vem dada por:

$$A(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} r dr d\theta.$$

Identifique e calcule o valor da área.

7. Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

8. Calcule, por integral dupla, a área da região D indicada na figura:



9. Calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$ e pela curva $xy = 16$.
10. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.
11. A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$, e a parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule o volume do sólido.
12. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy , nas laterais pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.
13. Ao calcular o volume de um sólido Ω , abaixo de um parabolóide e acima de certa região D do plano xy , obteve-se a seguinte expressão:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Identifique a região D , expresse $\text{vol}(\Omega)$ por uma integral dupla iterada com a ordem invertida e, em seguida, calcule a integral.

14. Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.
15. Um sólido Ω , no primeiro octante, tem seu volume calculado pela expressão:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx.$$

Identifique o sólido e calcule o seu volume. Idem para:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy dx.$$

16. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$, $z = 0$ e $y = x$.
17. Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.
18. Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio $R = 5$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
19. Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.
20. Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1$ e $z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.
21. Verifique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$ divide o cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$, em dois sólidos de volumes iguais.
22. Calcule o volume da porção do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
23. Calcule o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

4.4. MASSA, CENTRO DE MASSA & MOMENTO DE INÉRCIA

1. Calcule a massa de um disco de raio a , se a densidade no ponto (x, y) do disco é proporcional ao quadrado da distância a um ponto da circunferência.
2. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isóceles com lados iguais de comprimento a . A densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é diretamente proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa. Determine o centro de massa da lâmina.

3. Determine a massa, o centro de massa e os momentos de inércia I_x , I_y da lâmina de densidade $\sigma(x, y)$ e formato D :
- (a) $D : y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$; $\sigma = x + y$ (b) $D : y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $y = 0$; $\sigma = y^2$
- (c) $D : y = x^2$, $y = 4$; $\sigma = ky$ (d) $D : x^2 + y^2 = 1$; $\sigma = |x|$.
4. Uma lâmina tem a forma da região D do plano xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$. Determine o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é proporcional à distância do ponto ao eixo y .
5. Uma lâmina homogênea, isto é, com densidade constante, tem o formato de um quadrado de lado a . Determine o momento de inércia com relação a um lado, a uma diagonal e ao centro de massa.

4.5. INTEGRAL DUPLA IMPRÓPRIA

As integrais duplas dos Exercícios 1, 2 e 3 abaixo diferem daquelas tratadas até o momento em dois aspectos:

- (i) ou a região de integração D não é limitada;
- (ii) ou a função $f(x, y)$ que se deseja integrar torna-se ilimitada na região D .

Esses são os casos em que a integral dupla recebe a denominação de *integral dupla imprópria*.

1. Calcule as seguintes integrais impróprias:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{(b)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & \text{(c)} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\
 \text{(d)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{xy}} & \text{(e)} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy & \text{(f)} \iint_{x^2+y^2 \geq 1} (1+x^2+y^2)^{-1} dx dy \\
 \text{(g)} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy & \text{(h)} \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{\sqrt{|x-y|}} & \text{(i)} \iint_D e^{x/y} dx dy; D : 0 \leq x \leq y^2, 0 < y \leq 1
 \end{array}$$

2. Use o resultado do Exercício 1(g) e deduza que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
3. Mostre que a função $f(x, y) = 1/(x - y)$ não é integrável em $D : 0 \leq y < x \leq 1$, embora seja contínua neste conjunto. Este exemplo mostra que *não basta ser contínua para ser integrável*.

4.6. INTEGRAIS TRIPLAS ITERADAS

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. A seguir mostra-se algumas situações para o cálculo da integral $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$.

(a) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ e } \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$.

Neste caso, D é a projeção no plano xy da região de integração Ω e o cálculo da integral tripla se reduz ao cálculo de uma integral simples seguida de uma integral dupla:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA.$$

(b) $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \text{ e } p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\}$.

Neste caso, a integral tripla é calculada como uma integral iterada:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx.$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região Ω acarretará inversões na ordem de integração.

