



6.1 Derivação & Integração: regras básicas

■ REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO

1. Regra da soma: $(u + k \cdot v)' = u' + k \cdot v'$, k constante
2. Regra do Produto: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
3. Regra do Quociente: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
4. Regra da Potência: $\frac{d}{dx} [x^p] = px^{p-1}$
5. Regra da Cadeia I: $\frac{d}{dx} [f(u(x))] = f'(u(x)) \cdot u'(x)$
6. Regra da Cadeia II: (Notação de Leibniz) $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

■ AS FUNÇÕES ELEMENTARES E SUAS DERIVADAS

1. Logaritmo Natural de x : $\ln x$ ou $\log x$; $D(\ln x) = 1/x$, $x > 0$
2. Exponencial de x : e^x ou $\exp x$; $D(e^x) = e^x$
3. Seno de x : $\sin x$ ou $\text{sen } x$; $D(\text{sen } x) = \cos x$
4. Cosseno de x : $\cos x$; $D(\cos x) = -\text{sen } x$
5. Tangente de x : $\tan x$ ou $\text{tg } x$; $D(\tan x) = \sec^2 x$
6. Secante de x : $\sec x$ $D(\sec x) = \sec x \tan x$
7. Cotangente de x $\cot x$ ou $\text{cotg } x$; $D(\cot x) = -\text{cosec}^2 x$
8. Cossecante de x : $\text{csc } x$ ou $\text{cosec } x$; $D(\text{cosec } x) = -\text{cosec } x \cotg x$

Se $f(x)$ é uma função cuja derivada não se nula no intervalo (a, b) , então sua inversa $g(y)$ é derivável no intervalo (c, d) , com derivada

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad a < x < b. \quad (6.1)$$

Com auxílio da fórmula (6.1) podemos chegar às derivadas das funções trigonométricas inversas, em um intervalo adequado.

1. Derivada do Arcoseno: $D(\arcsen x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$
2. Derivada do Arcocosseno: $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < \pi.$
3. Derivada do Arcotangente: $D(\arctg x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$
4. Derivada do Arcocotangente: $D(\operatorname{arccotg} x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad 0 < x < \pi/2.$
5. Derivada do Arcosecante: $D(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$
6. Derivada do Arcosecante: $D(\operatorname{arccosec} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

■ REGRAS BÁSICAS DE INTEGRAÇÃO

A partir das derivadas das funções básicas, obtemos a seguinte tabela de primitivas:

- | | |
|--|---|
| 01. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ | 02. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ |
| 03. $\int \frac{1}{x} dx = \log x + C, \quad x \neq 0$ | 04. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotg x + C$ |
| 05. $\int e^x dx = e^x + C$ | 06. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ |
| 07. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$ | 08. $\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$ |
| 09. $\int \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C$ | 10. $\int \cos(kx) dx = \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$ | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$ |
| 13. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan} x + C$ | 14. $\int \frac{-dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arccotg} x + C$ |
| 15. $\int \frac{dx}{ x \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C$ | 16. $\int \frac{-dx}{ x \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosec} x + C$ |

■ ESCRIVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, determine a primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, satisfazendo à condição especificada.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{x}$; $F(1) = 2$ (b) $f(x) = x^2 + 1/x^2$; $F(1) = 0$ (c) $f(x) = (x+1)^{-1}$; $F(0) = 2.$
2. Certa função derivável $f(x)$ é tal que $f(x) > 0, \forall x$, e $f(1) = 1$. Sabendo que $f'(x) = xf(x)$, encontre a expressão que representa $f(x)$. (sug.: derive a função $g(x) = \ln[f(x)]$)

3. Sejam f e g funções deriváveis em \mathbb{R} e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Se $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, $\forall x$, mostre que função $h(x) = [f(x) - \operatorname{sen} x]^2 + [g(x) - \operatorname{cos} x]^2$ tem derivada nula e, portanto, é constante. A partir daí deduza que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \operatorname{cos} x$.

