Introdução

Inicialmente, como motivação, vamos considerar três problemas típicos do cálculo.

■ PROBLEMA I: Encontrar a curva γ do plano xy que passa no ponto $A(1,-1)$ e, no ponto genérico $P(x,y)$, tem declividade $3x^2$. Olhando a curva γ como o gráfico de certa função $y = f(x)$, temos $y' = 3x^2$ e a curva γ é governada por uma equação do tipo $y = x^3 + C$, sendo C constante, já que:

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^3 + C\right) = 3x^2.$$

Considerando que a curva passa no ponto $A(1,-1)$, encontramos:

$$-1 = 1^3 + C \Leftrightarrow C = -2$$

e, sendo assim, a curva γ é o gráfico da função $y = x^3 - 2$. O raciocínio por trás do método consiste em encontrar uma função $F(x)$, tal que $F'(x) = 3x^2$ e $F(1) = -1$.

■ PROBLEMA II (ÁREA COMO LIMITE DE SOMAS): Neste problema modelo, vamos calcular a área da parte do plano xy entre o eixo Ox, a reta $x = 1$ e a parábola $y = x^2$, ilustrada na Figura 7.-13.

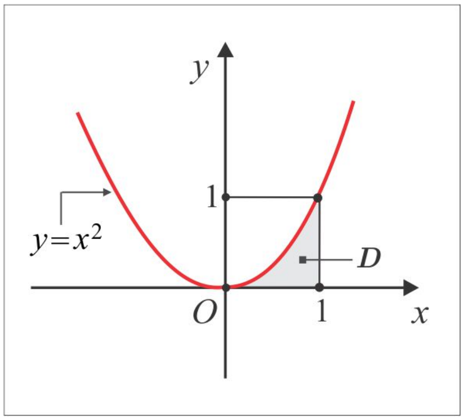

Figura 7.-13: Região D.

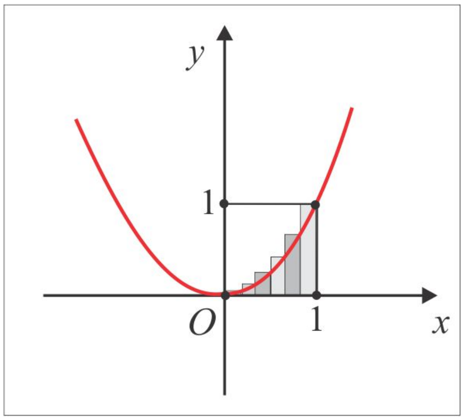

Figura 7.-12: Áreas Elementares.

O método consiste em particionar o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento $\Delta x = 1/n$, sendo n um número natural, e aproximar a área pela soma das áreas dos retângulos elementares de base $\Delta x = 1/n$ e altura $h = (k/n)^2$, $k = 1,2,3,\ldots n$, como ilustra a Figura 7.-12, no caso $n = 6$. Um retângulo genérico de base $\Delta x = 1/n$ e altura $h = (k/n)^2$ tem área $A_k = k/n^3$, $k = 1,2,3,\ldots,n$, e a soma $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ é uma aproximação, por excesso, da área procurada, isto é:

$$\begin{aligned} A(D) &\simeq A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \frac{1}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^3}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3}\Big[1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2\Big]. \end{aligned}$$

Agora, usando o Método de Indução Finita, demonstra-se que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2 = \frac{1}{6}\Big[n(n+1)(2n+1)\Big]$$

e, portanto:

$$A(D) \simeq \frac{1}{6n^3}\Big[n(n+1)(2n+1)\Big] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \tag{7.-20}$$

A aproximação em (7.-20) será tão melhor quanto maior for o número n e é natural pensar na área como o limite com $n \to \infty$ e, desta forma, encontramos:

$$A(D) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

Por fim, ressaltamos que a função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é tal que:

$$\boxed{F'(x) = x^2 \quad \text{e} \quad F(1) - F(0) = A(D).}$$

■ **PROBLEMA III (UM VOLUME DE REVOLUÇÃO):** A curva $\gamma : y = (H/R)\,x$, $0 \le x \le R$, gira em torno do eixo Oy, produzindo um cone de revolução de raio R e altura H, ilustrado na Figura 7.-11.

Imitando o processo usado o Problema II, deixe-nos considerar no eixo Oy a seguinte partição do intervalo $[0,H]$:

$$0 < \frac{H}{n} < \frac{2H}{n} < \frac{3H}{n} < \cdots < \frac{nH}{n} = H,$$

onde cada subintervalo tem comprimento H/n.

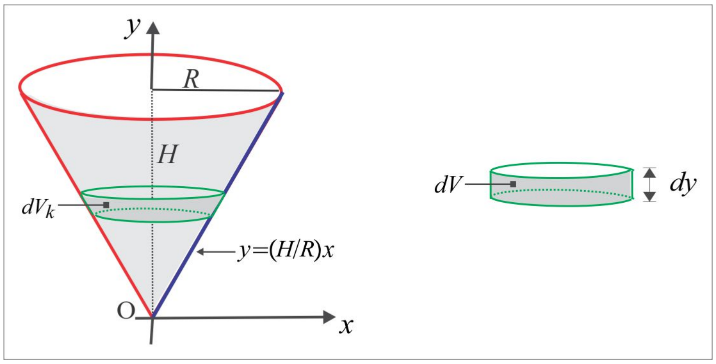

Figura 7.-11: Cone de Revolução.

