P2_ME

PROF. MPMATOS

UFPB - CCEN - D*mat* CÁLCULO 2 - AV2

ALUNO(A): ______________________ ID - UFPB: ____________

PARTE I - QUESTÕES MÚLTIPLA ESCOLHA (valor 7,0 pontos) Nota: [ ]

01 *Se* $f(x,y) = x^2y\left(x^2+y^3\right)$, *assinale o valor da derivada* $f_{yx}(0,1)$.

(a) -3 (b) 0 (c) -1 (d) 2 (e) 3 (f) NDR

---

02 *Seja* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *uma função derivável, tal que* $g'(1)=2$, *e defina* $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. *Assinale o valor de* $f_x(-1,0)$.

(a) -2 (b) 2 (c) 6 (d) 5 (e) 3 (f) NDR

---

03 *Seja* $z = f(x,y)$ *diferenciável, tal que* $f_x(-1,4) = 2$ e $f_y(-1,4) = -2$. *Se* $g(r,s) = f(-2r+s, 2r+2s)$, *assinale o valor de* $g_s(1,1)$.

(a) 1 (b) 4 (c) 2 (d) -2 (e) 0 (f) NDR

---

04 Se $f(x,y) = x^2+y^2$, *assinale o valor da derivada direcional* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$, *quando* $\vec{v}$ *apontar na direção do gradiente de* f *no ponto* $(1,1)$.

(a) 4 (b) 2 (c) $2\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{3}$ (e) $2\sqrt{5}$ (f) NDR

---

05 *Assinale o ponto* $A(x,y)$ *que jaz na fronteira do conjunto* $D = \left\{(x,y) : -1 < x^2+y^2+2y \le 0\right\}$.

(a) $A(0,1)$ (b) $A(2,0)$ (c) $A(1,-2)$ (d) $A(-1,1)$ (e) $A(0,-1)$ (f) NDR

---

06 *Sabendo que* $f(x,y) = x^4+2xy-x+4$, *assinale no menu o valor do limite:* $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(1,t)-4}{t}$.

(a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 0 (e) -3 (f) NDR

---

07 *O plano tangente à superfície* $S: x^2+y^2 = z$, *no ponto* $P(1,-1,2)$, *contém o ponto* $A(1,2,t)$. *Assinale o valor de* t.

(a) $t=1$ (b) $t=-4$ (c) $t=3$ (d) $t=2$ (e) $t=-3$ (f) NDR

COMO $\dfrac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ NÃO TEM LIMITE EM $(0,0)$, SEGUE QUE f NÃO É DIF. NA ORIGEM ←

GABARITO (PREENCHIMENTO OBRIGATÓRIO)

01	02	03	04	05	06	07
(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)	(a)
(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)	(b)
(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)	(c)
(d)	(d)	(d)	(d)	(d)	(d)	(d)
(e)	(e)	(e)	(e)	(e)	(e)	(e)
(f)	(f)	(f)	(f)	(f)	(f)	(f)

PARTE II - ESCREVENDO PARA APRENDER (valor 3,0 pontos) Nota: [ ]

Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, *definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^3-3x^2y}{x^2+2y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) *Determine o valor de* L *que torna a função* $z = f(x,y)$ *contínua na origem..*

(b) *Com o* L *encontrado em (a), calcule, se for possível, as derivadas parciais* $f_x(0,0)$ *e* $f_y(0,0)$.

(c) *A função* $z = f(x,y)$ *é diferenciável na origem? Por quê?*

SOLUÇÃO DA PARTE II (use também o verso da folha)

(a) $L = \displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}} \overbrace{(5x-3y)}^{0}\ \overbrace{\frac{x^2}{x^2+2y^2}}^{\text{Limitado}} = 0.$

(b) $f_x(0,0) = \displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{5h^3}{h^3} = \boxed{5}$

$f_y(0,0) = \displaystyle\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)}{k} = \lim\frac{0}{2k^3} = \boxed{0}$

(c) $\dfrac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{f(h,k)-5h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{-3h^2k-10hk^2}{(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$

NA TRAJETÓRIA $\gamma: h=k$, TEMOS:

$\dfrac{E(h,h)}{\sqrt{h^2+h^2}} = \dfrac{-13h^3}{3\sqrt{2}\,|h|h^2}$ NÃO TEM LIMITE, COM $h\to0$.

PARTE I:

01 $f(x,y) = x^2y(x^2+y^3) = x^4y + x^2y^4$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(4x^3y+2xy^4) = 4x^3+8xy^3$$

Logo: $f_{yx}(0,1) = \boxed{0}$ (b)

02 $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$; $g'(1)=2$

$$f_x = g'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = g'(t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_x(-1,0) = g'(1)\frac{-1}{\sqrt{1}} = \boxed{-2}$$ (a)

03 $g(r,s) = f(x,y)$; $x=-2r+s$ e $y=2r+2s$.

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s}(1,1) = f_x(-1,4) + 2f_y(-1,4) = 2-4 = \boxed{-2}$$ (d)

04 $f(x,y)=x^2+y^2$; $\nabla f(1,1) = 2\vec{i}+2\vec{j}$

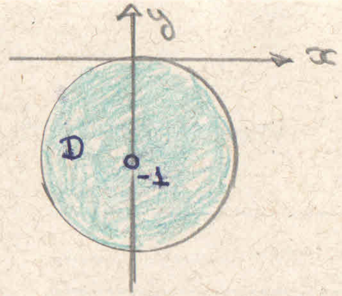
na direção do gradiente, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \|\nabla f(1,1)\| = \boxed{\sqrt{8}}$$ (c)

05 $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1 < x^2+y^2+2y \le 0\}$

Temos: $-1 < x^2+y^2+2y \le 0 \Leftrightarrow 0 < x^2+(y+1)^2 \le 1$.

Portanto D é o disco de raio $R=1$, cujo centro $C(0,-1)$ está excluído.



$\partial D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}\cup\{(0,-1)\}$

Logo, $\boxed{A(0,-1)\in\partial D}$ (e)

06 $f(x,y) = x^4+2xy-x+4$; $f(1,0)=4$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(1,t)-4}{t} = \lim_{t\to0}\frac{f(1,0+t)-f(1,0)}{t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \boxed{2}$$ (a)

07 $S: x^2+y^2=z$; $P(1,-1,2)$

O plano tangente a S no ponto P é:

$$T_P: 2(x-1)-2(y+1)-(z-2)=0$$

$$\boxed{2x-2y-z=2}$$

$A(1,2,t)\in T_P \Leftrightarrow 2-4-t=2 \Leftrightarrow \boxed{t=-4}$ (b)

BADCEAB