## 6.1 Derivação & Integração: regras básicas

### REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO

1. Regra da soma: ........ $(u + k \cdot v)' = u' + k \cdot v'$, $k$ constante
2. Regra do Produto: ........ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. Regra do Quociente: ........ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
4. Regra da Potência: ........ $\frac{d}{dx}[x^p] = px^{p-1}$
5. Regra da Cadeia I: ........ $\frac{d}{dx}[f(u(x)] = f'(u(x) \cdot u'(x)$
6. Regra da Cadeia II: (Notação de Leibniz) ........ $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

### AS FUNÇÕES ELEMENTARES E SUAS DERIVADAS

1. Logaritmo Natural de $x$: ........ $\ln x$ ou $\log x$; $D(\ln x) = 1/x,\ x > 0$
2. Exponencial de $x$: ........ $e^x$ ou $\exp x$; $D(e^x) = e^x$
3. Seno de $x$: ........ $\sin x$ ou $\operatorname{sen} x$; $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$
4. Cosseno de $x$: ........ $\cos x$; $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
5. Tangente de $x$: ........ $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$; $D(\tan x) = \sec^2 x$
6. Secante de $x$: ........ $\sec x$ $D(\sec x) = \sec x \tan x$
7. Cotangente de $x$ ........ $\cot x$ ou $\operatorname{cotg} x$; $D(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
8. Cossecante de $x$: ........ $\csc x$ ou $\operatorname{cosec} x$; $D(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Se $f(x)$ é uma função cuja derivada não se nula no intervalo $(a, b)$, então sua inversa $g(y)$ é derivável no intervalo $(c, d)$, com derivada

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad a < x < b. \tag{6.1}$$

Com auxílio da fórmula (6.1) podemos chegar às derivadas das funções trigonométricas inversas, em um intervalo adequado.

1. Derivada do Arcoseno: .......................... $D(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

2. Derivada do Arcocosseno: ............................ $D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < \pi.$

3. Derivada do Arcotangente: ......................... $D(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

4. Derivada do Arcocotangente: ....................... $D(\operatorname{arccotg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad 0 < x < \pi/2.$

5. Derivada do Arcosecante: ............................. $D(\operatorname{arcsec} x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

6. Derivada do Arcocosecante: ......................... $D(\operatorname{arccosec} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

## REGRAS BÁSICAS DE INTEGRAÇÃO

A partir das derivadas das funções básicas, obtemos a seguinte tabela de primitivas:

01. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

02. $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

03. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C, \quad x \neq 0$

04. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$

05. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

06. $\displaystyle\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

07. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$

08. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$

09. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C$

10. $\displaystyle\int \cos(kx) dx = \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

14. $\displaystyle\int \frac{-dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccotg} x + C$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C$

16. $\displaystyle\int \frac{-dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosec} x + C$

---

## ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, determine a primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, satisfazendo à condição especificada.

   (a) $f(x) = \sqrt[4]{x};\ F(1) = 2$ (b) $f(x) = x^2 + 1/x^2;\ F(1) = 0$ (c) $f(x) = (x+1)^{-1};\ F(0) = 2.$

2. Certa função derivável $f(x)$ é tal que $f(x) > 0$, $\forall x$, e $f(1) = 1$. Sabendo que $f'(x) = xf(x)$, encontre a expressão que representa $f(x)$. (sug.: derive a função $g(x) = \ln[f(x)]$)

3. Sejam $f$ e $g$ funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Se $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, $\forall x$, mostre que função $h(x) = [f(x) - \operatorname{sen} x]^2 + [g(x) - \cos x]^2$ tem derivada nula e, portanto, é constante. A partir daí deduza que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

4. Em cada caso, calcule a integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

   (a) $f = x^3 - 5x$ (b) $f = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ (c) $f = 2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{x^5}$ (d) $f = \left(1 + x^2\right)^2$

   (e) $f = \left(1 + x^2\right)^{-1}$ (f) $f = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{1+x}$ (g) $f = \sqrt{x} + \sec^2 x$ (h) $f = x^3\sqrt{x}$

   (i) $f = 2^x + e^{x+1}$ (j) $f = 2 + x^2 + \cos(2x)$ (k) $f = \sec^2(4x+2)$ (l) $f = \cos^2 x$