1. Expresse a integral tripla $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$ como uma integral iterada e, em seguida, calcule o seu valor no caso em que $f(x, y, z) = xyz$ e a região Ω é descrita por:

(a) $-1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2$ (b) $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - y$

(c) $0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y$ (d) $0 \leq x \leq z^2, x - z \leq y \leq x + z, 1 \leq z \leq 2$.

2. Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

(a) $\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2 - y^2}} f(x, y, z) dx dy dz$ (b) $\int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^1 f(x, y, z) dz dx dy$

3. Em cada caso, identifique o sólido Ω e calcule seu volume por integração tripla.

- (a) Ω é delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$;
 (b) Ω é delimitado pelo cilindro $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = z, x = 0$ e $y = 0$;
 (c) Ω é delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$ e $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y + z = 6$ e $y = 0$;
 (d) Ω é delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. Seja Ω a região delimitada pelas superfícies: $x = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$ e $z = 1 - y^2$.

(a) Ilustre graficamente o corpo Ω .

(b) Mostre que $\iiint_{\Omega} (1 - y) dV = 32/15$.

4.7. MUDANÇA DE VARIÁVEL EM INTEGRAL TRIPLA

1. As coordenadas cilíndricas de um ponto P são: $r = 1$, $\theta = \pi/4$ e $z = 1$. Determine as coordenadas cartesianas e esféricas do ponto P .

2. Em cada caso, identifique a superfície descrita em coordenadas cilíndricas.

(a) $r = 4$ (b) $r = 2 \cos \theta$ (c) $z = 2r$ (d) $3r^2 + z^2 = 9$ (e) $r^2 + z^2 = 16$.

3. Identifique a região do \mathbb{R}^3 descrita em coordenadas esféricas por:

(a) $\rho = 3$ (b) $\rho = 2 \cos \varphi$ (c) $\theta = \pi/6$ (d) $\varphi = \pi/4$

4. As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para coordenadas cilíndricas e esféricas.

(a) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (b) Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$

(c) Cone: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ (d) Parabolóide: $4z = x^2 + y^2$.

5. Por integração tripla, calcule o volume de um sólido esférico de raio R . Calcule a integral tripla de duas maneiras: primeiro use coordenadas cilíndricas e, depois, coordenadas esféricas.

6. Calcule o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$.

7. Use *coordenadas cilíndricas* e calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz dx dy \quad (b) \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} (x^2 + y^2) \, dz dy dx$$

$$(c) \iiint_{\Omega} xy \, dV; \Omega : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \quad (d) \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^1 x \, dz dy dx$$

8. Use *coordenadas esféricas* e calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz dy dx.$$

$$(b) \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz dx dy.$$

9. Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume do sólido Ω , nos seguintes casos:

- (a) Ω é delimitado pelas superfícies: $S_1 : x^2 + y^2 = az$, $S_2 : x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$, e $S_3 : z = 0$.
- (b) Ω é delimitado pelos parabolóides $x^2 + y^2 = z$ e $x^2 + y^2 + 1 = 2z$.
- (c) Ω é a intersecção da bola $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ com o cone $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z \geq 0$.
- (d) Ω é delimitado pelo parabolóide $-2(x^2 + y^2) = z$ e pelo plano $z = -4$.
- (e) Ω é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4y$, limitado superiormente pelo cone $x^2 + z^2 = y^2$.

10. Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido resultante vem dado por:

$$V = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r dr dz d\theta,$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule o valor de V .

4.8. CONSIDERAÇÕES FÍSICAS

Representamos por $\sigma(x, y, z)$ a *densidade volumétrica* de um sólido Ω . Quando a densidade for a mesma em cada ponto do sólido, este será denominado *sólido homogêneo*. Por definição, a densidade é igual a massa por unidade de volume, isto é, $\sigma = \frac{m}{V}$ e a integral tripla $\iiint_{\Omega} \sigma(x, y, z) dV$ é interpretada como a massa de Ω .

