2.1. ARCOS REGULARES

Um arco (ou trajetória) $\gamma : \vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k},\ a \le t \le b$, denomina-se *arco regular* quando as componentes $x(t),\ y(t)$ e $z(t)$ forem continuamente deriváveis e o vetor velocidade é não nulo, isto é, $r'(t) \neq \vec{0}$, em cada t. A orientação positiva do arco γ é aquela correspondente ao sentido crescente de t (de a para b). O arco γ com a orientação invertida é representado por $-\gamma$ e este é parametrizado por:

$$-\gamma : \vec{r}_1(t) = \vec{r}(-t), \quad -b \le t \le -a.$$

1. Esboce o gráfico de cada curva dada abaixo, indicando a orientação positiva.

   (a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1-t)\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1.$ **(b)** $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + t^2\vec{j}, \quad -1 \le t \le 0.$

   (c) $\vec{r}(t) = (1/t)\vec{i} + t\vec{j}, \quad 1 \le t < \infty.$ **(d)** $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1.$

   (e) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \ln t\,\vec{j}, \quad 1 \le t \le e.$ **(f)** $\vec{r}(t) = (\cos t)\,\vec{i} + (\operatorname{sen} t)\,\vec{j} + t\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

2. UM ARCO NÃO REGULAR. Seja γ o arco dado por: $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2 \operatorname{sen}(1/t)\,\vec{j}$, $0 < t \le 1$, e $\vec{r}(0) = \vec{0}$. Note que a coordenada y do arco γ é:

$$y(t) = \begin{cases} t^2 \operatorname{sen}(1/t), & \text{se } 0 < t \le 1 \\ 0, & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

   com derivada $y'(t) = 2t \operatorname{sen}(1/t) - \cos(1/t)$, para $0 < t \le 1$ e $y'(0) = 0$. Sendo esta derivada descontínua em $t = 0$, concluímos que o caminho não é regular.

3. Calcule o comprimento da hélice do Exercício 1(f). (resp.: $2\sqrt{2}\pi$)

2.2. CALCULANDO INTEGRAL DE LINHA

1. Seja $f(x,y)$ uma função contínua sobre um arco regular γ de comprimento L. Se $|f(x,y)| \le M$, em todos os pontos (x,y) do arco γ, mostre que:

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(x,y)ds\right| \le ML.}$$

2. **PARAMETRIZANDO A CIRCUNFERÊNCIA.**

Considere a circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = 2x$, percorrida no sentido positivo (anti-horário), como na figura ao lado. Parametrize a curva γ de duas maneiras: primeiro utilize o parâmetro t e, depois, o parâmetro θ. Usando as duas parmetrizações, mostre que

$$\boxed{\oint_\gamma xyds = 0.}$$

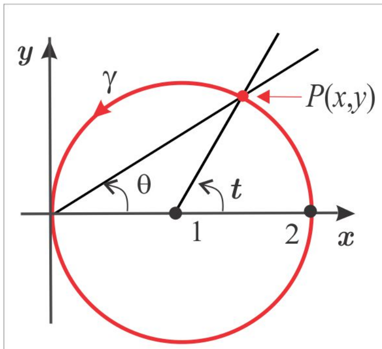

Fig. 3.1

3. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo do caminho indicado:

(a) $\displaystyle\int_\gamma 2ydx - 3xdy\,;\quad \gamma : x = 1-t,\ \ y = 5-t\,;\quad 0 \le t \le 1.$ (resp.: $-15/2$)

(b) $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(1,1)} xydx - y^2dy\,;$ ao longo da parábola $y = x^2$. (resp.: 0)

(c) $\displaystyle\int_{(3,-1)}^{(4,-2)} \frac{y}{x}dx - \frac{x}{y}dy\,;$ ao longo da reta $y = 2-x$. (resp.: $\ln(4/9) - 2$)

(d) $\displaystyle\oint_{\partial D} ydx + 2xdy\,;\quad D : x^2+y^2 \le 1,\, -y \le x \le y,\, y \ge 0.$ (resp.: $\pi/4$)

(e) $\displaystyle\int_\gamma xyds;\quad \gamma : x = t,\ \ y = t\,;\quad 0 \le t \le 1.$ (resp.: $\sqrt{2}/3$)