   (m) $f = 2 + \operatorname{sen}^2 x$ (n) $f = \sec(2x)\operatorname{tg}(2x)$ (o) $f = (x+1)\,x^{-1}$ (p) $f = x\,(x+1)^{-1}$

5. Mostre que $F(x) = \pm\frac{1}{p}\exp(\pm x^p)$, $p \neq 0$, é a primitiva de $f(x) = x^{p-1}\exp(\pm x^p)$, tal que $F(0) = \pm 1/p$. Agora, calcule as integrais indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int x \exp\left(x^2\right) dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\exp\left(\sqrt{x}\right) dx}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int x \exp\left(-x^2\right) dx$.

6. Determine a função $f$ que satisfaz a: $f''(x) = x^2 + e^x$, $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

7. Se $k$ é um número inteiro não negativo, calcule o valor de:

   (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\,dt$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\operatorname{sen}(kt)\,dt$ (c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} [\cos^2(kt) - \operatorname{sen}^2(kt)]dt$.

8. Encontre a equação da curva que passa no ponto $A(-3, 0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos $(x, y)$, é $m(x) = 2x + 1$.

9. DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAL Deixe $f$ ser uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sejam funções deriváveis em $(a, b)$. Se

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt,$$

   mostre que $\varphi$ é derivável em $(a, b)$ e deduza a Regra de Leibniz:

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x). \tag{6.2}$$

10. Usando a Regra de Leibniz (6.2), calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo:

   (a) $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt[3]{1+t^4}dt$ (b) $\varphi(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} (\ln t)^5\,dt$ (c) $\varphi(x) = \displaystyle\int_{x^2-1}^{\exp x} \cos\left(t^2\right) dt$.

11. Em cada caso abaixo, calcule a integral definida de $f$, no intervalo $I$ indicado.

(a) $I = [-1, 1]$; $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x < 0 \\ x^2 - x + 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

(b) $I = [-2, 2]$; $f(x) = |x - 1|$

(c) $I = [-\pi, \pi]$; $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

(d) $I = [-\pi, \pi]$; $f(x) = x + |\cos x|$

(e) $I = [-3, 5]$; $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

(f) $I = [-\pi, \pi]$; $f(x) = x - |x|$

## 6.2 Cálculo de Áreas Planas

1. Em cada caso, calcule a área da região $\mathcal{R}$.

   (a) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (b) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (c) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = |x|$ e $y = -x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$.

   (d) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2$.

   (e) $\mathcal{R}$ é delimitada pelo eixo $y$ e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, para $0 \leq x \leq \pi/4$.

   (f) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pela parábola $y = x^2$.

   (g) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

   (h) $\mathcal{R}$ é delimitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = x - 2$ e $y = 0$.

   (i) $\mathcal{R}$ é delimitada pela curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo $x$.

   (j) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

2. Em cada caso, esboce o gráfico da região $\mathcal{R}$ e calcule sua área.

   (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \leq x \leq 2$ e $x^2 \leq y \leq 4\}$.

   (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $x \geq 0$ e $x^2 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$.

   (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \leq x \leq 1/y$ e $1 \leq y \leq 2\}$.

   (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

   (e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq |x|^3\}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3/4, \text{ para } x < 0 \\ x^2 - x - 2, \text{ para } 0 \leq x < 3 \\ 16 - 4x, \text{ para } x \geq 3. \end{cases}$$

Calcule $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$ e, também, a área entre o gráfico de $f$ e o eixo $x$, de $x = -2$ até $x = 5$. Por que o valor da integral e o valor da área são distintos?

4. Em cada caso, identifique a região do plano $xy$ cuja área é representada pela integral e calcule o valor da área.

   (a) $\int_0^1 dx$ (b) $\int_0^1 2x dx$ $\int_{-1}^0 (4+3x)\,dx$ (d) $\int_{-5}^{-3} (x+5)\,dx + \int_{-3}^0 2dx + \int_0^4 (2-\sqrt{x})\,dx.$

5. Suponha que $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ seja uma função par e que $g : [-a,a] \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar. Mostre que:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 0.$$

6. Considere a função $y = f(x)$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 6.1 ao lado, e defina a função $g$ por
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

   (a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

   (b) Em que intervalo a função $g$ está crescendo?