Procedendo como no caso bidimensional, em que o objeto foi interpretado como uma lâmina plana, para um sólido Ω as coordenadas do *centro de massa* são calculadas pelas fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \sigma dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \sigma dV \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \sigma dV$$

e o *momento de inércia* em relação a um eixo L é calculado por:

$$I_L = \iiint_{\Omega} \sigma(x, y, z) \delta^2 dV,$$

sendo $\delta = \delta(x, y, z)$ a distância do ponto $P(x, y, z)$ do sólido Ω ao eixo L . No caso em que o eixo L é o eixo coordenado x , y ou z , deduz-se facilmente as seguintes fórmulas para os momentos de inércia I_x , I_y e I_z :

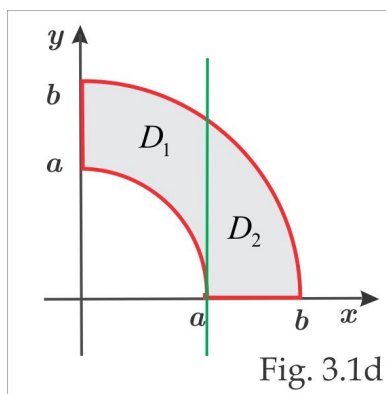
$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \sigma dV, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \sigma dV \quad \text{e} \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \sigma dV.$$

1. Calcule a massa de uma bola de raio R , se densidade de massa é diretamente proporcional à distância r ao centro da esfera. Qual seria a massa da bola, se a densidade fosse inversamente proporcional à r ?
2. Determine a massa do sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 4$, se a densidade em um ponto P do cone é proporcional à distância do ponto P ao eixo z .
3. Calcule a massa do sólido cortado da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao plano xy .
4. Qual o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, com densidade $\sigma(x, y, z) = kz$.
5. Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo de um cilindro circular reto de altura H e raio R , se a densidade σ no ponto (x, y, z) é $\sigma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.
6. Mostre que o *centróide*¹ do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ é o ponto $C(0, 0, 3R/8)$.
7. Qual o centróide do sólido delimitado abaixo pelo cone $\varphi = \frac{\pi}{4}$ e acima pela esfera $\rho = a$?

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.1

1. A ordem de integração $dydx$ é adequada às regiões do tipo **vertical simples**, isto é, regiões descritas por $D : a \leq x \leq b$; $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, enquanto $dx dy$ é a ordem utilizada para regiões do tipo **horizontal simples**, ou seja aquelas descritas por $D : c \leq y \leq d$; $p(y) \leq x \leq q(y)$.



¹centróide é a denominação dada ao centro de massa de um sólido homogêneo com densidade $\sigma = 1$.

Em alguns casos é necessário particionar a região como ocorre com a figura 3.1(d). Neste caso, temos $D = D_1 + D_2$ e, assim:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_a^b \int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

2. (a) -36 (b) $\frac{7}{2} - 6 \ln 2$ (c) $1 - \cos 2$.

3. Como ilustração, faremos o cálculo em alguns casos.

(a) $I = \int_{-1}^1 \int_0^{|x|} dy dx = \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

(b) Temos:

$$I = \int_0^\pi \int_0^x \cos(x^2) dy dx = \int_0^\pi x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi^2} \cos u du = \frac{1}{2} \text{sen } \pi^2.$$

(c) $9/2$ (d) 1 .

(e) $I = -\int_0^\pi [\cos y - \cos(-y)] dx = -\int_0^\pi 0 dx = 0.$

(f) $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} y \left[\frac{x^2}{2} \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} y \cdot (1 - 2y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}/2} (y - 2y^3) dy = 1/16.$

(g) $I = \int_0^1 x(e - e^x) dx = \frac{e}{2} - (xe^x - e^x)|_0^1 = \frac{1}{2}e - 1.$

(h) $e^2 - 3$ (i) $-8/3$ (j) $-2/3$ (k) $1/3$ (l) 0 (m) $1/48$ (n) $\frac{3}{2} - \text{sen } 1 - \cos 1$ (o) $8/3$.

4. (a) $\frac{1}{2}(e - 1)$ (b) $\frac{1}{3}(1 - \cos 1)$ (c) $\frac{1}{2} \text{sen}(\pi^2)$.

5. Para facilitar a compreensão, siga as seguintes etapas para calcular as integrais múltiplas:

- ▶ Esboce a região de integração.
- ▶ Escolha a ordem de integração adequada.
- ▶ Transforme a integral múltipla em um integral iterada (repetida) e calcule-a.