4. Em cada caso, calcule a integral indefinida $\int f(x) dx$.

$$(a) f = x^3 - 5x \quad (b) f = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \quad (c) f = 2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{x^5} \quad (d) f = (1 + x^2)^2$$

$$(e) f = (1 + x^2)^{-1} \quad (f) f = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{1+x} \quad (g) f = \sqrt{x} + \sec^2 x \quad (h) f = x^3 \sqrt{x}$$

$$(i) f = 2^x + e^{x+1} \quad (j) f = 2 + x^2 + \operatorname{cos}(2x) \quad (k) f = \sec^2(4x + 2) \quad (l) f = \operatorname{cos}^2 x$$

$$(m) f = 2 + \operatorname{sen}^2 x \quad (n) f = \sec(2x) \operatorname{tg}(2x) \quad (o) f = (x + 1)x^{-1} \quad (p) f = x(x + 1)^{-1}$$

5. Mostre que $F(x) = \pm \frac{1}{p} \exp(\pm x^p)$, $p \neq 0$, é a primitiva de $f(x) = x^{p-1} \exp(\pm x^p)$ tal que $F(0) = \pm 1/p$. Agora, calcule as integrais indefinidas:

$$(a) \int x \exp(x^2) dx \quad (b) \int \frac{\exp(\sqrt{x}) dx}{\sqrt{x}} \quad (c) \int x \exp(-x^2) dx.$$

6. Determine a função f que satisfaz a: $f''(x) = x^2 + e^x$, $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

7. Se k é um número inteiro não negativo, calcule o valor de:

$$(a) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt) dt \quad (b) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{cos}(kt) \operatorname{sen}(kt) dt \quad (c) \int_0^{\pi/4} [\operatorname{cos}^2(kt) - \operatorname{sen}^2(kt)] dt.$$

8. Encontre a equação da curva que passa no ponto $A(-3, 0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos (x, y) , é $m(x) = 2x + 1$.

9. **DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAL** Deixe f ser uma função contínua em $[a, b]$ e suponha que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sejam funções deriváveis em (a, b) . Se

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt,$$

mostre que φ é derivável em (a, b) e deduza a Regra de Leibniz:

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x). \quad (6.2)$$

10. Usando a Regra de Leibniz (6.2), calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo:

$$(a) \varphi(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^4} dt \quad (b) \varphi(x) = \int_{\operatorname{cos} x}^{\operatorname{sen} x} (\ln t)^5 dt \quad (c) \varphi(x) = \int_{x^2-1}^{\exp x} \operatorname{cos}(t^2) dt.$$

11. Em cada caso abaixo, calcule a integral definida de f , no intervalo I indicado.

- (a) $I = [-1, 1]$; $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x^2 - x + 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $I = [-2, 2]$; $f(x) = |x - 1|$
 (c) $I = [-\pi, \pi]$; $f(x) = |\text{sen } x|$ (d) $I = [-\pi, \pi]$; $f(x) = x + |\cos x|$
 (e) $I = [-3, 5]$; $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ (f) $I = [-\pi, \pi]$; $f(x) = x - |x|$

6.2 Cálculo de Áreas Planas

1. Em cada caso, calcule a área da região \mathcal{R} .

- (a) \mathcal{R} é delimitada pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.
 (b) \mathcal{R} é delimitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $0 \leq x \leq 1$.
 (c) \mathcal{R} é delimitada pelas curvas $y = |x|$ e $y = -x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$.
 (d) \mathcal{R} é delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2$.
 (e) \mathcal{R} é delimitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \text{sen } x$ e $y = \cos x$, para $0 \leq x \leq \pi/4$.
 (f) \mathcal{R} é delimitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pela parábola $y = x^2$.
 (g) \mathcal{R} é delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.
 (h) \mathcal{R} é delimitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = x - 2$ e $y = 0$.
 (i) \mathcal{R} é delimitada pela curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x .
 (j) \mathcal{R} é delimitada pelas parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

2. Em cada caso, esboce o gráfico da região \mathcal{R} e calcule sua área.

- (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } 0 \leq x \leq 2 \text{ e } x^2 \leq y \leq 4\}$.
 (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } x \geq 0 \text{ e } x^2 - x \leq y \leq -x^2 + 5x\}$.
 (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } 0 \leq x \leq 1/y \text{ e } 1 \leq y \leq 2\}$.
 (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
 (e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tal que } -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq |x|^3\}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3/4, & \text{para } x < 0 \\ x^2 - x - 2, & \text{para } 0 \leq x < 3 \\ 16 - 4x, & \text{para } x \geq 3. \end{cases}$$

Calcule $\int_{-2}^5 f(x) dx$ e, também, a área entre o gráfico de f e o eixo x , de $x = -2$ até $x = 5$. Por que o valor da integral e o valor da área são distintos?

