1.1. INTEGRAIS DUPLAS ITERADAS

1. Em cada caso abaixo, observe a região D e escreva a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$ como uma integral iterada (repetida) de modo a obter o cálculo mais simples.

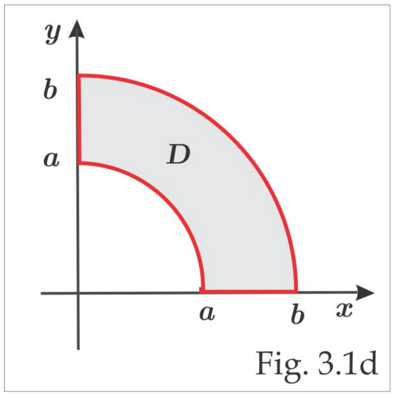


Fig. 3.1d

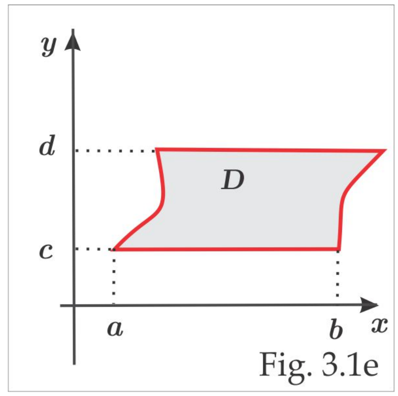


Fig. 3.1e

2. Calcule as seguintes integrais sobre as regiões retangulares:

(a) $\displaystyle\int_0^3\int_1^2 \left(12xy^2-8x^3\right)dydx$ **(b)** $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (x-3\ln y)\,dxdy$ **(c)** $\displaystyle\int_0^2\int_1^3 |x-2|\,\mathrm{sen}\,y dxdy.$

3. Calcule as seguintes integrais iteradas e em cada caso esboce a região de integração.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{|x|} dydx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^x \cos\left(x^2\right)dydx$ **(c)** $\displaystyle\int_{-2}^1\int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx.$

(d) $\displaystyle\int_1^3\int_{1-x}^{\sqrt{x}} xydydx$ **(e)** $\displaystyle\int_0^\pi\int_{-y}^{y} \mathrm{sen}\,xdxdy$ **(f)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} xydxdy.$

(g) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} e^{y/x}dydx$ **(h)** $\displaystyle\int_0^2\int_1^{e^x} dydx$ **(i)** $\displaystyle\int_0^4\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} xydxdy.$

(j) $\displaystyle\int_0^\pi\int_{-1}^{\cos y} x\,\mathrm{sen}\,ydxdy$ **(k)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydydx$ **(l)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} (x\cos y-y\cos x)\,dydx.$

(m) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} xydydx$ **(n)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x} x\,\mathrm{sen}\,ydydx$ **(o)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} ydxdy.$

4. Inverta a ordem de integração e calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x e^{x^2}dydx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \mathrm{sen}\left(x^3\right)dxdy$ **(c)** $\displaystyle\int_0^\pi\int_y^\pi \cos\left(x^2\right)dxdy.$

5. Em cada caso, esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$.

(a) D é a região descrita por: $0 \le x \le 1,\ 2x \le y \le 2;$ e $f = e^{y^2}$.

(b) D é a região descrita por: $0 \le y \le 8,\ \sqrt[3]{y} \le x \le 2;$ e $f = xy$.

(c) D é a região descrita por: $x \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2;$ e $f = x^2$.

(d) D é a região descrita por: $-1 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le 4 - x^2;$ e $f = 1$.

(e) D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,4)$; e $f = x^2 - y^2$.

(f) D é a região delimitada por $y^2 = x,\ x = 0$ e $y = 1;$ e $f = \exp(x/y)$.

(g) D é a região delimitada por $y = x^2/2$ e $y = x;$ e $f = x\left(x^2 + y^2\right)^{-1}$.

(h) D é a região delimitada por $y = x,\ y = 0,\ x = 5$ e $xy = 16;$ e $f = 1$.

(i) D é a região delimitada por $y = e^x,\ y = \ln x,\ x + y = 1$ e $x + y = 1 + e;$ e $f = 1$.