(a) Integrando na ordem $dx dy$, encontramos:

$$I = \int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2} dx dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \cdot e^{y^2} dy = \frac{1}{4} \int_0^4 e^t dt = \frac{1}{4}(e^4 - 1).$$

(b) Na ordem $dy dx$, temos:

$$I = \int_0^2 \int_0^{x^3} xy dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^7 dx = 16.$$

(c) O cálculo torna-se mais simples em coordenadas polares. Temos

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = 3\pi/8.$$

(d) Na ordem $dydx$, temos

$$I = \int_{-1}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} dy dx = \int_{-1}^2 \left(4 - x^2 + \sqrt{4-x^2}\right) dx = 9 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}.$$

(e) -3 (f) $1/2$

(g) Em coordenadas polares, o cálculo se reduz a:

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sec \theta \tan \theta} \cos \theta dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \tan \theta d\theta = -2 \ln(\sqrt{2}/2) = \ln 2.$$

(h) $8 + 16 \ln(5/4)$

(i) A partir da ilustração gráfica, deduzimos que a reta $x + y = 1 + e$ intercepta as curvas $y = e^x$ e $y = \ln x$ nos pontos de abscissa $x = 1$ e $x = e$, respectivamente. Um cálculo direto nos dá:

$$\iint_D dx dy = \frac{1}{2}e^2 + e - 3.$$

(j) $1/2$ (k) $7/24$ (l) $75/2$ (m) $209/30$ (n) $7/24$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.2

1. Se a região D do plano xy é descrita em coordenadas polares por:

$$D : a \leq r \leq b, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,$$

então temos a fórmula de mudança de variável

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

(a) $I = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r^3 \cos \theta dr d\theta = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = 0.$

(b) Em coordenadas polares a região de integração é governada pelas desigualdades

$$0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad 1/\cos \theta \leq r \leq 2/\cos \theta.$$

Logo,

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos \theta}^{2/\cos \theta} \left(\frac{1}{r^2} \cdot r\right) dr d\theta = \int_0^{\pi/4} [\ln(2/\cos \theta) - \ln(1/\cos \theta)] d\theta = \frac{\pi}{4} \ln 2.$$

(c) $\frac{\pi}{2}[1 - \exp(-a^2)]$.

(d) Veja nas suas anotações de Cálculo 2 o valor de $\int \sec^3 \theta d\theta$, que será usado aqui.

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{3/\cos \theta} r^2 dr d\theta = 9 \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta = \frac{9}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})].$$

(e) $\pi/4$.

(f) $I = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \operatorname{sen} \theta} r^2 (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) dr d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 \theta (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta) d\theta = \pi$.

2. $\pi^4/3$.

3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} (\operatorname{sen} 6 - \operatorname{sen} 2)$.

4. Com a mudança sugerida, a integral se transforma em:

$$\int_2^4 \int_0^u \operatorname{sen}(v/u) dv du = \frac{1}{2} \int_2^4 u(1 - \cos 1) du = 3 - 3 \cos 1.$$

5. $\frac{15}{8}$.

6. 7.

7. 74/15.

8. $49\pi/32$.

9. $\frac{1}{9}(16 - 10\sqrt{2})$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.3

1. πR^2 e πab .

2. (a) $\frac{17}{6}$ (b) $\frac{73}{6}$ (c) $\pi + \frac{2}{3}$ (d) $\frac{33}{2}$ (e) $\frac{10}{3}a^2$ (f) $e^\pi - e^{-\pi}$.

3. $a^2(2 + \pi/4)$.

4. 1/3

5. $\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$.

6. $2 + \pi/4$.

7. $\frac{20\sqrt{15}}{3}$.
8. (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{15}{2} + \operatorname{arctg} 2$ (b) $27 + 9\pi/2$ (c) $56/3$.
9. $8 + 16 \ln 2$
10. $1/6$.
11. $\frac{1}{2}\pi a^3$.
12. $625/12$.
13. $4/3$.
14. $16a^3/3$.
15. $\frac{1}{6}$ e $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.
16. $1/3$.
17. $32/9$.
18. $256\pi/3$.
19. $2/3$.
20. $88/105$.
21. Cada parte da divisão tem volume 8π .
22. $\frac{\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$.
23. $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.4

1. $3k\pi a^4/2$.
2. $C_M(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5})$.
3. (a) $M = \frac{2349}{20}$; $C_M(6.35, 0.41)$; $I_x = 269, 04$; $I_y = 5194, 13$.

