## 2º EXAME - Gabarito A Prof. MPMatos

**01** *Se* $D = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 2\}$, *qual o valor da integral:* $\displaystyle\oint_{\partial D} (x^3 - 2y)\, dx + (3x + \cos y)\, dy$?

(a) 64 (b) 45/2 (c) 40 (d) 15 (e) 10 (f) 46/3 (g) NDR

---

**02** *Se* $\gamma$ *é a fronteira da região* $D : x^2 + 4y^2 \leq 4$, *assinale o valor da integral:* $\displaystyle\int_\gamma (-y)\, dx + xdy$.

(a) $4\pi$ (b) $16\pi$ (c) $8\pi$ (d) $10\pi$ (e) $2\pi$ (f) 0 (g) NDR

---

**03** *Seja* $\gamma$ *o corte do cilindro* $y = x^2$ *pelo plano* $z = 4$, *orientado de* $A\,(0,0,4)$ *para* $B\,(1,1,4)$. *Assinale o valor da integral* $\displaystyle\int_\gamma (2x + z)\, dx + (yz)\, dy + \left(x^4 + y^4 + z^4\right) dz$.

(a) $-46/3$ (b) $-2/3$ (c) $-5/2$ (d) 7 (e) 11 (f) 0 (g) NDR

---

**04** *Assinale o valor numérico do fluxo do campo* $\mathbf{F} = \left(2x + y^4\right)\mathbf{i} + \left(x^3 + 4y\right)\mathbf{j}$, *através da fronteira da região* $D : x^2 + y^2 \leq 4;\ x,\ y \geq 0$.

(a) $12\pi$ (b) $8\pi$ (c) $3\pi$ (d) $6\pi$ (e) $10\pi$ (f) $24\pi$ (g) NDR

---

**05** *Uma placa* $D$, *de densidade* $\sigma \equiv 1$, *tem o formato de um disco de raio* $R = 2$. *Se* $(\overline{x}, \overline{y})$ *é o centro de massa da placa* $D$, *assinale o valor de* $\displaystyle\oint_{\partial D} x^3 dx + \left(y + x^2\right) dy$.

(a) $4I_y$ (b) $8\pi\overline{x} \cdot \overline{y}$ (c) $7I_y$ (d) $4\pi\overline{y}$ (e) $-I_y$ (f) $8\pi\overline{x}$ (g) NDR

---

**06** *Um fio tem a forma da curva* $\gamma : x = 2\cos t,\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t,\ z = t,\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2$, e *a densidade no ponto* $(x,y,z)$ *é dada por* $\sigma\,(x,y,z) = 6z^2$. *Assinale o momento de inércia do fio em relação ao eixo* $z$

(a) $9\pi^3\sqrt{5}$ (b) $\pi^3\sqrt{5}$ (c) $2\pi^3\sqrt{5}$ (d) $4\pi^3\sqrt{5}$ (e) $3\pi^3\sqrt{5}$ (f) $6\pi^3\sqrt{5}$ (g) NDR

---

ATENÇÃO. **Salvo menção em contrário, os arcos são percorridos no sentido anti-horário (positivo).**

**GABARITO (preenchimento obrigatório)**

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 |
|---|---|---|---|---|---|
| (a) | **(a)** | (a) | (a) | (a) | (a) |
| (b) | (b) | (b) | (b) | (b) | (b) |
| **(c)** | (c) | (c) | (c) | (c) | **(c)** |
| (d) | (d) | **(d)** | **(d)** | (d) | (c) |
| (e) | (e) | (e) | (e) | (e) | (e) |
| (f) | (f) | (f) | (f) | **(f)** | (f) |
| (g) | (g) | (g) | (g) | (g) | (g) |

---

## PARTE II - ESCREVENDO PARA APRENDER (valor 4,0 pontos) Nota:

**07** *Considere o campo vetorial* $\mathbf{F} = \left(-2xy^2 + 3\cos x + z\right)\mathbf{i} + \left(\lambda x^2 y + \operatorname{sen} y\right)\mathbf{j} + \left(1 + x + z^2\right)\mathbf{k}$.