   (c) Quando $g$ atinge seu valor máximo?

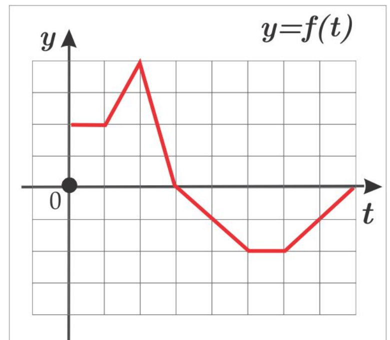

Fig. 6.1

## 6.3 Integrais Impróprias

1. Investigue a *convergência* ou *divergência* das seguintes integrais impróprias.

   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (b) $\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2}$ (c) $\int_0^\infty x^{-1/2}\exp(-\sqrt{x})\,dx$ (d) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

   (e) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ (f) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x}$ (g) $\int_{-\infty}^0 x\exp\left(-x^2\right)dx$ (h) $\int_0^\infty x^3\exp\left(-x^4\right)dx.$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 6.1

1. Recorde-se que $F(x)$ é primitiva de $f(x)$ quando $F$ for derivável e $F'(x) = f(x)$, em cada $x$.

   (a) $F(x) = \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{6}{5}$ (b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}$ (c) $F(x) = \ln(x+1) + 2.$

2. $f(x) = e^{\frac{1}{2}(x^2-1)} = \exp\left(\frac{1}{2}(x^2-1)\right)$.

3. Usando as regras de derivação e considerando que $f' = g$ e $g' = -f$, encontramos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2[f - \operatorname{sen} x]\left[f' - \cos x\right] + 2[g - \cos x]\left[g' + \operatorname{sen} x\right] \\ &= 2[f - \operatorname{sen} x][g - \cos x] + 2[g - \cos x][-f + \operatorname{sen} x] = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $h(x)$ é constante. Como $h(0) = 0$, segue que $h(x) = 0$ e temos o resultado.

4. Antes de iniciar, não esqueça de lembrar as regras básicas de integração.

   (a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C$.
   (b) $-\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x} + \ln x + C$.
   (c) $-2\cos x + \dfrac{1}{4x^4} + C$.
   (d) $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x + C$.
   (e) $\operatorname{arctg} x + C$.
   (f) $\operatorname{tg} x - x - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$.
   (g) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \operatorname{tg} x + C$.
   (h) $\frac{2}{9}x^{9/2} + C$.
   (i) $\dfrac{2^x}{\ln 2} + e^{x+1} + C$.
   (j) $2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C$.
   (k) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4x+2) + C$.
   (l) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$
   (m) $\frac{1}{2}\left(5x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$
   (n) $\frac{1}{2}\sec 2x + C$
   (o) $x + \ln|x| + C$
   (p) $x + 1 - \ln|x+1| + C$.

5. Com a primitiva $F(x) = \frac{1}{p}\exp(x^p)$, $p \neq 0$, encontramos:

   (a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ (b) $2e^{\sqrt{x}} + C$ $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

6. Integrando duas vezes a função $f(x)$, encontramos

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + kx + C$$

e, substituindo os dados $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$, obtemos $k = 0$ e $C = 1$. Assim, $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + e^x + 1$.

7. Recorde-se das regras básicas de integração e de algumas identidades trigonométricas.

   (a) 0 (b) 0 (c) $\pi/4$, se $k = 0$, e $\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n-2}$, se $k = 2n-1$.

8. Sendo a declividade no ponto $(x, y)$ igual a $2x + 1$, então:

$$y' = 2x + 1 \Rightarrow y = x^2 + x + k$$

   e, considerando que $y(-3) = 0$, encontramos $y = x^2 + x - 6$, que é a equação da curva.

9. Se $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, então $\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ e, usando a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos o resultado.

10. (a) $\sqrt[3]{1 + x^4}$ (b) $[\ln(\operatorname{sen} x)]^5 \cos x + [\ln(\cos x)]^5 \operatorname{sen} x$ (c) $e^x \cos(e^{2x}) - 2x\cos(x^2 - 1)^2$.