(j) D é a região delimitada por $y = x^2,\ y = 0$ e $x + y = 2;$ e $f = xy$.

(k) D é a região triangular de vértices $(2,9)$, $(2,1)$ e $(-2,1)$; e $f = xy^2$.

(l) D é a região retangular de vértices $(-1,-1)$, $(2,-1)$ $(2,4)$ e $(-1,4)$; $f = 2x + y$.

(m) D é a região delimitada por $8y = x^3,\ y = -x$ e $4x + y = 9;$ e $f = x$.

(n) D é a região do 1º quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

1.2. MUDANÇA DE VARIÁVEL EM INTEGRAL DUPLA

1. Use coordenadas polares e calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\,dy$

(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^x \left(x^2 + y^2\right)^{-1} dy\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dy\,dx$

(d) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA,\ D: 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x$

(e) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \left(x^2 + y\right)\,dA$

(f) $\displaystyle\iint_D (x + y)\,dA,\ D: x^2 + y^2 - 2y \le 0.$

2. Com a mudança de variável $u = x + y$ e $v = x - y$, calcule a integral dupla

$$\iint_D (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\,dx\,dy$$

sobre a região $D: |x| + |y| \le \pi$.

3. A fronteira da região D é o paralelogramo de vértices $(0,1)$, $(1,2)$ $(2,1)$ e $(1,0)$. Use a mudança de variáveis do exercício precedente e calcule a integral dupla

$$\iint_D (x-y)^2 \cos^2(x+y)\,dxdy.$$

4. Com a mudança de variável do Exercício 2 desta seçaõ, calcule a integral dupla:

$$\iint_D \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA.$$

sendo D a região delimitada pelo quadrilátero de vértices $(1,1)$, $(2,2)$ $(4,0)$, e $(2,0)$.

5. Use a mudança de variáveis $u = xy,\ y = v$ e calcule a integral dupla $\iint_D \left(x^2+2y^2\right) dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas curvas $xy = 1,\ xy = 2,\ y = |x|$ e $y = 2x$.

6. Use a mudança de variáveis $x = u - v,\ y = 2u - v$ e calcule a integral dupla $\iint_D xy dA$, sendo D a região do plano xy delimitada pelas retas $y = 2x,\ y = 2x - 2,\ y = x$ e $y = x + 1$.

7. Use a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y,\ v = x - 2y$ e calcule a integral dupla da função $f(x,y) = \sqrt{x-2y} + y^2/4$, sobre a região D delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0), (4,0)$ e $(4,2)$.

8. Calcule $\displaystyle\iint_D x^2 dA$, sobre a região delimitada pela cardióide $D: r = 1 - \cos\theta$.

9. Use coordenadas polares e calcule a integral dupla $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dA$, sendo D a região do plano xy, do primeiro quadrante, delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ e $y = x$.

1.3. ÁREA & VOLUME

1. Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e da elipse de semi-eixos a e b.

2. Em cada caso calcule, por integral dupla, a área da região D do plano xy delimitada pelas curvas indicadas:

(a) $D: x = 1,\ x = 2,\ y = -x^2 \quad \text{e} \quad y = 1/x^2$ (b) $D: x = 1,\ x = 4,\ y = -x \quad \text{e} \quad y = \sqrt{x}$

(c) $D: y = x^2 \quad \text{e} \quad y = 2/\left(1+x^2\right)$ (d) $D: y^2 = -x,\ x - y = 4,\ y = -1 \quad \text{e} \quad y = 2$

(e) $D: y = 0,\ x + y = 3a \quad \text{e} \quad y^2 = 4ax,\ a > 0$ (f) $D: y = e^x,\ y = \operatorname{sen} x,\ x = \pi \quad \text{e} \quad x = -\pi$.

3. Por integração dupla, calcule a área da região compreendida entre o círculo $r = a$ e a cardióide $r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$.

4. Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$ e $y^2 = 2x$. (use a mudança de variável $x^2 = yu$ e $y^2 = xv$)

5. Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x$, e $y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x$ e $x^2 + y^2 = 4x$.