**(a)** *Determine o valor que se deve atribuir a* $\lambda$, *para que o campo* $\mathbf{F}$ *seja conservativo.*

**(b)** *Com o valor de* $\lambda$ *encontrado em* **(a)**, *calcule o trabalho da força* $\mathbf{F}$ *para deslocar um objeto do ponto* $A\,(\pi/2, 0, 0)$ *ao ponto* $B\,(0, \pi, -1)$.

---

**RESPONDA AQUI A QUESTÃO 07** **(use também o verso da folha)**

(a) Um cálculo direto nos dá $\operatorname{Rot}(\mathbf{F}) = (2\lambda xy + 4xy)\,\mathbf{k}$ e o campo $\mathbf{F}$ será conservativo se, e somente se, $\operatorname{Rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$. Ora,

$$\operatorname{Rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow 2\lambda xy + 4xy = 0, \quad \forall\ x, y \Leftrightarrow \boxed{\lambda = -2}.$$

(b) Sendo $\mathbf{F}$ um campo conservativo, o trabalho por ele realizado é $W_{AB} = \varphi(B) - \varphi(A)$, onde $\varphi$ é um potencial de $\mathbf{F}$, isto é, $\nabla\varphi = \mathbf{F}$. Temos que:

$$\nabla\varphi = F \Leftrightarrow \varphi(x, y, z) = -x^2y^2 + 3\operatorname{sen} x - \cos y + z + xz + \frac{1}{3}z^3 + C, \quad C \text{ constante.}$$

Logo:

$$W_{AB} = \varphi(0, \pi, -1) - \varphi(\pi/2, 0, 0) = -1/3 - 2 = \boxed{-7/3}.$$

UFPB - CCEN - Departamento de Matemática

**CÁLCULO 3 - 2017.1** INTEGRAL DE LINHA

ALUNO(A): GABARITO 2 ID - UFPB:

CURSO: TURNO:

**01** Seja $D$ a região interior à elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ e exterior à circunferência $x^2+y^2=4$. Calcular a integral de linha:

$$\int_{\partial D}\left[2xy+\operatorname{sen}\left(x^2\right)\right]dx+\left[x^2+2x+\cos\left(y^2\right)\right]dy.$$

**02** Quando a curva $\gamma$ não é fechada e desejamos usar o Teorema de Green, fechamos a curva com um arco auxiliar $\gamma^*$, aplicamos a Fórmula de Green e observamos que:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\gamma+\gamma^*}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}-\int_{\gamma^*}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

Seja $\gamma$ o arco constituído do segmento de reta de $(1,1)$ até $(0,0)$, seguido do segmento de $(0,0)$ até $(1,0)$. Calcule a integral de linha:

$$\int_\gamma\left[y^2+\operatorname{sen}\left(x^3\right)\right]dx+\left(x+y^5\right)dy.$$

**03** Um fio $\gamma$ tem a forma da interseção do cilindro $x^2+y^2=3$, no primeiro octante, com o plano $z=2$ e a densidade no ponto $(x,y,z)$ do fio é $\sigma(x,y,z)=x^2+z$.

**(a)** Calcule $m(\gamma)$, a massa do fio $\gamma$.

**(b)** Calcule a coordenada $\overline{x}$ do centro de massa do fio.

**(c)** Calcule o momento de inércia do fio, em relação ao eixo $z$.

**04** Considere o campo vetorial $\mathbf{F}=(x+4y-Az)\,\mathbf{i}+(Bx+2y+6z)\,\mathbf{j}+(-2x+2Cy+z)\,\mathbf{k}$.

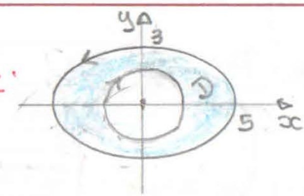
**(a)** Determine as constantes $A$, $B$ e $C$, para que o campo $\mathbf{F}$ seja conservativo.