4. Em cada caso, identifique a região do plano xy cuja área é representada pela integral e calcule o valor da área.

(a) $\int_0^1 dx$ (b) $\int_0^1 2x dx$ (c) $\int_{-1}^0 (4 + 3x) dx$ (d) $\int_{-5}^{-3} (x + 5) dx + \int_{-3}^0 2dx + \int_0^4 (2 - \sqrt{x}) dx$.

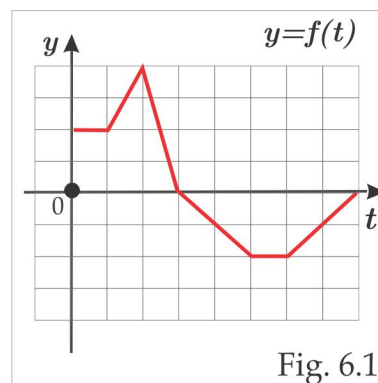
5. Suponha que $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função par e que $g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função ímpar. Mostre que:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-a}^a g(x) dx = 0.$$

6. Considere a função $y = f(x)$, cujo gráfico está ilustrado na Figura 6.1 ao lado, e defina a função g por

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- (a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.
 (b) Em que intervalo a função g está crescendo?
 (c) Quando g atinge seu valor máximo?



6.3 Integrais Impróprias

1. Investigue a *convergência* ou *divergência* das seguintes integrais impróprias.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (b) $\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2}$ (c) $\int_0^\infty x^{-1/2} \exp(-\sqrt{x}) dx$ (d) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$
 (e) $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ (f) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x}$ (g) $\int_{-\infty}^0 x \exp(-x^2) dx$ (h) $\int_0^\infty x^3 \exp(-x^4) dx$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 6.1

1. Recorde-se que $F(x)$ é primitiva de $f(x)$ quando F for derivável e $F'(x) = f(x)$, em cada x .

(a) $F(x) = \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{6}{5}$ (b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{3}$ (c) $F(x) = \ln(x+1) + 2$.

2. $f(x) = e^{\frac{1}{2}(x^2-1)} = \exp\left(\frac{1}{2}(x^2-1)\right).$

3. Usando as regras de derivação e considerando que $f' = g$ e $g' = -f$, encontramos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2[f - \operatorname{sen} x][f' - \cos x] + 2[g - \cos x][g' + \operatorname{sen} x] \\ &= 2[f - \operatorname{sen} x][g - \cos x] + 2[g - \cos x][-f + \operatorname{sen} x] = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, $h(x)$ é constante. Como $h(0) = 0$, segue que $h(x) = 0$ e temos o resultado.

4. Veja as regras básicas de integração.

(a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C.$

(b) $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln x + C.$

(c) $-2 \cos x + \frac{1}{4x^4} + C.$

(d) $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C.$

(e) $\operatorname{arctg} x + C.$

(f) $\operatorname{tg} x - x - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C.$

(g) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \operatorname{tg} x + C.$

(h) $\frac{2}{9}x^{9/2} + C.$

(i) $\frac{2^x}{\ln 2} + e^{x+1} + C.$

(j) $2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C.$

(k) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4x+2) + C.$

(l) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

(m) $\frac{1}{2}\left(5x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

(n) $\frac{1}{2}\sec 2x + C$

(o) $x + \ln|x| + C$

(p) $x + 1 - \ln|x+1| + C.$

5. Com a primitiva $F(x) = \frac{1}{p} \exp(x^p)$, encontramos:

(a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ (b) $2e^{\sqrt{x}} + C$ $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

6. Integrando duas vezes a função $f(x)$, encontramos

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + kx + C$$

e, substituindo os dados $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$, obtemos $k = 0$ e $C = 1$. Assim, $f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + 1.$

7. Recorde-se das regras básicas de integração e de algumas identidades trigonométricas.

$$(a) 0 \quad (b) 0 \quad (c) \pi/4, \quad \text{se } k = 0, \quad \text{e } \frac{(-1)^{n-1}}{4n-2}, \quad \text{se } k = 2n-1.$$

8. Sendo a declividade no ponto (x, y) igual a $2x + 1$, então:

$$y' = 2x + 1 \Rightarrow y = x^2 + x + k$$

e, considerando que $y(-3) = 0$, encontramos $y = x^2 + x - 6$, que é a equação da curva.