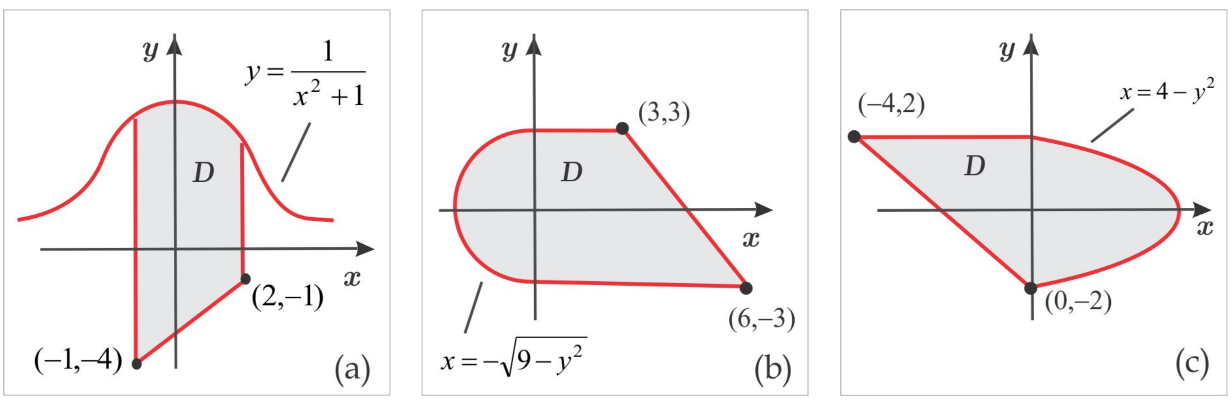
6. Em coordenadas polares, a área de certa região D vem dada por:

$$A(D) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} r dr d\theta.$$

Identifique e calcule o valor da área.

7. Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

8. Calclule, por integral dupla, a área da região D indicada na figura:



9. Calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$ e pela curva $xy = 16$.

10. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

11. A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, $a > 0$, e a parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule o volume do sólido.

12. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy, nas laterais pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.

13. Ao calcular o volume de um sólido Ω, abaixo de um parabolóide e acima de certa região D do plano xy, obteve-se a seguinte expressão:
$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^y \left(x^2 + y^2\right) dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$
Identifique a região D, expresse $\text{vol}(\Omega)$ por uma integral dupla iterada com a ordem invertida e, em seguida, calcule a integral.

14. Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + z^2 = a^2,\ a > 0$.

15. Um sólido Ω no primeiro octante tem seu volume calculado pela expressão:
$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx.$$
Identifique o sólido e calcule o seu volume. Idem para:
$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\, dydx.$$

16. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0,\ z = 0$ e $y = x$.

17. Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.

18. Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio $R = 5$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

19. Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$ e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

20. Calucule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1$ e $z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.

21. Verfique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$ divide o cilindro $x^2 + y^2 = 4,\ 0 \leq z \leq 4$, em dois sólidos de volumes iguais.

22. Calcule o volume da porção do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

23. Calcule o volume da região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

1.4. MASSA, CENTRO DE MASSA & MOMENTO DE INÉRCIA

1. Calcule a massa de um disco de raio a, se a densidade no ponto (x, y) do disco é proporcional ao quadrado da distância a um ponto da circunferência.

2. Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isóceles com lados iguais de comprimento a. A densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é diretamente proporcional ao quadrado da distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa. Determine o centro de massa da lâmina.

3. Determine a massa, o centro de massa e os momentos de inércia I_x, I_y da lâmina de densidade $\sigma(x, y)$ e formato D :

   (a) $D : y = \sqrt{x},\ x = 9,\ y = 0;\ \sigma = x + y$ **(b)** $D : y = \sqrt[3]{x},\ x = 8,\ y = 0;\ \sigma = y^2$

   (c) $D : y = x^2,\ y = 4;\ \sigma = ky$ **(d)** $D : x^2 + y^2 = 1;\ \sigma = |x|$.

4. Uma lâmina tem a forma da região D do plano xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$. Determine o centro de massa da lâmina, se a densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é proporcional à distância do ponto ao eixo y.

5. Uma lâmina homogênea, isto é, com densidade constante, tem o formato de um quadrado de lado a. Determine o momento de inércia com relação a um lado, a uma diagonal e ao centro de massa.

