COMPRIMENTO: FORMA CARTESIANA

1. Calcule o comprimento de uma circunferência de raio R. (resp.: $L = 2\pi R$)

2. Em cada caso, a curva γ é dada na forma cartesiana. Calcule $L(\gamma)$, o comprimento do arco γ.

   (a) $\gamma : y = 1 - \ln(\operatorname{sen} x)$, $\quad \pi/6 \le x \le \pi/4$. (resp.: $L = \ln[2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1)])$

   (b) $\gamma : y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$, $1 \le x \le 2$. (resp.: $L = 13/12$)

   (c) $\gamma : y = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}$, $0 \le x \le 3$. (resp.: $L = 21$)

   (d) $\gamma : x = \dfrac{y^3}{2} + \dfrac{1}{6y}$, $1 \le y \le 3$. (resp.: $L = 118/9$)

   (e) $\gamma : y = \sqrt{x}\,(1 - x/3)$, $0 \le x \le 3$. (resp.: $L = 2\sqrt{3}$)

   (f) $\gamma : (y+1)^2 = (x-4)^3$, $5 \le x \le 8$. (resp.: $L = \frac{1}{27}\left[80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\,\right]$)

COMPRIMENTO: FORMA PARAMÉTRICA

1. Calcule o comprimento de uma circunferência de raio R, na forma parametrizada. (resp.: $L = 2\pi R$)

2. Considerando a parametrização $x = a\cos^3 t$ e $y = a\operatorname{sen}^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule o comprimento da *hipociclóide* de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (resp.: $L = 6a$)

3. Calcule a distância percorrida por uma partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, se sua posição $P(x, y)$ no instante t vem dada por: $x = \frac{1}{2}t^2$ e $y = \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2}$. (resp.: $L = 12$)

4. Em cada caso, calcule o comprimento do arco γ indicado:

   (a) $\gamma : x = t^3,\ y = t^2;\quad -1 \le t \le 3$. (resp.: $L = \frac{1}{27}(85\sqrt{85} + 13\sqrt{13} - 16)$)

   (b) $\gamma : x = e^t\cos t,\ y = e^t \operatorname{sen} t;\quad 0 \le t \le 1$. (resp.: $L = \sqrt{2}(e-1)$)

   (c) $\gamma : x = 2(1 - \operatorname{sen} t),\ y = 2(1 - \cos t);\quad 0 \le t \le \pi$. (resp.: $L = 2\pi$)

   (d) $\gamma : x = t\cos t,\ y = t\operatorname{sen} t;\quad 0 \le t \le \pi/4$. (resp.: $L = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2}$)

   (e) $\gamma : x = \cos(2t),\ y = \operatorname{sen}^2 t;\quad 0 \le t \le \pi$. (resp.: $L = 2\sqrt{5}$)

   (f) $\gamma : x = \frac{1}{2}t^2 + t,\ y = \frac{1}{2}t^2 - t;\quad 0 \le t \le 1$. (resp.: $L = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}-1)$)

COORDENADAS POLARES

1. Localize no plano cartesiano os seguintes pontos dados em coordenadas polares (r, θ) e, em seguida, determine suas coordenadas cartesianas:

(a) $A(2, \pi/4)$ **(b)** $B(2, 3\pi/2)$ **(c)** $C(3, \pi/6)$ **(d)** $D(1, -\pi/4)$
(e) $E(2, 5\pi/6)$ **(f)** $F(1, -\pi/4)$ **(g)** $G(2, 7\pi/6)$ **(h)** $H(3, 13\pi/6)$

2. Determine as coodenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas (x, y) são:

(a) $(1/2, 1/2)$ **(b)** $(\pi/2, \pi/2)$ **(c)** $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ **(d)** $(3, 3\sqrt{3})$
(e) $(-1, -1)$ **(f)** $(1, \sqrt{3})$ **(g)** $(-\sqrt{7}, 3)$ **(h)** $(0, -4)$

3. Passe para a forma polar $r = f(\theta)$ as seguintes curvas, descritas na forma cartesianas:

(a) $xy = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 - 3y = 0$ **(c)** $3x^2 + 5y^2 = 15$
(d) $x + 1 = 0$ **(e)** $x^2 - y^2 = 1$ **(f)** $y^2 - 4x = 0.$

4. Passe para forma cartesiana $(F(x, y) = 0)$ as seguintes curvas, dadas na forma polar $r = f(\theta)$. Esboce graficamente as curvas.