O volume da fatia infinitesimal dV_k é aproximada pelo volume dV do cilindro de altura $dy = kH/n$ e raio kR/n, isto é:

$$dV_k \simeq \pi \left(kR/n\right)^2 \left(kH/n\right) = \frac{\pi k^2 R^2 H}{n^3}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

e o volume do cone é aproximado pela soma dos volumes elementares: $dV_1 + dV_2 + dV_3 + \cdots + dV_n$. Assim, o volume V do cone é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n\to\infty} \left(dV_1 + dV_2 + dV_3 + \cdots + dV_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\pi R^2 H}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right)\right] = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \end{aligned}$$

7.-4 Primitivas

Dada uma função real contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, por *Primitiva* ou *Antiderivada* de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ entendemos qualquer função derivável $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que:

$$F'(x) = f(x), \quad a \le x \le b.$$

Um fato simples, mas fundamental é que duas primitivas $F(x)$ e $G(x)$ de uma dada função $f(x)$ diferem por uma constante. De fato, sendo $F(x)$ e $G(x)$ primitivas de $f(x)$, então $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = f(x)$ em $[a,b]$, de modo que:

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) - G(x)\right] = F'(x) - G'(x) = 0, \quad a \le x \le b,$$

e, portanto, $F(x) - G(x) = C, \ \forall\, x$, sendo C uma constante.

EXEMPLO 7.-4.1 *As primitivas elementares são obtidas a partir das regras de derivação. Na tabela abaixo exibimos a função $f(x)$, sua derivada $f'(x)$ e suas primitivas $F(x)$.*

Função	*Derivada*	*Primitiva*
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$F(x) = x^3/3 + C$
$f(x) = 1/x$	$f'(x) = -1/x^2$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert + C, \ x \neq 0$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$F(x) = \operatorname{sen} x + C$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$
$f(x) = 5x^4$	$f'(x) = 20x^3$	$F(x) = x^5 + C$

EXEMPLO 7.-4.2 *Dado um número real $p \neq -1$, as primitivas de $f(x) = x^p$ são $F(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$. De fato, por derivação, temos*:

$$F'(x) = \frac{1}{p+1}(p+1)\,x^p = x^p = f(x)\,, \quad \forall x.$$

EXEMPLO 7.-4.3 *Para cada constante real C, a função $F(x) = \ln x + \frac{1}{3}x^3 + C$ é uma primitiva de $f(x) = 1/x + x^2$, no intervalo $0 < x < \infty$, e a primitiva que satisfaz $F(1) = 2$ é determinada ao encontrar o valor de C. Temos*:

$$F(1) = 2 \Leftrightarrow 2 = \ln 1 + \frac{1^3}{3} + C \Leftrightarrow C = 5/3$$

e a primitiva particular é $F(x) = \ln x + \frac{1}{3}x^3 + 5/3$.

As primitivas de f constituem a *Integral Indefinida* de f e anotamos:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

sendo C constante e $F(x)$ uma primitiva particular de $f(x)$. A seguir apresentamos as derivadas e primitivas das funções usuais do cálculo.

■ TABELA I: REGRAS BÁSICAS DE DERIVAÇÃO

1. Regra da soma: .... $(u + k \cdot v)' = u' + k \cdot v'$, $\quad k$ constante
2. Regra do Produto: .... $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

3. Regra do Quociente: .... $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

4. Regra da Potência: .... $\frac{d}{dx}[x^p] = px^{p-1}$

5. Regra da Cadeia I: .... $\frac{d}{dx}[f(u(x)] = f'(u(x) \cdot u'(x)$

6. Regra da Cadeia II: (Notação de Leibniz) .... $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

TABELA II: AS FUNÇÕES ELEMENTARES E SUAS DERIVADAS

1. Potência de x: .... x^p; $D(x^p) = px^{p-1}$

2. Logaritmo Natural de x: .... $\ln x$ ou $\log x$; $D(\ln x) = 1/x,\ x > 0$

3. Exponencial de x: .... e^x ou $\exp x$; $D(e^x) = e^x$

4. Seno de x: .... $\sin x$ ou $\operatorname{sen} x$; $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$

5. Cosseno de x: .... $\cos x$; $D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$

6. Tangente de x: .... $\tan x$ ou $\operatorname{tg} x$; $D(\tan x) = \sec^2 x$

7. Secante de x: .... $\sec x$ $D(\sec x) = \sec x \tan x$

8. Cotangente de x .... $\cot x$ ou $\operatorname{cotg} x$; $D(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

9. Cossecante de x: .... $\csc x$ ou $\operatorname{cosec} x$; $D(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

Se $f(x)$ é uma função cuja derivada não se nula no intervalo (a, b), então sua inversa $g(y)$ é derivável no intervalo (c, d), imagem do intervalo (a, b), com derivada:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad a < x < b, \quad y = f(x). \tag{7.-19}$$

Com auxílio da fórmula (7.-19) podemos chegar às derivadas das funções trigonométricas inversas, em um intervalo adequado.

1. Derivada do Arcoseno: .... $D(\operatorname{arcsen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

2. Derivada do Arcocosseno: .... $D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < \pi.$

3. Derivada do Arcotangente: .... $D(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2.$

4. Derivada do Arcocotangente: .... $D(\operatorname{arccotg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad 0 < x < \pi/2.$

5. Derivada do Arcosecante: .... $D(\operatorname{arcsec} x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

6. Derivada do Arcocosecante: .... $D(\operatorname{arccosec} x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad |x| > 1.$

■ **TABELA III: TABELA BÁSICA DE PRIMITIVAS** A partir das derivadas das funções básicas, obtemos a seguinte tabela de primitivas:

01. $\displaystyle\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$	02. $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
03. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C, \quad x \neq 0$	04. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x + C$
05. $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$	06. $\displaystyle\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
07. $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0 \text{ e } a \neq 1$	08. $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$
09. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(kx) dx = -\frac{\cos(kx)}{k} + C$	10. $\displaystyle\int \cos(kx) dx = \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$	12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{arccotg} x + C$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C$	16. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arccosec} x + C$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Em cada caso, determine a primitiva $F(x)$ da função $f(x)$, satisfazendo à condição especificada.