1.5. INTEGRAL DUPLA IMPRÓPRIA

As integrais duplas dos Exercícios 1, 2 e 3 abaixo diferem daquelas tratadas até o momento em dois aspectos:

(i) ou a região de integração D não é limitada;

(ii) ou a função $f(x, y)$ que se deseja integrar torna-se ilimitada na região D.

Esses são os casos em que a integral dupla recebe a denominação de *integral imprópria*.

1. Calcule as seguintes integrais impróprias:

   (a) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ (c) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

   (d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}$ (e) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ (f) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\ge 1} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$

   (g) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ (h) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}$ (i) $\displaystyle\iint_D e^{x/y}\,dxdy;\ D : 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1$

2. Use o resultado do Exercício 1(g) e deduza que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

3. Mostre que a função $f(x,y) = 1/(x-y)$ não é integrável em $D : 0 \le y < x \le 1$, embora seja contínua neste conjunto. Este exemplo mostra que *não basta ser contínua para ser integrável*.

1.6. INTEGRAIS TRIPLAS ITERADAS

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. A seguir mostra-se algumas situações para o cálculo da integral $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dV$.

(a) $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ (x,y) \in D \text{ e } \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\right\}.$

Neste caso, D é a projeção no plano xy da região de integração Ω e o cálculo da integral tripla se reduz ao cálculo de uma integral simples seguida de uma integral dupla:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dA.$$

(b) $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \text{ e } p(x,y) \le z \le q(x,y)\right\}.$

Neste caso, a integral tripla é calculada como uma integral iterada:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \left\{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)\, dz\right] dy\right\} dx.$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região Ω acarretará inversões na ordem de integração.

1. Expresse a integral tripla $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dV$ como uma integral iterada e, em seguida, calcule o seu valor no caso em que $f(x,y,z) = xyz$ e a região Ω é descrita por:

   (a) $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2$ **(b)** $-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y},\ 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 4-y$

   (c) $0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1,\ 0 \le z \le x+y$ **(d)** $0 \le x \le z^2,\ x-z \le y \le x+z,\ 1 \le z \le 2.$

2. Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{(z-1)^2-y^2}} f(x,y,z)\, dxdydz$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\, dzdxdy$

3. Em cada caso, identifique o sólido Ω e calcule seu volume por integração tripla.

(a) Ω é delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0$;

(b) Ω é delimitado pelo cilindro $z = 1 - y^2$ e pelos planos $x = z$, $x = 0$ e $y = 0$;

(c) Ω é delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$ e $z = 4 - x^2$e pelos planos $y + z = 6$ e $y = 0$;

(d) Ω é delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1.7. MUDANÇA DE VARIÁVEL EM INTEGRAL TRIPLA

1. As coordenadas cilíndricas de um ponto P são: $r = 1$, $\theta = \pi/4$ e $z = 1$. Determine as coordenadas cartesianas e esféricas do ponto P.

2. Em cada caso, identifique a superfície descrita em coordenadas cilíndricas.

   (a) $r = 4$ **(b)** $r = 2\cos\theta$ **(c)** $z = 2r$ **(d)** $3r^2 + z^2 = 9$ **(e)** $r^2 + z^2 = 16$.

3. Identifique a região do $\mathbb{R}^3$ descrita em coordenadas esféricas por:

   (a) $\rho = 3$ **(b)** $\rho = 2\cos\varphi$ **(c)** $\theta = \pi/6$ **(d)** $\varphi = \pi/4$

4. As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para coordenadas cilíndricas e esféricas.

   (a) Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **(b)** Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$
   (c) Cone: $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$ **(d)** Parabolóide: $4z = x^2 + y^2$.

5. Por integração tripla, calcule o volume de um sólido esférico de raio R. Calclule a integral tripla de duas maneiras: primeiro use coordenadas cilíndricas e, depois, coordenadas esféricas.

6. Calcule o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$.

7. Use *coordenadas cilíndricas* e calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$ **(b)** $\displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \left(x^2 + y^2\right) dz\,dy\,dx$

   (c) $\displaystyle\iiint_\Omega xy\,dV$; $\Omega : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1$ **(d)** $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_0^1 x\,dz\,dy\,dx$

8. Use *coordenadas esféricas* e calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz\,dy\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy.$

9. Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume do sólido Ω, nos seguintes casos:

   (a) Ω é delimitado pelas superfícies: $S_1 : x^2+y^2=az$, $S_2 : x^2+y^2=2ax$, $a>0$, e $S_3 : z=0$.