(a) $r = 2 + \operatorname{sen} 2\theta$ **(b)** $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **(c)** $r = \dfrac{4}{1 + \cos\theta}$ **(d)** $r = a\cos\theta$ **(e)** $r = 5$
(f) $r = 5 + 2\cos\theta$ **(g)** $r = 3\sec\theta$ **(h)** $r = 1 + \sqrt{2}\cos\theta$ **(i)** $r = 2\tan\theta$ **(j)** $r = \theta$
(k) $r^2 = \frac{2}{3}a^2\cos\theta$ **(l)** $r = 1/\theta$ **(m)** $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ **(n)** $r = 2\operatorname{sen}\theta$ **(o)** $\theta = \dfrac{\pi}{2}.$

5. Determine, caso exista, a interseção entre os seguintes pares de curvas:

(a) $r = 2$ e $r = 4\cos\theta$ **(b)** $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1/3(1 - \cos\theta)$
(c) $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ e $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$ **(d)** $\theta = \pi/4$ e $r = 2\cos\theta$

COMPRIMENTO E ÁREA EM COORDENADAS POLARES

Em coordenadas polares, consideramos curvas γ descritas por uma equação do tipo $\gamma : r = f(\theta)$, sendo a função f e sua derivada primeira contínuas, e o angulo θ varia no intervalo $[\theta_1, \theta_2]$.

O comprimento L e a área $A(D)$ são calculados, respectivamente, pelas fórmulas:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}\,d\theta \quad \text{e} \quad A(D) = \tfrac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2\,d\theta.$$

Abaixo ilustramos a situação geométrica.

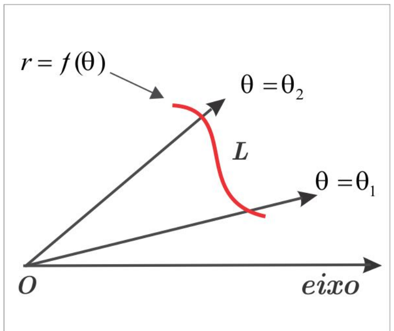

Fig. 8.5

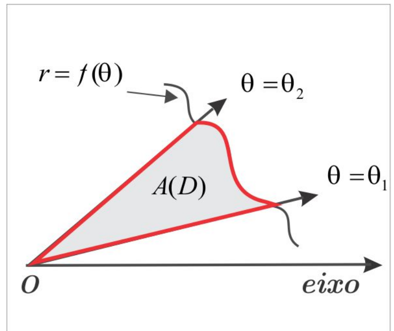

Fig. 8.6

1. Calcule o comprimento das seguintes curvas dadas na forma polar:

   (a) $r = 3\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ **(b)** $r = 2\sec\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ **(c)** $r = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

   (d) $r = \theta/3,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ **(e)** $r = |\operatorname{sen}\theta|\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ **(f)** $r = 3\cos^2(\theta/2),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

   (g) $r = a\theta^2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ **(h)** $r = a\operatorname{sen}^3(\theta/3),\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ **(i)** $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

2. Calcule a área da região interior a cada curva dada abaixo:

   (a) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ **(b)** $r = a\,(2 - \cos\theta)$ **(c)** $r = 2a\operatorname{sen}\theta$

   (d) $r = a\,(1 + \cos 2\theta)$ **(e)** $r^2 = 1 - \cos\theta$ **(f)** $r^2 = 2a^2\cos^2(\theta/2)$