9. Se $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, então $\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ e, usando a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos o resultado.

$$10. (a) \sqrt[3]{1+x^4} \quad (b) [\ln(\sin x)]^5 \cos x + [\ln(\cos x)]^5 \sin x \quad (c) e^x \cos(e^{2x}) - 2x \cos(x^2 - 1)^2.$$

$$11. (a) 1/3 \quad (b) 5 \quad (c) 4 \quad (d) 4 \quad (e) 43 \quad (f) -\pi^2.$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 6.2

$$1. (a) \frac{2}{15} \quad (b) \frac{1}{2} \quad (c) \frac{5}{3} \quad (d) 16\sqrt{2}/3 \quad (e) \sqrt{2} - 1 \quad (f) \frac{5}{3} \quad (g) \frac{1}{3} \quad (h) \frac{10}{3} \quad (i) 8 \quad (j) \frac{64}{3}.$$

$$2. (a) 16/3 \quad (b) 9 \quad (c) \ln 2 \quad (d) 1/3 \quad (e) 1/2.$$

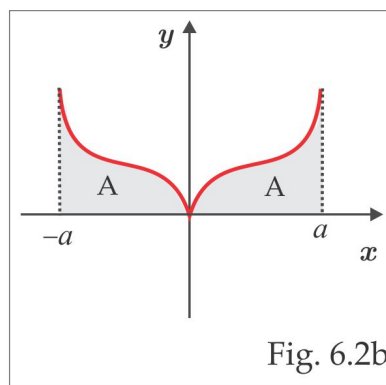
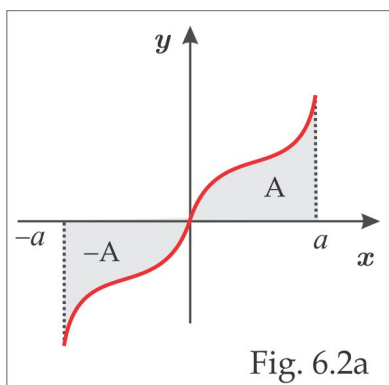
3. $\int_{-2}^5 f(x) dx = \frac{3}{2}$; $A = 73/6$. A integral de uma função contínua por partes $y = f(x)$, no intervalo $[a, b]$, coincide com a área entre o gráfico de f e o eixo x , no caso em que a função é não negativa no intervalo.

$$4. (a) 1 \quad (b) 1 \quad (c) 5/2 \quad (d) 32/3.$$

5. Com a mudança $x = -t$ e observando que f é uma função par, encontramos:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(t) dt \Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Na figura abaixo ilustramos a situação geométrica em que A representa o valor da integral no intervalo $[0, a]$. A Figura 6.2a mostra uma função ímpar e a Figura 6.2b uma função par.



6. (a) $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(3) = 7$ e $g(6) = 3$ (b) em $(0, 3)$ (c) em $x = 3$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 6.3

1. Recorde-se que a integral imprópria *convergir* significa que ela tem um valor numérico. Do contrário, ela denomina-se *divergente*.

- (a) Temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b \frac{dx}{\sqrt{-x}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1 + \lim_{b \rightarrow 0^-} [-2\sqrt{-x}]_{-1}^b = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Logo, a integral é convergente e tem valor 4.

- (b) Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2} &= \lim_{b \rightarrow 5^-} \int_1^b \frac{dx}{(5-x)^2} = \lim_{b \rightarrow 5^-} \left[\frac{1}{5-x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow 5^-} \left(\frac{1}{5-b} - \frac{1}{4} \right) = +\infty. \end{aligned}$$

Assim, a integral é divergente (não tem valor numérico).

- (c) Divergente.

- (d) A integral é convergente, porque

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b - \arctan 0) = \pi/2.$$

- (e) Divergente.

- (f) Divergente.

- (g) De acordo com o Exercício 5, da seção 6.1, temos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x \exp(-x^2) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x \exp(-x^2) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} \exp(-x^2) \right]_a^0 \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} [1 - \exp(-a^2)] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a integral imprópria converge e tem valor $-1/2$.

- (h) Considerando a primitiva $F(x) = -\frac{1}{4} \exp(-x^4)$, determinada no Exercício 5 da seção 6.1, com $p = 4$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^3 \exp(-x^4) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x^3 \exp(-x^4) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4} \exp(-x^4) \right]_0^b \\ &= -\frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} [\exp(-b^4) - 1] = 1/4. \end{aligned}$$