   (b) Ω é delimitado pelos parabolóides $x^2+y^2=z$ e $x^2+y^2+1=2z$.

   (c) Ω é a intersecção da bola $x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1$ com o cone $x^2+y^2\leq z^2$, $z\geq 0$.

   (d) Ω é delimitado pelo parabolóide $-2\left(x^2+y^2\right)=z$ e pelo plano $z=-4$.

   (e) Ω é interior à esfera $x^2+y^2+z^2=4y$, limitado superiormente pelo cone $x^2+z^2=y^2$.

10. Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido resultante vem dado por:

$$\boxed{V=2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,drdzd\theta,}$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule o valor de V.

1.8. CONSIDERAÇÕES FÍSICAS

Representamos por $\sigma(x,y,z)$ a *densidade volumétrica* de um sólido Ω. Quando a densidade for a mesma em cada ponto do sólido, este será denominado *sólido homogêneo*. Por definição, a densidade é igual a massa por unidade de volume, isto é, $\sigma=\dfrac{m}{V}$ e a integral tripla $\iiint_\Omega \sigma(x,y,z)\,dV$ é interpretada como a massa de Ω.

Procedendo como no caso bidimensional, em que o objeto foi interpretado como uma lâmina plana, para um sólido Ω as coordenadas do *centro de massa* são calculadas pelas fórmulas:

$$\boxed{\bar{x}=\frac{1}{m}\iiint_\Omega x\sigma dV,\quad \bar{y}=\frac{1}{m}\iiint_\Omega y\sigma dV \quad \text{e} \quad \bar{z}=\frac{1}{m}\iiint_\Omega z\sigma dV}$$

e o *momento de inércia* em relação a um eixo L é calculado por:

$$\boxed{I_L=\iiint_\Omega \sigma(x,y,z)\delta^2 dV,}$$

sendo $\delta=\delta(x,y,z)$ a distância do ponto $P(x,y,z)$ do sólido Ω ao eixo L. No caso em que o eixo L é o eixo coordenado x, y ou z, deduz-se facilmente as seguintes fórmulas para os momentos de inércia I_x, I_y e I_z :

$$\boxed{I_x=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\sigma dV,\quad I_y=\iiint_\Omega (x^2+z^2)\sigma dV \quad \text{e} \quad I_z=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\sigma dV.}$$

1. Calcule a massa de uma bola de raio R, se densidade de massa é diretamente proporcional à distância r ao centro da esfera. Qual seria a massa da bola, se a densidade fosse inversamente proporcional à r?

2. Determine a massa do sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 4$, se a densidade em um ponto P do cone é proporcional à distância do ponto P ao eixo z.

3. Calcule a massa do sólido cortado da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, se a densidade no ponto P é proporcional à distâcia de P ao plano xy.

4. Qual o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\ z \geq 0$, com densidade $\sigma(x, y, z) = kz$.

5. Calcule o momento de inércia em relação ao seu eixo de um cilindro circular reto de altura H e raio R, se a densidade σ no ponto (x, y, z) é $\sigma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Mostre que o *centróide*[1] do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ é o ponto $C(0, 0, 3R/8)$.

7. Qual o centróide do sólido delimitado abaixo pelo cone $\varphi = \frac{\pi}{4}$ e acima pela esfera $\rho = a$?

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.1

1. A ordem de integração $dydx$ é adequada às regiões do tipo **vertical simples**, isto é, regiões descritas por $D : a \leq x \leq b;\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, enquanto $dxdy$ é a ordem utilizada para regiões do tipo **horizontal simples**, ou seja aquelas descritas por $D : c \leq y \leq d;\ p(y) \leq x \leq q(y)$.