(f) $\displaystyle\int_\gamma x^2ds;\ \ \gamma : x = \cos 2t,\ \ y = \operatorname{sen} 2t\,;\ 0 \le t \le 2\pi.$ (resp.: 2π)

(g) $\displaystyle\oint_c ydx + 2xdy\,;$ γ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. (resp.: $1/2$)

(h) $\displaystyle\oint_\gamma \left(x^2 - y^2\right) ds;\quad \gamma : x^2 + y^2 = 4.$ (resp.: 0)

(i) $\displaystyle\int_{(0,-1)}^{(0,1)} y^2dx + x^2dy\,;$ ao longo do semicírculo $x = \sqrt{1-y^2}$. (resp.: $4/3$)

(j) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}\,;$ ao longo da curva $x = \cos^3 t,\ \ y = \operatorname{sen}^3 t,\quad 0 \le t \le \pi/2.$ (resp.: $-\pi/2$)

(k) $\displaystyle\oint_\gamma (ax+by)\,dx + (\alpha x + \beta y)\,dy\,;\quad \gamma : x^2+y^2 = 4.$ (resp.: $4\pi(\alpha - b)$)

(i) $\displaystyle\oint_\gamma xy\,(3ydx + 7xdy)\,;\ \ \gamma : 9x^2 + 4y^2 = 36.$ (resp.: 0)

(m) $\displaystyle\oint_\gamma xydx + \left(y^2 - x^2\right) dy\,;$ γ consiste dos arcos $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$. (resp.: $-9/20$)

(n) $\int_\gamma (x+y+z)\,dx + (x-2y+3z)\,dy + (2x+y-z)\,dz$; γ o caminho que liga a origem ao ponto $A\,(2,3,4)$, através de três segmentos retilíneos: o primeiro uma porção do eixo x, o segundo paralelo ao eixo y e o terceiro paralelo ao eixo z. (resp.: 19)

4. Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{F} = \left(x^2+y^2\right)\vec{i} + 3xy^2\,\vec{j}$; γ é o círculo $x^2+y^2=9$. (resp.: $243\pi/4$)

(b) $\vec{F} = \left(3x^2-8y^2\right)\vec{i} + (4y-6xy)\,\vec{j}$; γ é a fronteira da região $D: x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$, orientada no sentido horário. (resp.: $-40/3$)

(c) $\vec{F} = xy\,\vec{i} - y\,\vec{j} + \vec{k}$; γ é o segmento de reta da origem ao ponto $A\,(1,1,1)$. (resp.: $5/6$)

(d) $\vec{F} = y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$; γ é o arco da parábola $x=t,\ y=t^2,\ z=0$; $1\le t\le 2$. (resp.: $137/10$)

(e) $\vec{F} = z^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{k}$; γ consiste do segmento de reta de $(1,0,1)$ a $(2,0,1)$, seguido do segmento de reta de $(2,0,1)$ a $(2,0,4)$. (resp.: 13)

5. Determine a massa e o momento de inércia, em torno de um diâmetro, do fio $\gamma: x^2+y^2=a^2$, com densidade $\sigma(x,y) = |x|+|y|$. (resp.: $m = 8a^2$ e $I_L = 4a^4$)

6. Considere $P(x,y) = -y\left(x^2+y^2\right)^{-1}$ e $Q(x,y) = x\left(x^2+y^2\right)^{-1}$, definidas para $(x,y)\neq(0,0)$ e seja D a região descrita por $0 < x^2+y^2 \le R$. Mostre que:

(a) $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = 2\pi$ **(b)** $\iint_D \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$

7. Qual o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F} = (2x+3y)\,\vec{i} + xy\,\vec{j}$, para levar uma partícula da origem até o ponto $A\,(1,1)$, ao longo do círculo $x^2+(y-1)^2=1$? [resp.: $(22-3\pi)/6$]

8. Sob a ação da força $\vec{F}(x,y) = -3y\vec{i} + 3x\vec{j}$, um objeto percorre a elipse $\gamma: 4x^2+25y^2=100$, no sentido anti-horário. Qual o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$? [resp.: 60π]

9. Um arame tem o formato da parte da elipse $\gamma: 4x^2+9y^2=36$ situada no primeiro quadrante e a densidade no ponto (x,y) é $\sigma(x,y) = xy$. Qual a massa do arame? [resp.: $38/5$]