11. (a) $1/3$ (b) 5 (c) 4 (d) 4 (e) 43 (f) $-\pi^2$.

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 6.2

1. (a) $\frac{2}{15}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $16\sqrt{2}/3$ (e) $\sqrt{2} - 1$ (f) $\frac{5}{3}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) $\frac{10}{3}$ (i) 8 (j) $\frac{64}{3}$.

2. (a) $16/3$ (b) 9 (c) $\ln 2$ (d) $1/3$ (e) $1/2$.

3. $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$; $A = 73/6$. A integral de uma função contínua por partes $y = f(x)$, no intervalo $[a, b]$, coincide com a área entre o gráfico de $f$ e o eixo $x$, no caso em que a função é não negativa no intervalo.

4. (a) 1 (b) 1 (c) $5/2$ (d) $32/3$.

5. Com a mudança $x = -t$ e observando que $f$ é uma função par, encontramos:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

   Na figura abaixo ilustramos a situação geométrica em que $A$ representa o valor da integral no intervalo $[0, a]$ A Figura 6.2a mostra uma função ímpar e a Figura 6.2b uma função par.

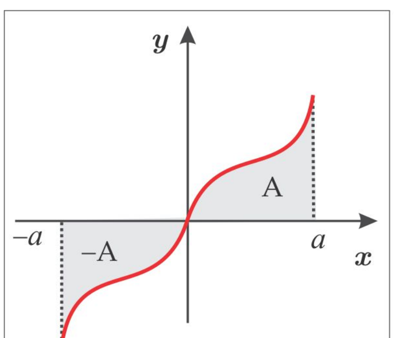

Fig. 6.2a

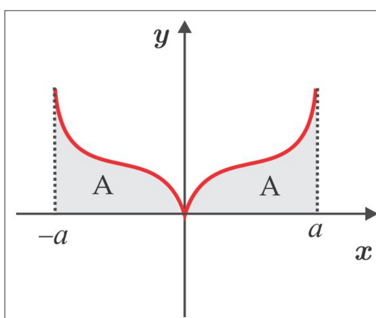

Fig. 6.2b

6. (a) $g(0) = 0,\ g(1) = 2,\ g(2) = 5,\ g(3) = 7$ e $g(6) = 3$ (b) em $(0, 3)$ (c) em $x = 3$.

## EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 6.3

1. Recorde-se que a integral imprópria *convergir* significa que ela tem um valor numérico. Do contrário, ela denomina-se *divergente*.

   (a) Temos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{-x}} \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 + \lim_{b\to 0^-} \left[-2\sqrt{-x}\right]_{-1}^{b} 2 + 2 = 4.\end{aligned}$$

   Logo, a integral é convergente e tem valor 4.

   (b) Neste caso, temos:

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2} &= \lim_{b\to 5^-} \int_1^b \frac{dx}{(5-x)^2} = \lim_{b\to 5^-} \left[\frac{1}{5-x}\right]_1^b \\ &= \lim_{b\to 5^-} \left(\frac{1}{5-b} - \frac{1}{4}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

   Assim, a integral é divergente (não tem valor numérico).

   (c) Divergente.

   (d) A integral é convergente, porque

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \pi/2.$$

   (e) Divergente.

   (f) Divergente.

   (g) De acordo com o Exercício 5, da seção 6.1, temos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} x \exp\left(-x^2\right) dx &= \lim_{a\to -\infty} \int_a^0 x \exp\left(-x^2\right) dx = \lim_{a\to -\infty} \left[-\frac{1}{2} \exp\left(-x^2\right)\right]_a^0 \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a\to -\infty} \left[1 - \exp\left(-a^2\right)\right] = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Logo, a integral imprópria converge e tem valor $-1/2$.

   (h) Considerando a primitiva $F(x) = -\frac{1}{4} \exp\left(-x^4\right)$, determinada no Exercício 5 da seção 6.1, com $p = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} x^3 \exp\left(-x^4\right) dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^3 \exp\left(-x^4\right) dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{4} \exp\left(-x^4\right)\right]_0^b \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{b\to\infty} \left[\exp\left(-b^4\right) - 1\right] = 1/4.\end{aligned}$$