(b) $M = \frac{32}{3}$; $C_M(16/3, 9/7)$; $I_x = 32$; $I_y = 1024/9$.

(c) $M = \frac{128k}{5}$; $C_M(0, 5/7)$; $I_x = 512k/7$; $I_y = 512k/21$.

(d) $M = \frac{4}{3}$; $C_M(0, 0)$; $I_x = \frac{4}{15}$; $I_y = 2/3$.

4. $C_M(\frac{20}{7}, 0)$.

5. $I_L = \sigma a^4/3$; $I_D = \sigma a^4/6$ e $I_O = 2\sigma a^4/3$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.5

1. (a) 2π (b) 2π (c) $-\pi$ (d) 4 (e) $\pi/8$ (f) ∞ (g) π (h) $8/3$ (i) $1/2$.

2. Do Exercício 1(g) desta seção, temos:

$$\begin{aligned} \pi &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) \exp(-y^2) dy dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt \right]^2. \end{aligned}$$

3. Integre a função $f(x, y)$ sobre a região $D_\delta : \delta \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x - \delta$ e observe que:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D_\delta} f(x, y) dA = \infty.$$

A integral é, portanto, divergente!

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.6

1. (a) $9/8$ (b) 0 (c) $671/4320$ (d) $1022/27$.

2. (a) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz dy dx$ (b) $\int_0^1 \int_x^1 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz dy dx$.

3. (a) $256/15$ (b) $4/15$ (c) $304/15$ (d) $32/9$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.7

1. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z = 1$; $\rho = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2. Veja as relações entre coordenadas cartesianas e cilíndricas no Exercício 2.9(7g).

(a) O cilindro circular reto: $x^2 + y^2 = 16$.

(b) O cilindro circular reto: $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

(c) A folha superior do cone: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$.

(d) O elipsóide: $9x^2 + 9y^2 + 3z^2 = 27$.

(e) A esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

3. Veja as relações entre coordenadas cartesianas e esféricas.

(a) A esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 3.

(b) A esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$.

(c) Parte do plano $y = x$.

(d) O cone $z^2 = x^2 + y^2$.

4. Veja as fórmulas de mudança de coordenadas cartesianas para curvilíneas.

(a) Cilíndricas: $r^2 + z^2 = 4$ Esféricas: $\rho = 2$. (ESFERA DE RAIOS $R = 2$)

(b) Cilíndricas: $r = 2$; Esféricas: $\rho^2 \sin^2 \varphi = 4$. (CILINDRO)

(c) Cilíndricas: $r^2 - 4z^2 = 0$; Esféricas: $\rho^2 \cos 2\varphi = 1$. (CONE)

(d) Cilíndricas: $4z = r^2$; Esféricas: $\rho = 4 \cot \varphi \operatorname{cosec} \varphi$. (PARABOLOIDE)

5. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

6. $\frac{4}{3}\pi abc$.

7. (a) $7\pi/16$ (b) $10\pi/3$ (c) 0 (d) $1/3$.

8. (a) $\frac{256\pi}{5}(\sqrt{2} - 1)$ (b) $\pi R^4/16$.

9. (a) $\frac{3}{2}\pi a^3$ (b) $\pi/4$ (c) π (d) 4π (e) $8\pi/3$.

10. $r = 1$; $R = 2$ e $V = 4\pi\sqrt{3}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.8

1. $k\pi R^4$ e $2k\pi R^2$.

2. $128k\pi/3$.

3. $29k\pi/32$.

4. $C_M(0, 0, \frac{8R}{15})$.

5. $I_z = \frac{2}{5}k\pi HR^5$.

6. $C_M(0, 0, \frac{3R}{8})$.

7. $\text{vol}(\Omega) = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})\pi a^3$.