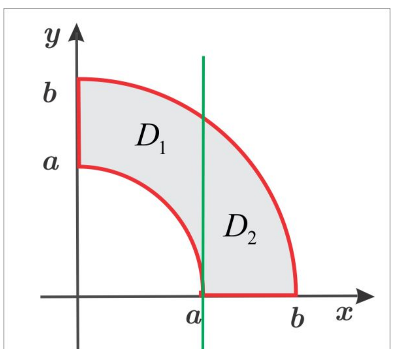


Fig. 3.1d

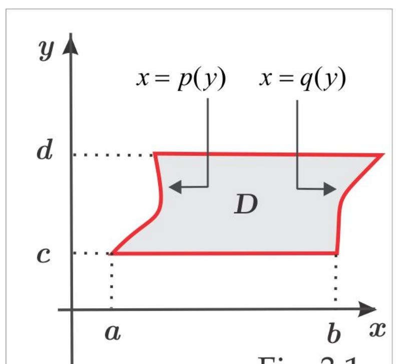


Fig. 3.1e

[1] centróide é a denominação dada ao centro de massa de um sólido homogêneo com densidade $\sigma = 1$.

Em alguns casos é necessário particionar a região como ocorre com a figura 3.1(d). Neste caso, temos $D = D_1 + D_2$ e, assim:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_a^b \int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\,dydx.$$

No caso da figura 3.1(e) o cálculo pode ser feito diretamente, identificando a região como do 2º tipo (horizontal simples): $D : c \le y \le d, \quad p(y) \le x \le q(y)$. Neste caso temos:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dxdy.$$

2. **(a)** -36 **(b)** $\frac{7}{2} - 6\ln 2$ **(c)** $1 - \cos 2$.

3. Como ilustração, faremos o cálculo em alguns casos.

(a) $I = \int_{-1}^{1}\int_0^{|x|} dydx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0}(-x)\,dx + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

(b) Temos:

$$I = \int_0^\pi \int_0^x \cos\left(x^2\right) dydx = \int_0^\pi x\cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} \cos u du = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi^2.$$

(c) $9/2$.

(d) 1.

(e) $I = -\int_0^\pi [\cos y - \cos(-y)]\,dx = -\int_0^\pi 0dx = 0.$

(f) $I = \int_0^{\sqrt{2}/2} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2} y\cdot\left(1-2y^2\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}/2}\left(y - 2y^3\right)dy = 1/16.$

(g) $I = \int_0^1 x\left(e - e^x\right)dx = \frac{e}{2} - \left(xe^x - e^x\right)\big|_0^1 = \frac{1}{2}e - 1.$

(h) $e^2 - 3$.

(i) $-8/3$

(j) $-2/3$ **(k)** $1/3$ **(l)** 0 **(m)** $1/48$ **(n)** $\frac{3}{2} - \operatorname{sen}1 - \cos 1$ **(o)** $8/3$.

4. **(a)** $\frac{1}{2}(e-1)$ **(b)** $\frac{1}{3}(1-\cos 1)$ **(c)** $\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi^2\right)$.

5. Para facilitar a compreensão, comece esboçando a região de integração e siga as seguintes etapas para calcular as integrais múltiplas:

▶ Esboce a região de integração.

- Escolha a ordem de integração adequada.
- Transforme a integral múltipla em um integral iterada (repetida) e calcule-a.

(a) Integrando na ordem $dxdy$, encontramos:

$$I = \int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2} dxdy = \tfrac{1}{2} \int_0^2 y \cdot e^{y^2} dy = \tfrac{1}{4} \int_0^4 e^t dt = \tfrac{1}{4} \left(e^4 - 1 \right).$$

(b) Na ordem $dydx$, temos:

$$I = \int_0^2 \int_0^{x^3} xydydx = \tfrac{1}{2} \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^3} dx = \tfrac{1}{2} \int_0^2 x^7 dx = 16.$$

(c) O cálculo torna-se mais simples em coordenadas polares. Temos

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = 3\pi/8.$$

(d) Na ordem $dydx$, temos

$$I = \int_{-1}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2} dydx = \int_{-1}^{2} \left(4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2} \right) dx = 9 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\pi}{3}.$$

(e) $\frac{1504}{5}$ **(f)** $1/2$

(g) Em coordenadas polares, o cálculo se reduz a:

$$\int_0^{\pi/4} \int_0^{2\sec\theta\tan\theta} \cos\theta dr d\theta = 2 \int_0^{\pi/4} \tan\theta d\theta = -2 \ln \left(\sqrt{2}/2 \right) = \ln 2.$$