**(b)** Com os valores encontrados em **(a)**, ache um potencial $\varphi(x,y,z)$ do campo $\mathbf{F}$.

**(c)** Qual o trabalho da força $\mathbf{F}$ para deslocar um objeto do ponto $A(1,1,0)$ ao ponto $B(1,0,1)$?

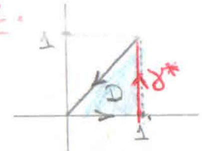
**DESENVOLVIMENTO & RESPOSTAS**

01.




$$\oint_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D(2x+2-2x)\,dx\,dy$$
$$=2\iint_D dx\,dy=2A(D)$$
$$=2\left[\pi\cdot5\cdot3-4\pi\right]=\boxed{22\pi}$$

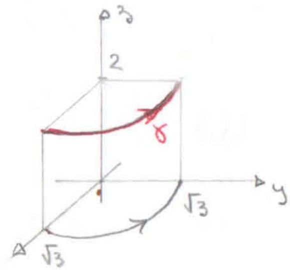
02.




$\gamma^*:\begin{cases}x=1\\0\le y\le1\end{cases}$

$$\oint_\gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D(1-2y)\,dx\,dy-\int_{\gamma^*}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$=\int_0^1\int_0^x(1-2y)\,dy\,dx-\int_0^1(1+y^5)\,dy$$
$$=\int_0^1(x-x^2)\,dx-\left(1+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{6}=\frac{1}{6}+\frac{\cancel{7}}{6}=\boxed{1}$$

03. $\gamma:\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos t\\y=\sqrt{3}\operatorname{sen}t\\z=2\end{cases},\quad 0\le t\le\pi/2$




Temos:

$ds=\sqrt{3}\,dt$ e $\sigma=x^2+z=3\cos^2t+2$

(a) $$m(\gamma)=\int_0^{\pi/2}(3\cos^2t+2)\sqrt{3}\,dt$$
$$=\sqrt{3}\left[3\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\boxed{\frac{7\pi\sqrt{3}}{4}}$$

(b) $$\overline{x}=\frac{1}{m}\int_\gamma x\,\sigma\,ds=\frac{1}{m}\int_0^{\pi/2}\sqrt{3}\cos t\,(3\cos^2t+2)\sqrt{3}\,dt$$
$$=\frac{3}{m}\left[3\int_0^{\pi/2}\cos^3t\,dt+2\int_0^{\pi/2}\cos t\,dt\right]=$$

$$= \frac{9}{m}\int_0^1 (1-u^2)\,du + \frac{6}{m}\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{9}{m}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{6}{m} = \frac{12}{m} = 12\cdot\frac{4}{7\pi\sqrt{3}} = \boxed{\frac{48}{7\pi\sqrt{3}}}$$

(c) $$I_z = \int_\gamma (x^2+y^2)\,\sigma\, ds = \int_0^{\pi/2} 3\sigma\, ds = 3m = \boxed{\frac{21\pi\sqrt{3}}{4}}$$

04. $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$

$P = x + 4y - Az$

$Q = Bx + 2y + 6z$

$R = -2x + 2Cy + z$

$$\operatorname{ROT}(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} R_y = Q_z \\ P_z = R_x \\ Q_x = P_y \end{array}\right.$$

(a)
$$\operatorname{ROT}(F) = (2C-6)\vec{i} + (-A+2)\vec{j} + (B-4)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A = 2 \; ; \; B = 4 \text{ e } C = 3$$

(b) $$\varphi_x = P = x + 4y - 2z \Rightarrow \varphi = \frac{x^2}{2} + 4xy - 2xz + G$$

$$\varphi_y = Q \Rightarrow \cancel{4x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \cancel{4x} + 2y + 6z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial y} = 2y + 6z \Rightarrow G(y,z) = y^2 + 6yz + H(z)$$

$$\varphi_z = R \Rightarrow -2x + 6y + H'(z) = -2x + 6y + z$$

$$\Rightarrow H'(z) = z \Rightarrow H = \frac{z^2}{2} + K$$

Considerando $K=0$, temos:

$$\boxed{\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + 4xy - 2xz + y^2 + 6yz + \frac{z^2}{2}}$$

(c) $$W = \varphi(1,0,1) - \varphi(1,1,0) = \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 4 + 1\right)$$

$$= -1 - \frac{11}{2} = \boxed{[illegible]5}$$

$$= \boxed{-\frac{13}{2}}$$