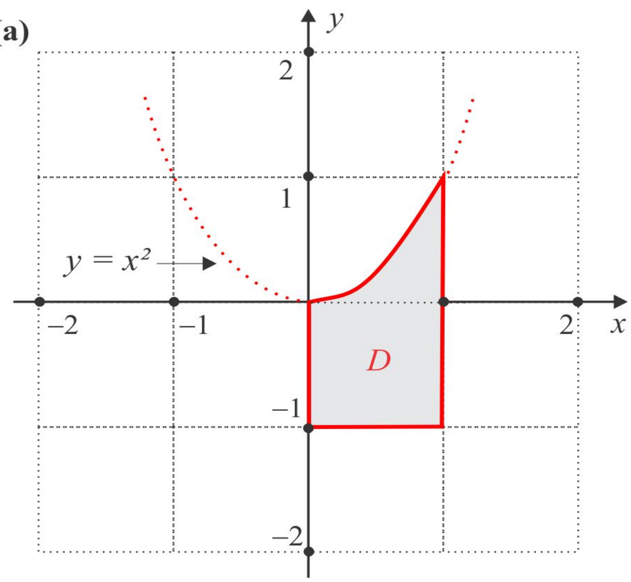
01 CALCULANDO ÁREA *Seja D a região do plano xy, descrita por:*

$$D : \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq x^2\right\}.$$

(a) *Esboce o gráfico da região D* **(b)** *Calcule o valor de $A(D)$, a área da região D.*

SOLUÇÃO

(a)



(b) $A(D) = \displaystyle\int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$

---

02 CALCULANDO DERIVADA COM O T.F.C. *Calcule a derivada $F'(0)$, sendo*

$$F(x) = \int_{-1}^{x^2+x} \sqrt{1+t^4}\, dt.$$

SOLUÇÃO

Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, temos a Regra de Leibniz:

$$F(x) = \int_a^{p(x)} f(t)\, dt \Rightarrow F'(x) = f(p(x)) \cdot p'(x).$$

No caso, $f(t) = \sqrt{1+t^4}$ e $p(x) = x^2 + x$, e, sendo assim:

$$F'(x) = \sqrt{1 + (x^2+x)^4} \cdot (2x+1)$$

e, considerando $x = 0$, encontramos $F'(0) = 1$.

---

03 CALCULANDO INTEGRAIS *Calcule as seguintes integrais:*

(a) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x\; dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(2x)\, dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\; dx.$

SOLUÇÃO

(a) Usando a identidade fundamental $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ e a substituição $u = \operatorname{sen} x$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x\; dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x\; dx = \int_1^0 \left(1-u^2\right) du = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_1^0 \\ &= (0-1)-(0-1/3) = -2/3.\end{aligned}$$

(b) Integrando por Partes, com $u = x$ e $dv = \operatorname{sen}(2x)\,dx$, resulta:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(2x)\, dx &= \int_0^{\pi} xd\left[-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right] dx = \left[-\frac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{\pi} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2x)\,dx \\ &= -\tfrac{1}{2}\left(\pi\cos 2\pi\right) + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right]\Big|_0^{\pi}}_{=0} = -\pi/2.\end{aligned}$$

(c) A substituição $u = 1+x^2$ nos dá $du = 2x\; dx$ e $x^2 = u-1$. Assim:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}\; dx &= \int_0^1 x^2\cdot x\sqrt{1+x^2}\; dx = \int_1^2 (u-1)\sqrt{u}\left(\tfrac{1}{2}du\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \left(u^{3/2}-u^{1/2}\right) du = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}u^{5/2}-\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right)\Big|_0^2 = \tfrac{2}{15}\left(1+\sqrt{2}\right).\end{aligned}$$

---

04 INVESTIGANDO A CONVERGÊNCIA *Estude a convergência ou divergência da integral imprópria:*

$$\int_0^{+\infty} x^2\exp\left(-x^3/3\right) dx.$$

SOLUÇÃO

Com a substituição $u = x^3/3$ e $du = x^2dx$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2\exp\left(-x^3/3\right) dx &= \lim_{B\to\infty}\int_0^{B} x^2\exp\left(-x^3/3\right) dx = \lim_{B\to\infty}\int_0^{B^3/3} e^{-u}du \\ &= \lim_{B\to\infty}\left[-e^{-u}\right]\Big|_0^{B^3/3} = -\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B^3/3}-1\right) = 1.\end{aligned}$$

A integral imprópria é, portanto, convergente com valor igual a 1.