(h) $8 + 16 \ln (5/4)$

(i) A partir da ilustração gráfica, deduzimos que a reta $x + y = 1 + e$ intercepta as curvas $y = e^x$ e $y = \ln x$ nos pontos de abscissa $x = 1$ e $x = e$, respectivamente. Um cálculo direto nos dá:

$$\iint_D dxdy = \tfrac{1}{2} e^2 + e - 3.$$

(j) $1/2$ **(k)** $7/24$ **(l)** $75/2$ **(m)** $209/30$ **(n)** $7/24$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.2

1. Se a região D do plano xy é descrita em coordenadas polares por:

$$D : a \leq r \leq b, \quad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,$$

então temos a fórmula de mudança de variável

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, drd\theta.}$$

(a) $I = \int_0^\pi \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^3 \cos\theta drd\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi \mathrm{sen}^3\,\theta\cos\theta d\theta = 0.$

(b) Em coordenadas polares a região de integração é governada pelas desigualdades

$$0 \leq \theta \leq \pi/4, \quad 1/\cos\theta \leq r \leq 2/\cos\theta.$$

Logo,

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_{1/\cos\theta}^{1/\cos\theta} \left(\frac{1}{r^2} \cdot r\right) drd\theta = \int_0^{\pi/4} \left[\ln(2/\cos\theta) - \ln(2/\cos\theta)\right] = \tfrac{\pi}{4}\ln 2.$$

(c) $\frac{\pi}{2}[1 - \exp(-a^2)]$.

(d) Veja nas suas anotações de Cálculo 2 o valor de $\int \sec^3\theta d\theta$, que será usado aqui.

$$I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{3/\cos\theta} r^2 drd\theta = 9\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta d\theta = \tfrac{9}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right].$$

(e) $\pi/4$.

(f) $I = \int_0^\pi \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^2(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\, drd\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi \mathrm{sen}^3\,\theta(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta = \pi.$

2. $\pi^4/3$.

3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}(\mathrm{sen}\,6 - \mathrm{sen}\,2)$.

4. Com a mudança sugerida, a integral se transforma em:

$$\int_2^4 \int_0^u \mathrm{sen}(v/u)\, dvdu = \tfrac{1}{2}\int_2^4 u(1-\cos 1)\, du = 3 - 3\cos 1.$$

5. $\frac{15}{8}$.

6. 7.

7. 74/15.

8. $49\pi/32$.
9. $\frac{1}{9}(16 - 10\sqrt{2})$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.3

1. πR^2 e πab.
2. **(a)** $\frac{17}{6}$ **(b)** $\frac{73}{6}$ **(c)** $\pi + \frac{2}{3}$ **(d)** $\frac{33}{2}$ **(e)** $\frac{10}{3}a^2$ **(f)** $e^{\pi} - e^{-\pi}$.
3. $a^2\left(2 + \pi/4\right)$.
4. $1/3$
5. $\frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$.
6. $2 + \pi/4$.
7. $\frac{20\sqrt{15}}{3}$.
8. **(a)** $\frac{\pi}{4} + \frac{15}{2} + \operatorname{arctg} 2$ **(b)** $27 + 9\pi/2$ **(c)** $56/3$.
9. $8 + 16\ln 2$
10. $1/6$.
11. $\frac{1}{2}\pi a^3$.
12. $625/12$.
13. $4/3$.
14. $16a^3/3$.
15. $\frac{1}{6}$ e $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$.
16. $1/3$.
17. $32/9$.
18. $256\pi/3$.
19. $2/3$.

20. $88/105$.

21. Cada parte da divisão tem volume 4π.

22. $\frac{\pi}{3}(64 - 24\sqrt{3})$.

23. $\frac{128}{9}(3\pi - 4)$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.4

1. $3k\pi a^4/2$.

2. $C_M(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5})$.

3. **(a)** $M = \frac{2349}{20}$; $C_M(6.35, 0.41)$; $I_x = 269,04$; $I_y = 5194,13$.