   (a) $f(x) = \sqrt[4]{x};\ F(1) = 2$ (b) $f(x) = x^2 + 1/x^2;\ F(1) = 0$ (c) $f(x) = (x+1)^{-1};\ F(0) = 2.$

2. Certa função derivável $f(x)$ é tal que $f(x) > 0,\ \forall x$, e $f(1) = 1$. Sabendo que $f'(x) = xf(x)$, encontre a expressão que representa $f(x)$. (sug.: derive a função $g(x) = \ln[f(x)]$)

3. Sejam f e g funções deriváveis em $\mathbb{R}$ e suponha que $f(0) = 0$ e $g(0) = 1$. Se $f'(x) = g(x)$ e $g'(x) = -f(x)$, $\forall x$, mostre que função $h(x) = [f(x) - \operatorname{sen} x]^2 + [g(x) - \cos x]^2$ tem derivada nula e, portanto, é constante. A partir daí deduza que $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

4. Em cada caso, calcule a integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

   (a) $f = x^3 - 5x$ (b) $f = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ (c) $f = 2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{x^5}$ (d) $f = \left(1 + x^2\right)^2$

   (e) $f = \left(1 + x^2\right)^{-1}$ (f) $f = \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{1+x}$ (g) $f = \sqrt{x} + \sec^2 x$ (h) $f = x^3\sqrt{x}$

   (i) $f = 2^x + e^{x+1}$ (j) $f = 2 + x^2 + \cos(2x)$ (k) $f = \sec^2(4x+2)$ (l) $f = \cos^2 x$

   (m) $f = 2 + \operatorname{sen}^2 x$ (n) $f = \sec(2x)\operatorname{tg}(2x)$ (o) $f = (x+1)\,x^{-1}$ (p) $f = x\,(x+1)^{-1}$

5. Mostre que $F(x) = \pm\frac{1}{p}\exp(\pm x^p)$, $p \neq 0$, é a primitiva de $f(x) = x^{p-1}\exp(\pm x^p)$, tal que $F(0) = \pm 1/p$. Agora, em cada caso escolha p e calcule as integrais indefinidas:

   (a) $\displaystyle\int x\exp\left(x^2\right)dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\exp\left(\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x}}$ (c) $\displaystyle\int x\exp\left(-x^2\right)dx$ (d) $\displaystyle\int x^3\exp\left(-x^4\right)dx$.

6. Determine a função f que satisfaz a: $f''(x) = x^2 + e^x$, $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$.

7.-3 A integral como área

Assim como a derivada, a integral, que passaremos a definir, tem origem geométrica. Deixe-nos considerar uma função contínua $y = f(x)$, $a \le x \le b$, que, por simplicidade, será suposta não negativa, isto é, $f(x) \ge 0$, para todo x no intervalo $[a, b]$. Na Figura (7.-10) ilustramos a derivada como declividade da reta tangente ao gráfico da função f, enquanto a Figura (7.-9) ilustra o retângulo elementar dA, de base infinitesimal Δx e altura $f(x)$, utilizado na aproximação da área sob o gráfico de f.

A área da região D acima do eixo Ox, delimitada pelo o gráfico da função f e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é aproximada pela soma das áreas dos retângulos elementares dA e, assim, temos:

$$\boxed{A(D) \approx \sum_{\Delta x} dA = \sum_{\Delta x} f(x)\Delta x.} \tag{7.-18}$$

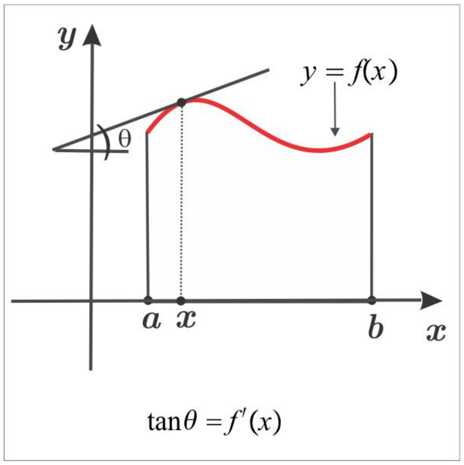

Figura 7.-10: A derivada $f'(x)$.

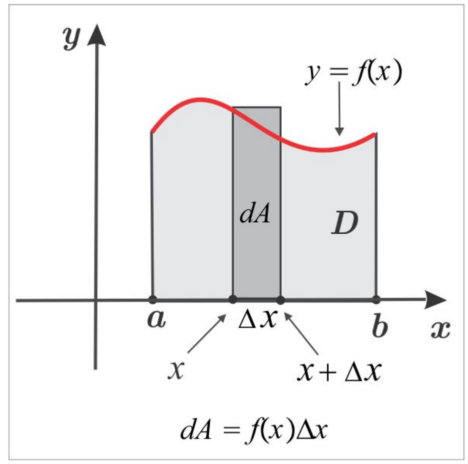

Figura 7.-9: A Área Elementar dA.

Demonstra-se que a soma do lado direito de (7.-18) tem limite finito, com $\Delta x \to 0$, e este limite, que é o valor da área $A(D)$, será indicado por:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sum_{\Delta x} f(x)dx \right) = A(D)} \tag{7.-17}$$

e na literatura recebe o nome de *Integral Definida* de f no intervalo $[a, b]$. É claro que se $a = b$, então então a região D se reduz a um segmento de reta e temos:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Ao escrever $\int_a^b f(x)\, dx$ estamos admitindo $a \leq b$ e, por definição, estabelecemos que:

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.} \tag{7.-16}$$

O sinal negativo no lado direito de (7.-16) aparece ao *inverter a orientação* do intervalo $[a, b]$.

