



3.1. ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

1. Calcule a área de uma esfera de raio R . [resp.: $4\pi R^2$]
2. Deduza a fórmula para a área de um cilindro circular reto de raio R e altura H . [resp. $2\pi RH$]
3. Repita o exercício precedente com um cone circular reto. [resp. $\pi R\sqrt{R^2 + H^2}$]
4. Calcule a área do parabolóide $S : x^2 + y^2 = z, z \leq 4$. [resp.: $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$]
5. Seja S o corte do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcule a área da superfície S . [resp.: $2\pi(2 - \sqrt{2})$]
6. Calcule a área da porção do plano $3x + 2y + z = 7$ no primeiro octante. [resp. $49\sqrt{14}/12$]
7. Em cada caso, calcule a área da superfície S .
 - (a) S é a parte do plano $x + y + z = a, a > 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [resp. $\pi a^2\sqrt{3}$]
 - (b) S corresponde à parte do parabolóide $x^2 + y^2 + z = a^2, a > 3$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$. [resp. $\frac{\pi}{24}(37\sqrt{37} - 5\sqrt{5})$]
 - (c) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = y$. [resp. $2\pi - 4$]
 - (d) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = a^2, a > 0$, delimitada por $y^2 = a(x + a)$. [resp. $8a^2\sqrt{2}$]
 - (e) S é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$. [resp. $\pi a^2\sqrt{2}$]
 - (f) S é a parte do parabolóide $x^2 + z^2 = 2y$, abaixo do plano $y = 1$. [resp. $2\pi(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$]
8. Calcule a área daquela porção do cilindro $S : y^2 + z^2 = 16$, que jaz acima da região triangular $D : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x$. [resp. $8\sqrt{3} + 4\pi/3 - 16$]

3.2. CALCULANDO INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

1. Em cada caso, calcule a integral de superfície $\iint_S f(P) dS$.

- (a) $f(P) = x$; $S : x^2 + y^2 = R^2$, $-1 \leq z \leq 1$. [resp. 0]
- (b) $f(P) = x^2$; $S : x^2 + y^2 = z^2$, $1 \leq z \leq 2$. [resp. $15\pi\sqrt{2}/4$]
- (c) $f(P) = xy$; $S : x^2 + y^2 = 2z$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. [resp. $(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)/15$]
- (d) $f(P) = xzy^{-1}$; S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$. [resp. $\frac{125}{24}(13\sqrt{65} - \sqrt{5})$]
- (e) $f(P) = x + y$; S é a parte do plano $2x + 3y + z = 6$, no primeiro octante. [resp. $5\sqrt{14}$]
- (f) $f(P) = x^2 + y^2 + z^2$; $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. $4\pi R^4$]
- (g) $f(P) = x^2$; S é a parte do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/4$]
- (h) $f(P) = x$; S é a porção do plano $x + y + z = 1$, no primeiro octante. [resp. $\sqrt{3}/6$]
- (i) $f(P) = x$; S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$. [resp. π]
2. Calcule $\iint_S z\sqrt{x^2 + y^2} dS$, sendo S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$. [resp. $2\pi(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$]
3. Repita o Exercício 2, considerando S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$. [resp. 44π]
4. Se \mathbf{N}_S é a normal exterior à superfície S , calcule $\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{N}_S) dS$, para os seguintes dados:
- (a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$ e $\mathbf{F} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. [resp. $4\pi R^3/3$]
- (b) S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, que jaz no primeiro octante, entre os planos $z = 0$ e $z = a$, e $\mathbf{F} = (\sin z)\mathbf{i} + (xy)\mathbf{j} - (\cos z)\mathbf{k}$. [resp. $(1 - \cos a)R + aR^3/3$]
5. Seja $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ a bola do \mathbb{R}^3 de centro na origem e raio a . Se S é a fronteira de Ω , orientada pela normal exterior \mathbf{N}_S , e $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, calcule as integrais:
- (a) $I = \iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{N}_S) dS$ e (b) $J = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV$. [resp. $I = J = 0$]

3.3. FÓRMULAS DE GAUSS & STOKES. APLICAÇÕES

1. Com auxílio da Fórmula de Stokes, calcule $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo γ o bordo da superfície S .

- (a) $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$; S é a superfície $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$. [resp. -1]
- (b) $\mathbf{F} = 3y \mathbf{i} - xz \mathbf{j} + yz^2 \mathbf{k}$; S é o parabolóide $2z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$. [resp. 20π]
- (c) $\mathbf{F} = 2y \mathbf{i} + z \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -2π]
- (d) $\mathbf{F} = z \mathbf{i} + x \mathbf{j} + y \mathbf{k}$; S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [resp. π]
- (e) $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$; S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. [resp. 0]