   (b) $M = \frac{32}{3}$; $C_M(16/3, 9/7)$; $I_x = 32$; $I_y = 1024/9$.

   (c) $M = \frac{128k}{5}$; $C_M(0, 5/7)$; $I_x = 512k/7$; $I_y = 512k/21$.

   (d) $M = \frac{4}{3}$; $C_M(0,0)$; $I_x = \frac{4}{15}$; $I_y = 2/3$.

4. $C_M(\frac{20}{7}, 0)$.

5. $I_L = \sigma a^4/3$; $I_D = \sigma a^5/6$ e $I_{\mathcal{O}} = 2\sigma a^4/3$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.5

1. **(a)** 2π **(b)** 2π **(c)** $-\pi$ **(d)** 4 **(e)** $\pi/8$ **(f)** ∞ **(g)** π **(h)** $8/3$ **(i)** $1/2$.

2. Do Exercício 1(g) desta seção, temos:

$$\begin{aligned}\pi &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right)\exp\left(-y^2\right) dydx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-t^2\right) dt\right]^2.\end{aligned}$$

3. Integre a função $f(x,y)$ sobre a região $D_\delta : \delta \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x - \delta$ e observe que:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \lim_{\delta \to 0} \iint_{D_\delta} f(x,y)\, dA = \infty.$$

   A integral é, portanto, divergente!

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.6

1. **(a)** $9/8$ **(b)** 0 **(c)** $671/4320$ **(d)** $1022/27$.

2. **(a)** $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dzdydx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1\int_x^1\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\,dzdydx$.

3. **(a)** $256/15$ **(b)** $4/15$ **(c)** $304/15$ **(d)** $32/9$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.7

1. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $z=1$; $\rho=\sqrt{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ e $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

2. Veja as relações entre coordenadas cartesianas e cilíndricas no Exercício 2.9(7g).

   (a) O cilindro circular reto: $x^2+y^2=16$.

   (b) O cilindro circular reto: $(x-1)^2+y^2=2$.

   (c) A folha superior do cone: $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$.

   (d) O elipsóide: $9x^2+9y^2+3z^2=27$.

   (e) A esfera: $x^2+y^2+z^2=4$.

3. Veja as relações entre coordenadas cartesianas e esféricas.

   (a) A esfera de centro $(0,0,0)$ e raio 3.

   (b) A esfera $x^2+y^2+(z-1)^2=4$.

   (c) Parte do plano $y=x$.

   (d) O cone $z^2=x^2+y^2$.

4. Veja as fórmulas de mudança de coordenadas cartesianas para curvilíneas.

   (a) Cilíndricas: $r^2+z^2=4$ Esféricas: $\rho=2$. (ESFERA DE RAIO $R=2$)

   (b) Cilíndricas: $r=2$; Esféricas: $\rho^2\operatorname{sen}^2\varphi=4$. (CILINDRO)

   (c) Cilíndricas: $r^2-4z^2=0$; Esféricas: $\rho^2\cos 2\varphi=1$. (CONE)

(d) Cilíndricas: $4z = r^2$; Esféricas: $\rho = 4 \operatorname{cotg} \varphi \operatorname{cosec} \varphi$. (PARABOLOIDE)

5. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

6. $\frac{4}{3}\pi abc$.

7. **(a)** $7\pi/16$ **(b)** $10\pi/3$ **(c)** 0 **(d)** $1/3$.

8. **(a)** $\frac{256}{5}(\sqrt{2} - \frac{1}{2})\pi$ **(b)** $\pi R^4/16$.

9. **(a)** $\frac{3}{2}\pi a^3$ **(b)** $\pi/4$ **(c)** π **(d)** 4π **(e)** $8\pi/3$.

10. $r = 1$; $R = 2$ e $V = 4\pi\sqrt{3}$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.8

1. $k\pi R^4$ e $2k\pi R^2$.

2. $128k\pi/3$.

3. $29k\pi/32$.

4. $C_M(0, 0, \frac{8R}{15})$.

5. $I_z = \frac{2}{5}k\pi HR^5$.

6. $C_M(0, 0, \frac{3R}{8})$.

7. $\operatorname{vol}(\Omega) = \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right)\pi a^3$.