Sobre o símbolo de integral introduzido em (7.-17), destacamos:

(a) O símbolo $\int$ faz referência à letra S e indica soma de *infinitésimos* (as áreas elementares dA).

(b) Os números a e b são os *limites de integração* e a função $f(x)$ recebe o nome de *integrando.*

(c) Normalmente se usa dx para indicar o infinitésimo no eixo Ox. Ele representa a base do retângulo elementar dA e indica que x é a *variável de integração.* Assim:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(\theta)\, d\theta, \quad \text{etc.}$$

PROPRIEDADES BÁSICAS: As propriedades da integral dadas a seguir ou são consequências das propriedades do limite ou seguem do conceito de integral como área. No caso em que o gráfico de certa função $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ situa-se abaixo do eixo Ox, teremos $g(x) \le 0$ no intervalo $c \le x \le d$ e, portanto, $g(x)\Delta x \le 0$. Logo, $dA \simeq -g(x)\,dx$ e assim:

$$A(D) = -\lim_{\Delta x \to 0}\left(\sum g(x)\Delta x\right) = -\int_a^b g(x)\,dx. \tag{7.-15}$$

A Figura 7.-8 ilustra os casos com $f \ge 0$ e $g \le 0$.

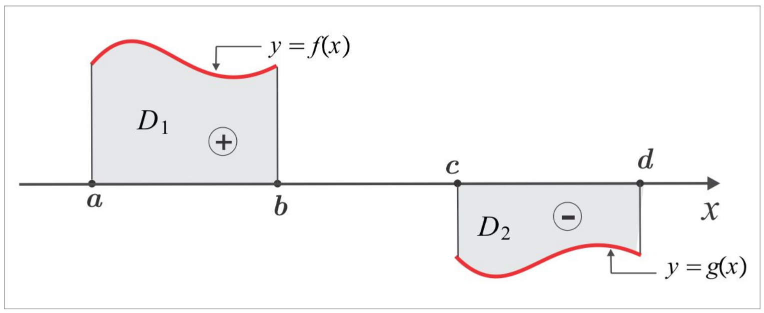

Figura 7.-8: $A(D_1) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $A(D_2) = -\displaystyle\int_c^d g(x)\,dx$.

(P1) Linearidade: Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções contínuas no intervalo $a \le x \le b$ e k é uma constante, então:

$$\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{e} \quad \int_a^b [k \cdot f(x)]\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.} \tag{7.-14}$$

(P2) Aditividade: Dado um número real c entre a e b, então:

$$\boxed{\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx} \tag{7.-13}$$

como ilustrado na Figura 7.-7. A área da região D sob o gráfico é $A(D) = A(D_1) + A(D_2)$.

(P3) Desigualdades: Se $f(x) \le g(x)$ no intervalo $a \le x \le b$, então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.} \tag{7.-12}$$

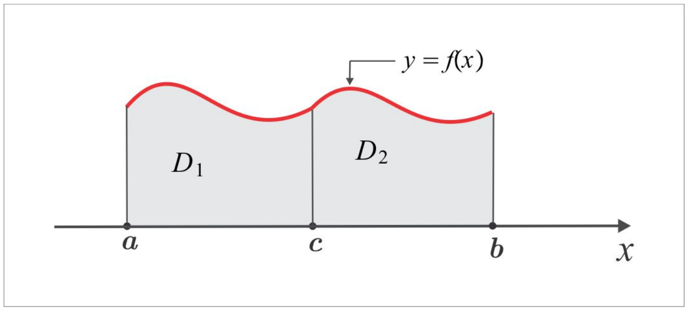

Figura 7.-7: $A(D_1 \cup D_2) = A(D_1) + A(D_2)$.

Como consequência de (7.-12) e das desigualdades $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, deduzimos que:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.} \tag{7.-11}$$

OBSERVAÇÃO 7.-3.1 *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é dita contínua por partes ou parcialmente contínua quando ela for contínua no intervalo $[a,b]$, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$ do intervalo $[a,b]$. Uma tal função com limites laterais finitos nas possíveis descontinuidades $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ é integrável em $[a,b]$ e temos:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_k}^{b} f(x)dx.} \tag{7.-10}$$

A Figura 7. − 6 ilustra o gráfico de uma função f contínua por partes onde vemos as descontinuidades nos pontos $x_1,\ x_2$ e x_3.

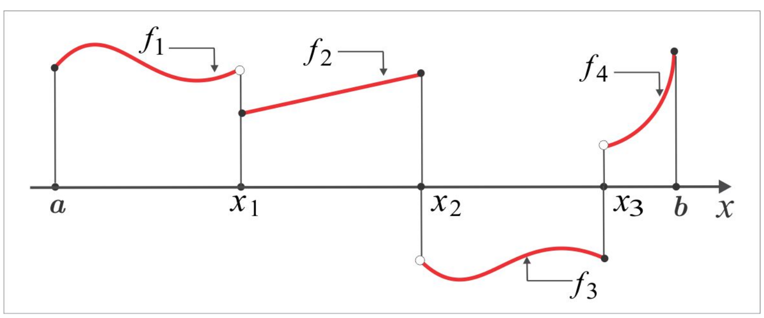

Figura 7.-6: Função Contínua por Partes

■ **O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:** Dada uma função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, deixe-nos considerar a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \le x \le b. \tag{7.-9}$$

No caso em que $f(x)$ é uma função não negativa, o valor $F(x)$ é precisamente a área abaixo do gráfico de f, entre $t = a$ e $t = x$, como ilustra a Figura 7.-5.