10. Um arame tem a forma da curva interseção do hemisfério $x^2+y^2+z^2=4,\ z\ge 0$, com o plano $x+z=2$ e a densidade no ponto (x,y) é $\sigma(x,y,z) = xy$. Qual a massa do arame? [resp.: 4]

11. Seja γ a parte da curva interseção das superfícies

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{e} \quad S_2 : x^2 + y^2 = R^2/4, \quad R > 0,$$

situada no primeiro octante. Qual valor de R faz com que $\int_\gamma (xyz)\, ds = 81\sqrt{3}/2$? (resp.: 6)

2.3. TEOREMA DE GREEN NO PLANO

1. Com auxílio do Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

   (a) $\oint_\gamma (\operatorname{sen} x + 4xy)\, dx + (2x^2 - \cos y)\, dy$; γ é um arco simples fechado e regular. (resp.: 0)

   (b) $\oint_\gamma \sqrt{x^2+y^2}dx + y \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})dy$; γ é um contorno simples, regular e fechado, que não envolve a origem. (resp.: 0)

   (c) $\oint_\gamma 2dx + (x^2 - y \operatorname{tg} y)\, dy$; $\gamma : (x-1)^2 + y^2 = 1$. (resp.: 2π)

   (d) $\oint_\gamma P(x)\, dx + Q(y)\, dy$; γ é um círculo de raio r e $P(x)$ e $Q(y)$ são de funções classe C^1 na região delimitada pela curva γ. (resp.: 0)

   (e) $\oint_\gamma e^x \operatorname{sen} y dx + e^x \cos y dy$; γ é a elipse $3x^2 + 8y^2 = 24$. (resp.: 0)

   (f) $\oint_\gamma x^2 dx + xydy$; γ é a cardióide $r = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$. (resp.: 0)

2. Por que os resultados **(a)** e **(b)** do Exercício 2.2(5) não contradizem o Teorema de Green?

3. Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ funções de classe C^1 na região $D : 1 \le x^2 + y^2 \le 2$, tais que $P_y = Q_x$ Quantos valores são possíveis para a integral de linha $\oint_\gamma Pdx + Qdy$, sendo γ uma curva simples fechada regular por partes contida em D? (resp.: 3)

4. Se $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, quais os possíveis valores de $\oint_\gamma \nabla\varphi \cdot \vec{n} ds$, sobre um arco γ, simples fechado e suave, orientado no sentido positivo, que não passa por $(0, 0)$. (resp.: 0 e 4π)

5. Calcule $\int_{\gamma_1+\gamma_2} \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, onde γ_1 é a circunferência $x^2+y^2 = 1$, percorrida no sentido positivo, e γ_2 é a circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 1$, percorrida no sentido horário. (resp.: 2π)

6. Calcule $\int_\gamma \dfrac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2 - 1$, $-1 \le x \le 2$, seguido do segmento de reta que une os pontos $(2, 3)$ e $(-1, 0)$. (resp.: 0)

7. Na região D, interior à elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = R^2$, com $0 < R < \min\{a, b\}$, considere o campo vetorial $\vec{F} = \left[2xy + \operatorname{sen}\left(x^2\right)\right]\vec{i} + \left[x^2 + 2x + \cos\left(y^2\right)\right]\vec{j}$. Calcular a integral de linha $\displaystyle\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. (resp.: $2\pi(ab - R^2)$)

8. Quando a curva γ não é fechada e deseja-se usar o Teorema de Green, é possível "fechar" a curva com um arco auxiliar γ^* e observar que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma+\gamma^*} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma^*} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Seja γ o arco constituído do segmento de reta de $(1,1)$ até $(0,0)$, seguido do segmento de $(0,0)$ até $(1,0)$. Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \left[y^2 + \operatorname{sen}\left(x^3\right)\right] dx + \left(x + y^5\right) dy$. (resp.: -1)

9. Considere a curva γ, descrita por $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0,\ y \geq 0$, e orientada de $(4,0)$ para $(2,0)$. Mostre que:

$$\int_{\gamma} \left(e^x \operatorname{sen} y - 2y - \pi\right) dx + \left(e^x \cos y + e^y\right) dy = -3\pi.$$