3. Em cada caso, esboce graficamente a região D e calcule a área $A\,(D)$.

   (a) D é interior ao círculo $r = a$ e exterior à *cardióide* $r = a\,(1 - \cos\theta)$.(resp.: $A(D) = a^2(2 - \pi/4)$)

   (b) D é delimitada pelas curvas $r = 2,\ \theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$. (resp.: $A(D) = \pi/2$)

   (c) D é interior à cardióide $r = a\,(1 + \operatorname{sen}\theta)$ e exterior ao círculo $r = a\operatorname{sen}\theta$.(resp.: $A(D) = 5\pi a^2/4$))

   (d) D é comum aos círculos $r = 2a\cos\theta$ e $r = 2a\operatorname{sen}\theta$. (resp.: $A(D) = a^2(-1 + \pi/2)$)

   (e) D é interior à leminiscata $r^2 = 8\cos 2\theta$ e exterior ao círculo $r = 2$. (resp.: $A(D) = \frac{4}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$)

   (f) D é interior ao círculo $r = 3\cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \cos\theta$. (resp.: $A(D) = \pi$)

   (g) D é delimitada pela rosácea de 4 pétalas $r = a\,|\operatorname{sen} 2\theta|$ (resp.: $A(D) = a^2\pi/2$)

   (h) D é interior ao círculo $r = \cos\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$. (resp.: $A(D) = 1 - \pi/4$)

   (i) D é interior ao círculo $r = \operatorname{sen}\theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$. (resp.: $A(D) = 1 - \pi/4$)

VOLUME DE REVOLUÇÃO

1. Em cada caso, esboce a região D delimitada palas curvas dadas e, em seguida, calcule o volume do sólido Ω, gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.

(a) $y = x^4 - 2x^2,\ y = 2x^2,\ x \geq 0;$ eixo y. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 32\pi/3$)

(b) $y = x^2 - 4x,\ y = 0;$ eixo x. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 512\pi/15$)

(c) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4;$ eixo $x = 4$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 256\pi/15$)

(d) $x^2 + y^2 = 1;$ eixo $x = 2$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 4\pi^2$)

(e) $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4;$ eixo $y = 2$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 40\pi/3$)

(f) $y = x,\ y = 0,\ x = 2;$ eixo y. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 16\pi/3$)

(g) $y = x^2,\ y = 4 - x^2;$ eixo x. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 64\sqrt{2}\pi/3$)

(h) $xy = 1,\ y = 0,\ x = 1$ e $x = 2;$ eixo x. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \pi/2$)

2. Calcule o volume delimitado pela esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi R^3$)

3. Calcule o volume delimitado pelo elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \frac{4}{3}\pi a^2 b$)

4. Calcule o volume delimitado pelo parabolóide: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2},\ z \leq h$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \frac{1}{2}\pi a^2 h^2$)

5. Calcule o volume de um cilindro circular reto de raio R e altura h. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \pi R^2 h$)

6. Calcule o volume de um cone circular reto de raio R e altura h. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$)

7. Uma região D do plano xy é delimitada pelo triângulo de vértices $(0,0)$, $(h,0)$ e (h,r), sendo h e r números positivos. Calcule o volume do sólido resultante da rotação da região D em torno do eixo x. E se a rotação fosse em torno do eixo y? (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \pi r^2 h/3$ e $\text{vol}(\Omega) = 2\pi r h^2/3$)

8. Qual o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano xy delimitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$? (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 17\pi/30$)

9. É feito um orifício de raio $2\sqrt{3}$ pelo centro de um sólido esférico de raio $R = 4$. Calcule o volume da porção retirada do sólido. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 224\pi/3$)

10. Calcule o volume de um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base inferior R e raio da base superior r. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = \pi h/3(R^2 + r^2 + rR)$)

11. Calcule o volume de uma calota determinada em uma esfera de raio r por um plano cuja distância ao centro da esfera é h, $h < r$. (resp.: $\text{vol}(\Omega) = 2\pi r^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$)