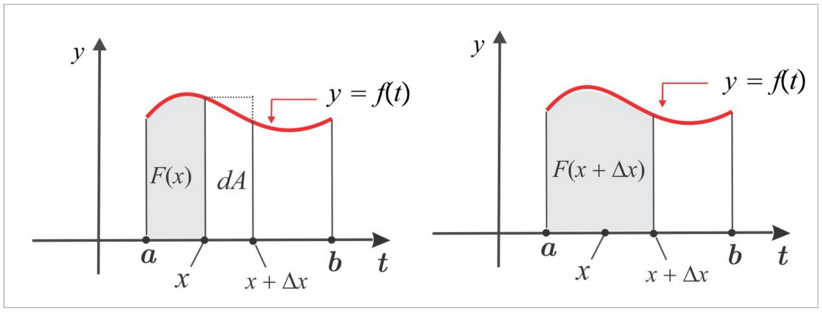

Figura 7.-5: $F(x + \Delta x) - F(x) = dA \simeq f(x)\,\Delta x$.

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e para comprová–lo, olhamos a Figura 7.-5 para deduzir que:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \simeq \frac{1}{\Delta x}\left[f(x)\,\Delta x\right] = f(x) \tag{7.-8}$$

e fazendo $\Delta x \to 0$ em (7.-8), encontramos:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}\right] = f(x). \qquad \blacksquare$$

A primitiva dada por (7.-9) é tal que $F(a) = 0$ e qualquer outra primitiva $G(x)$ é da forma:

$$G(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

e considerando $x = a$, obtemos $C = G(a)$, de modo que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).} \tag{7.-7}$$

O Teorema Fundamental do Cálculo, que é um instrumento útil no cálculo de integrais definidas, se apresenta sob duas formas equivalentes:

(1) Derivada sob o sinal de integral: .... $\boxed{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x), \quad a \le x \le b.}$

(2) Integral da derivada: .... $\boxed{\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a), \quad a \le x \le b.}$

EXEMPLO 7.-3.2 *Para calcular a área da região $D = D_1 \cup D_2$, ilustrada na Figura 7. − 4, usamos a propriedade aditiva (7. − 10) e um cálculo direto nos dá:*

$$A(D) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x/2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

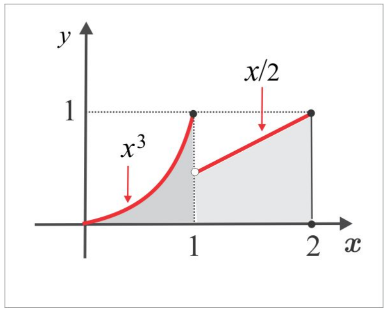

Figura 7.-4: Região do Exemplo 7. − 3.2.

EXEMPLO 7.-3.3 (Área entre duas Curvas) *Calcular a área da região D do primeiro quadrante, entre as curvas $y = x^2$ e $y = x$. A Figura 7. − 3 ilustra graficamente a situação geral, onde vemos que:*

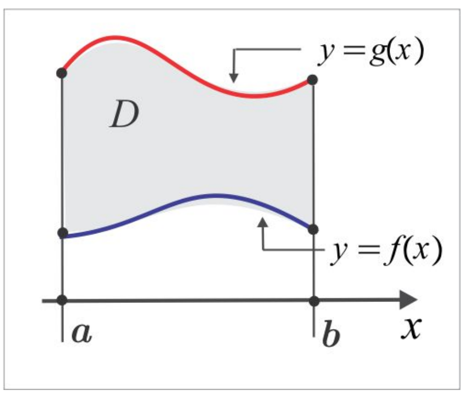

Figura 7.-3: Área entre duas curvas.

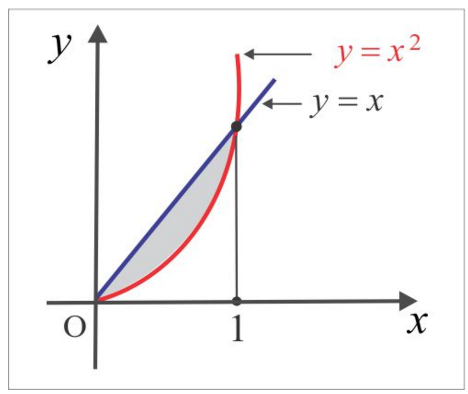

Figura 7.-2: Área entre duas curvas.

$$\boxed{A(D) = \int_a^b \Big[g(x) - f(x)\Big]dx.} \tag{7.-6}$$

No caso particular das curvas $y = x^2$ e $y = x$, ilustrado na Figura 7. − 2, encontramos:

$$A(D) = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1/6.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. Se k é um número inteiro não negativo, calcule o valor de:

   (a) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kt)\,dt$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\operatorname{sen}(kt)\,dt$ (c) $\int_0^{\pi/4} \left[\cos^2(kt) - \operatorname{sen}^2(kt)\right] dt$.

2. Encontre a equação da curva que passa no ponto $A(-3,0)$ e cuja inclinação da reta tangente, em cada um de seus pontos (x,y), é $m(x) = 2x+1$.

3. DERIVAÇÃO SOB O SINAL DE INTEGRAL Deixe f ser uma função contínua em $[a,b]$ e suponha que $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ sejam funções de $(a,b) \to [a,b]$ deriváveis. Se

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt,$$

   mostre que φ é derivável em (a,b) e deduza a Regra de Leibniz:

$$\varphi'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x). \tag{7.-5}$$

4. Usando a Regra de Leibniz (7.-5), calcule $\varphi'(x)$ em cada caso abaixo:

   (a) $\varphi(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^4}\,dt$ (b) $\varphi(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} (\ln t)^5\,dt$ (c) $\varphi(x) = \int_{x^2-1}^{\exp x} \cos(t^2)\,dt$.