2. Em cada caso, use a Fórmula de Stokes e calcule $\int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$.

- (a) $\int_{\gamma} y dx + z dy + x dz$; $\gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$. [resp. $-\sqrt{3}\pi R^2$]
- (b) $\int_{\gamma} (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$; $\gamma : x^2 + y^2 = 2y$, $y = z$. [resp. 0]
- (c) $\int_{\gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$; γ é a curva interseção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, com plano $x + y + z = 3a/2$. [resp. $-9a^3/2$]
- (d) $\int_{\gamma} x^3 dz$; γ é o bordo da superfície $S : z = y + 4$; $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. [resp. $45\pi/4$]

3. Seja S a superfície dada sob a forma parametrizada por:

$$S : \mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (1 - u^2) \mathbf{k}, \quad u \geq 0, v \geq 0, u + v \leq 1.$$

Se γ é o bordo de S , calcule $\int_{\gamma} y dx - x^2 dy + 5 dz$. [resp. $-5/6$]

4. Calcule o fluxo do campo \mathbf{F} através da superfície S , na direção da normal exterior \mathbf{N}_S . Se possível, use a Fórmula da Divergência de Gauss para comprovar o resultado.

- (a) $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$; S é a superfície do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. [resp. $2\pi a^3$]
- (b) $\mathbf{F} = 2 \mathbf{i} + 5 \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}$; S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, interna a $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -3π]
- (c) $\mathbf{F} = x \mathbf{i} - y \mathbf{j}$; S é a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]
- (d) $\mathbf{F} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$; S é a fronteira do sólido, no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1$, $y = 2$, e $3x + 2y + z = 12$. [resp. 51]

5. Seja S a superfície descrita por:

$$\mathbf{r}(u, v) = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + (2 - u^2 - v^2) \mathbf{k}, \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

e considere o campo $\mathbf{F} = y \mathbf{i} + (x + y) \mathbf{k}$. Calcule o fluxo de $\text{rot}(\mathbf{F})$ através de S de duas maneiras: primeiro, por um cálculo direto e, depois, usando a Fórmula de Stokes. [resp. $-\pi$]

6. Seja S uma esfera que não passa pela origem. Se $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ é o vetor posição do ponto $P(x, y, z)$, mostre que o fluxo do campo $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^{-3} \bullet \mathbf{r}$ através de S é igual a zero, se S envolve a origem. Qual o valor do fluxo, caso a esfera S envolva a origem? [resp. 4π]

7. Certa curva regular γ no plano xz , de equação $z = f(x)$, $a \leq x \leq b$, gira em torno do eixo z descrevendo uma superfície S . Deduza a *Fórmula de Pappus*: $A(S) = 2\pi Lh$, onde L é o comprimento da curva γ e h é a distância do centróide de γ ao eixo z . Qual a área do cone obtido por rotação da reta $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 3$, $z = 0$, em torno do eixo x ? [resp. $39\pi\sqrt{10}$]

8. Admita a lâmina S homogênea ($\sigma \equiv 1$) e calcule o momento de inércia em torno do eixo indicado.

(a) S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, que jaz entre as folhas do cone $x^2 + y^2 = z^2$; eixo x .

(b) S é o tetraedro de vértices $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ e $D(0, 0, 0)$; eixo y .

(c) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; eixo z .

[resp. (a) $1024/45$; (b) $(2 + \sqrt{3})/6$; (c) $8\pi R^4/3$]

9. Em cada caso, encontre o centróide da lâmina homogênea S .

(a) S é o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

(b) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, interna ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) S é a porção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $y \geq 0$, externa ao cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

[resp. (a) $C_M(0, 0, R/2)$; (b) $C_M(0, 0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})$; (c) $C_M(0, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$]

10. Seja S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, $0 \leq z \leq 1$, entre os planos $x = 2$ e $x = 1$. Admita a densidade constante σ_0 e calcule:

(a) A massa de S e (b) O momento de inércia I_z de S . [resp. (a) $\sigma_0\pi$ (b) $4\sigma_0(1 + \frac{\pi}{2})$]

11. Mostre que $\iint_S (x^2 + y^2) (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot \mathbf{N}_S dS = 4I_z$, onde I_z representa o momento de inércia, com relação ao eixo z , do sólido com densidade $\sigma \equiv 1$, delimitado por S .
12. Calcule o campo eletrostático na origem devido a uma distribuição uniforme¹ de carga sobre o cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq a$.
 [resp. $\vec{E} = \frac{2\pi\rho(\sqrt{R^2 + a^2} - R)}{R^2 + a^2} \vec{k}$]
13. Qual o potencial eletrostático no ponto $(0, 0, z)$, devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$?
 [resp. $\frac{2\pi\rho R(\sqrt{R^2 + z^2} - R + z)}{z}$]
14. Considere uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma esfera S de raio a . Mostre que o campo elétrico em um ponto do eixo z , interior a S , é zero. Qual o campo elétrico nos pontos $A(0, 0, z)$, $z > a$? Note que o fenômeno ocorre como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera, que é o centro de massa.
 [resp. $\vec{E}(0, 0, z) = \frac{(4\pi a^2 \rho_0) \vec{k}}{z^2}$]

ASSIM TERMINA CÁLCULO 3 ...

¹A distribuição diz-se *uniforme* quando a densidade de carga ρ_0 é constante.