2.4. CONSEQUÊNCIAS DO TEOREMA DE GREEN

No que se segue, D representa uma região do plano xy com fronteira ∂D, simples, fechada e regular por partes, e a área da região D estamos representando por $A(D)$. Lembramos as fórmulas clássicas no caso bidimensional:

GREEN (FORMA DIFERENCIAL): $\displaystyle\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(Q_x - P_y\right) dA$

GREEN (FORMA VETORIAL): $\displaystyle\oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{T})ds = \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dA$

GAUSS (DIVERGÊNCIA): $\displaystyle\oint_{\partial D} (\vec{F} \cdot \vec{n})ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dA$

onde $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ e $\vec{\eta}$ é a normal exterior à fronteira ∂D. Os operadores $\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y$ e $\nabla \times \vec{F} = \left(Q_x - P_y\right)\vec{k}$ são, respectivamente, o *divergente* e o *rotacional* do campo $\vec{F}$.

1. Verifique o Teorema da Divergência de Gauss, no plano xy, para os seguintes dados:

   (a) $\vec{F}(x,y) = 3y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j}$; D é a região delimitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

   (b) $\vec{F}(x,y) = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j}$; D é a região delimitada por $4x^2 + 25y^2 = 100$.

2. Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2, isto é, com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, em uma região D. Se $\Delta f = 0$ em D, use a Fórmula de Green e deduza que:
$$\int_{\partial D} f_y dx - f_x dy = 0.$$

3. Nas condições do exercício precedente e considerando v de classe C^1, mostre que:
$$\int_{\partial D} (f_x dy - f_y dx)\, v = \iint_D (v_x f_x + v_y f_y)\, dxdy.$$

4. Se x_0 e y_0 representam as coordenadas do centróide da região D, com densidade de massa $\rho \equiv 1$, mostre que:
$$2x_0 A(D) = \oint_{\partial D} x^2 dy \quad \text{e} \quad y_0 A(D) = \oint_{\partial D} xydy\,.$$

5. Considerando $\vec{F} = \nabla u$ na Fórmula de Gauss, sendo u de classe C^2, deduza a relação:
$$\iint_D \Delta u\, dxdy = \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

6. Com auxílio da Regra do Produto para derivação, obtenha a seguinte propriedade para o divergente:
$$\nabla \cdot (v\nabla u) = v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v.$$
Agora, considere na Fórmula de Gauss $\vec{F} = v\nabla u$ e deduza a identidade:

IDENTIDADE DE GREEN: $$\iint_D v\Delta u\, dxdy + \iint_D \nabla u \cdot \nabla v\, dxdy = \oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$

7. Se $\Delta u = 0$ na região D, usando $v = u$ na Identidade de Green, mostre que:
$$\iint_D |\nabla u|^2\, dxdy = \oint_{\partial D} u\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} ds.$$
onde $\vec{\eta} = \eta_1 \vec{i} + \eta_2 \vec{j}$ é a normal exterior à fornteira ∂D.

8. As curvas
$$\gamma_1 : x^2 + y^2 = 4; \quad \gamma_2 : (x-2)^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_3 : (x+2)^2 + y^2 = 1$$
são percorridas no sentido anti-horário e considere um campo $\vec{F}(x,y)$, de classe C^1 no domínio $\mathbb{R}^2 - \{(\pm 2, 0)\}$, tal que:
$$\text{rot}(\vec{F}(x,y)) = \vec{0}, \quad \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 6 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 9.$$
Qual o valor da integral de linha $\displaystyle\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$? [resp.: 15]

9. Utilizando a fórmula $A(D) = \oint_{\partial D} x dy$, calcule a área das seguintes regiões:

   (a) D é a região delimitada pelas retas $x = 0,\ y = 1$ e $y = 3$ e pela curva $y^2 = x$. [resp.: $26/3$]

   (b) D é a região limitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. [resp.: πab]

   (c) D é o triangulo com vértices nos pontos $(2, 0)$, $(1, 3)$ e $(-1, 1)$. [resp.: 4]

10. Seja γ a fronteira da região interior à elipse $x^2 + y^2 = 225$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, com oreintação positiva. Mostre que:

$$\int_\gamma \left(2xy + \exp\left(x^2\right)\right) dx + \left(x^2 + 2x + \cos\left(y^2\right)\right) dy = 22\pi$$