5. Em cada caso abaixo, calcule a integral definida de f, no intervalo I indicado.

   (a) $I = [-1,1]$; $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x < 0 \\ x^2 - x + 1, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ (b) $I = [-2,2]$; $f(x) = |x-1|$

   (c) $I = [-\pi,\pi]$; $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ (d) $I = [-\pi,\pi]$; $f(x) = x + |\cos x|$

   (e) $I = [-3,5]$; $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ (f) $I = [-\pi,\pi]$; $f(x) = x - |x|$

6. Em cada caso, calcule a área da região $\mathcal{R}$.

   (a) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = x^4$ e $y = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (b) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = x^3$, para $0 \leq x \leq 1$.

   (c) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = |x|$ e $y = -x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$.

   (d) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = -x^2 + 4$ e $y = x^2$.

(e) $\mathcal{R}$ é delimitada pelo eixo y e pelas curvas $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$, para $0 \le x \le \pi/4$.

(f) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas retas $x = 0,\ x = 1,\ y = 2$ e pela parábola $y = x^2$.

(g) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

(h) $\mathcal{R}$ é delimitada pela curva $y = \sqrt{x}$ e pelas retas $y = x - 2$ e $y = 0$.

(i) $\mathcal{R}$ é delimitada pela curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x.

(j) $\mathcal{R}$ é delimitada pelas parábolas $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$.

7. Em cada caso, esboce o gráfico da região $\mathcal{R}$ e calcule sua área.

(a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \le x \le 2$ e $x^2 \le y \le 4\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $x \ge 0$ e $x^2 - x \le y \le -x^2 + 5x\}$.

(c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \le x \le 1/y$ e $1 \le y \le 2\}$.

(d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $0 \le x \le 1$ e $x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$.

(e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tal que $-1 \le x \le 1$ e $0 \le y \le |x|^3\}$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x^3/4, \text{ para } x < 0 \\ x^2 - x - 2, \text{ para } 0 \le x < 3 \\ 16 - 4x, \text{ para } x \ge 3. \end{cases}$$

Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\, dx$ e, também, a área entre o gráfico de f e o eixo x, de $x = -2$ até $x = 5$. Por que o valor da integral e o valor da área são distintos?

9. Em cada caso, identifique a região do plano xy cuja área é representada pela integral e calcule o valor da área.

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 2x dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^0 (4 + 3x)\, dx$ (d) $\displaystyle\int_{-5}^{-3} (x + 5)\, dx + \int_{-3}^{0} 2dx + \int_0^4 (2 - \sqrt{x})\, dx$.

10. Suponha que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ seja uma função par e que $g : [-a, a] \to \mathbb{R}$ seja uma função ímpar. Mostre que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{-a}^{a} g(x)\, dx = 0.$$

11. Considere a função $y = f(t)$, ilustrada na Figura 7.-1 e defina a função g por:

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$. Em que intervalo a função g está crescendo? Quando g atinge seu valor máximo?

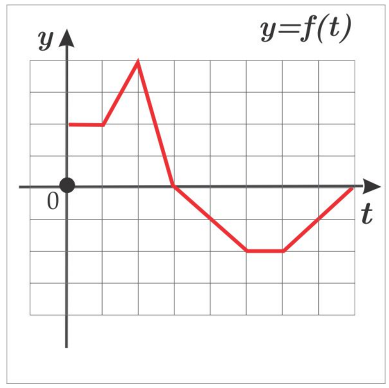

Figura 7.-1: Função $y = f(t)$ do Exercício 11.

7.-2 Integrais Impróprias

Quando a função $f(x)$ não é limitada no intervalo $[a, b]$ ou este inetrvalo não é limitado (isto ocorre se $a = -\infty$ ou $b = \infty$) a integral de f no intervalo (a, b) denominar-se-á *Integral Imprópria*. A integral imprópria de f pode ser convergente ou divergente, conforme ela tenha um valor real ou não. Investiguemos a convergência ou não das seguintes integrais impróprias:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \quad \textbf{(c)} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} \quad \textbf{(d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x)\, dx.$$

Notamos que em (a) e (c) os respectivos integrandos não são limitados, tendo em vista que:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1/\sqrt{x}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} (1/x) = -\infty.$$

e nos outros casos, o intervalo de integração não é limitado.

(a) Temos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 = 2 \lim_{a\to 0^+} \left(\sqrt{1} - \sqrt{a}\right) = 2$$

e a integral imprópria converge e tem valor 2.

(b) Usando $F(x) = \arctan x$ como primitiva de $(1+x^2)^{-1}$, lembrando que $\lim_{x\to\infty} (\arctan x) = \pi/2$ e $\arctan 0 = 0$, encontramos:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan x\right]_0^b = \lim_{x\to\infty} (\arctan b) = \pi/2.$$

A integral é convergente e tem valor $\pi/2$.

(c) Neste caso, a integral é divergente, porque:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = \lim_{b\to 0^-} \int_{-1}^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to 0^-} \left[\ln|x|\right] = \lim_{b\to 0^-} \ln|b| = -\infty.$$

(d) Um cálculo direto nos dá:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^b \exp(-x)\, dx = -\lim_{b\to\infty} \left[e^{-b} - e^{b}\right] = +\infty$$

de onde resulta que a integral é divergente.

EXEMPLO 7.-2.1 *Usando a primitiva* $F(x) = -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$ *da função* $f(x) = x\exp(-x^2)$, *estabelecida no Exercício 5 da seção Escrevendo para Aprender* 7.1, *encontramos*:

$$\int_{-\infty}^0 x\exp(-x^2)\, dx = \lim_{B\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}\exp(-x^2)\right]_a^0 = -1/2$$

de onde resulta que a integral é convergente e tem valor $-1/2$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.3

1. Investigue a *convergência* ou *divergência* das seguintes integrais impróprias.

   (a) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ **(b)** $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ **(c)** $\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ **(d)** $\int_0^2 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ **(e)** $\int_0^\infty x^3 e^{-x^4} dx$.

2. Use $F(x) = (1+x)^{-1}$ como primitiva de $f(x) = \ln(1+x)$ e investigue a converência ou não da integral imprópria:

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+x}.$$

3. Verifique que $F(x) = (5-x)^{-1}$ é primitiva de $f(x) = (5-x)^2$ e estude a natureza (convergente ou divergente) da integral imprópria:
$$\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2}.$$

7.-1 Mudança de Variável

A fórmula de Mudança de Variável tem sua origem na Regra da Cadeia. Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e $g(x)$ é uma função derivável nos pontos da imagem de f, segue da Regra da Cadeia que:

$$\frac{d}{dx}\left[F(g(x))\right] = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) \tag{7.-4}$$

e considerando a mudança de variável $u = g(x)$, lembrando que $du = g'(x)\,dx$, resulta de (7.-4):

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C.} \tag{7.-3}$$

A expressão em (7.-3) é a fórmula de *Mudança de Variável*[1].

EXEMPLO 7.-1.1 *Com a fórmula de Mudança de Variável, vamos calcular a integral*:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1}.$$

SOLUÇÃO Inicialmente, considerando $f(u) = \dfrac{1}{2u}$ e $g(x) = x^2+1$, obtemos $g'(x) = 2x$ e um cálculo direto nos dá:

$$f(g(x))\,g'(x) = \frac{1}{2(x^2+1)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+1}$$

e usando a fórmula (7.-3), resulta:

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \int f(u)\,du = \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \tfrac{1}{2}\ln|u| = \tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

EXEMPLO 7.-1.2 *Se $k \neq 0$, considerando a mudança de variável $u = kx$ e $du = kdx$, obtemos*:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{-\cos(kx)}{k} + C$ **(b)** $\displaystyle\int \cos(kx)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$ **(c)** $\displaystyle\int e^{kx}dx = \frac{e^{kx}}{k} + C.$

[1] A fórmula (7.-3) traduz a técnica de integração conhecida por *Método de Substituição*.

EXEMPLO 7.-1.3 *Com a substituição $u = x^3 + 1$, obtemos $du = 3x^2 dx$ e, assim:*

$$\int x^2 \cos\left(x^3+1\right) dx = \int \tfrac{1}{3}\cos u du = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} u + C = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}\left(x^2+1\right) + C.$$

EXEMPLO 7.-1.4 *Calcular as integrais definidas:*

$$(\mathbf{a}) \quad \int_0^{\sqrt{2}} x \exp\left(x^2\right) dx \quad e \quad (\mathbf{b}) \quad \int_{-1}^{2} x^2\sqrt{x^3+1}dx.$$

SOLUÇÃO Ao usar uma mudança de variável em uma integral definida, os limites de integração devem ser alterados, de acordo com a mudança. No caso (a), consideramos $u = x^2$, $du = 2xdx$ e os novos llimites de integração para variável u são 0 e 2, correspondentes a $x = 0$ e $x = \sqrt{2}$, respectivamente.

(a) Temos:

$$\int_0^{\sqrt{2}} x \exp\left(x^2\right) dx = \int_0^2 e^u \left(\tfrac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int_0^2 e^u du = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^2 = \tfrac{1}{2}\left(e^2-1\right).$$

(b) Neste caso, fazemos $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 dx$, com $0 \le u \le 9$, e encontramos:

$$\int_{-1}^{2} x^2\sqrt{x^3+1}dx = \int_0^9 \sqrt{u}\left(\tfrac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3}\int_0^9 u^{1/2}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^9 = 6.$$

EXEMPLO 7.-1.5 *Com a substituição $u = \cos x$, vamos calcular $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^3 x \operatorname{sen} x dx$. De fato, por diferenciação temos $du = -\operatorname{sen} x dx$ e, portanto:*

$$\int_0^{\pi} \cos^3 x \operatorname{sen} x dx = -\int_1^{-1} u^3 du = \int_{-1}^{1} u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_{u=-1}^{u=1} = 0.$$

EXEMPLO 7.-1.6 *Considerando $u = \cos x$ e $du = -\operatorname{sen} x dx$, com $-\pi/2 < x < \pi/2$, obtemos:*

$$\int \tan x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos x} = \int \left(-\frac{du}{u}\right) = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

EXEMPLO 7.-1.7 *Integrais de produtos e potências de senos e cossenos podem ser calculadas por uma mudança de variável e as integrais básicas*

$$\int \cos^2\theta d\theta \quad e \quad \int \operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

aparecem com frequência e são calculadas com auxílio das identidades:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \quad e \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta) \tag{7.-2}$$

Temos:

$$\boxed{\int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + C.} \tag{7.-1}$$

De modo similar, encontramos:

$$\boxed{\int \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2\theta)d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + C.} \tag{7.0}$$

Por exemplo, para calcular a integral de $\cos^3 x$, *procedemos assim*:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x dx &= \int \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\cos x dx = (\textit{usar } u = \operatorname{sen} x) = \int \left(1-u^2\right) du \\ &= u - \frac{u^3}{3} + C = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.\end{aligned}$$

EXEMPLO 7.-1.8 *Calcular a integral definida*:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x dx.$$

SOLUÇÃO Usando o que foi estabelecido no Exemplo 7.-1.7, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x dx &= \int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = (\text{usar } \theta = 2x) = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{8}\left(\int_0^{\pi} d\theta - 2\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{\pi}\cos^2\theta d\theta\right) \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{16}\left[\int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi}\cos(2\theta)\, d\theta\right] = 3\pi/16.\end{aligned}$$

Substituição Trigonométrica

As integrais que envolvem as expressões $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ e $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ podem ser calculadas com auxílio de substituições trigonométricas especiais. As substituições mais comuns são $x = a\operatorname{tg}\theta$, $x = a\operatorname{sen}\theta$ e $x = a\sec\theta$, sugeridas a partir das relações nos triângulos retângulos da Figura 7.0, onde vemos que:

(a) a mudança $x = a\operatorname{tg}\theta$ substitui $a^2 + x^2$ por $a^2\sec^2\theta$ e dx por $a\sec^2\theta d\theta$.

(b) a mudança $x = a\operatorname{sen}\theta$ substitui $a^2 - x^2$ por $a^2\cos^2\theta$ e dx por $a\cos\theta d\theta$.

(c) a mudança $x = a\sec\theta$ substitui $x^2 - a^2$ por $a^2\tan^2\theta$ e dx por $a\sec\theta\tan d\theta$.

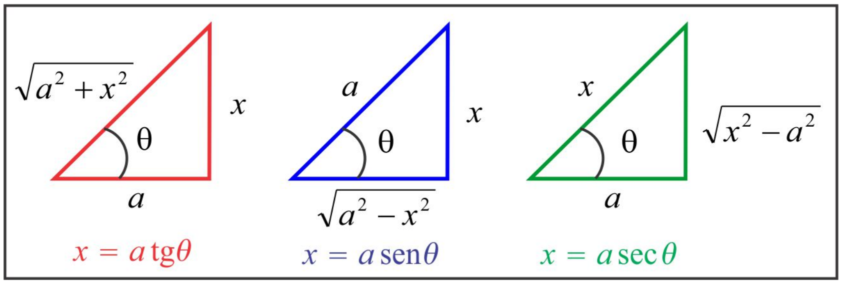

Figura 7.0: Substituição trigonométrica.

EXEMPLO 7.-1.9 *Calclular a integral indefinida*:

$$I = \int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

SOLUÇÃO No intervalo onde $\cos\theta > 0$, com a substituição $x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ e $dx = 2\cos\theta d\theta$, encontramos:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{4\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,(2\cos\theta)\,d\theta}{\sqrt{4-4\,\mathrm{sen}^2\,\theta}} = 4\int \frac{\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta d\theta}{\cos\theta} = 4\int \mathrm{sen}^2\,\theta d\theta = 2\theta - \mathrm{sen}\,(2\theta) + C \\ &= 2\,\mathrm{arcsen}\,(x/2) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.-1.10 *Com a substituição $x = 4\tan\theta$, calcular*:

$$I = \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+16}}.$$

SOLUÇÃO Temos $dx = 4\sec^2\theta$ e por substituição, obtemos:

$$I = 64\int \sec\theta\tan^3\theta d\theta = 64\int \frac{\mathrm{sen}^3\,\theta d\theta}{\cos^4\theta} = 64\int \frac{\left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta d\theta}{\cos^4\theta}$$

e considerando $t = \cos\theta$, resulta:

$$\begin{aligned} I &= 64\int \frac{\left(1-t^2\right)(-dt)}{t^4} = 64\left[\int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t^4}\right] \\ &= \left(16+x^2\right)^{3/2} - 16\sqrt{16+x^2} + C. \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.-1.11 *Calcular a área da região $\mathcal{R}$ do plano xy delimitada pela elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

SOLUÇÃO Se $\mathcal{D}$ representa a área da parte da região $\mathcal{R}$ situada no 1^o quadrante, como ilustrado na Figura 7.1, então a área $A(\mathcal{R})$ da elipse é dada por:

$$A(\mathcal{R}) = 4 \cdot A(\mathcal{D}) = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

e com a substituição $x = a \operatorname{sen} \theta$, obtemos:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= \frac{4b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \, (a \cos \theta d\theta) = 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} \, \cos \theta d\theta \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = (\text{usar } 7.\text{-}1) = \pi ab. \end{aligned}$$

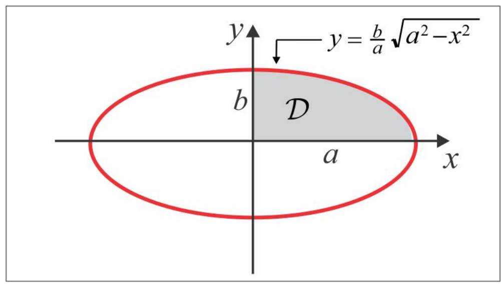

Figura 7.1: Área da Elipse.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.4 (click aqui e veja a lista completa)

1. Com a substituição $u = g(x)$ sugerida, calcule as seguintes integrais.

   (a) $\int e^{kx} dx; \quad u = kx$ .... (resp.: $\frac{1}{k}\exp(kx) + C, \ k \neq 0$)

   (b) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2(3x)}; \quad u = 3x$ .... (resp.: $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}(3x) + C$)

   (c) $\int \frac{dx}{3x - 7}; \quad u = 3x - 7$ .... (resp.: $\frac{1}{3}\ln|3x - 7| + C$)

   (d) $\int x\sqrt{x^2 + 1} dx; \quad u = x^2 + 1$ .... (resp.: $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$)

   (e) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 + 1}}; \quad u = x^3 + 1$ .... (resp.: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 + 1} + C$)

   (f) $\int \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x}; \quad u = \operatorname{sen} x$ .... (resp.: $-\operatorname{cosec} x + C$)

(g) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+2x+3}$; $u = x^2+2x+3$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$)

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$; $u = \ln(x+1)$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\left[\ln(x+1)\right]^2+C,\ x>-1$)

(i) $\displaystyle\int \left(e^{5x}+a^{5x}\right)dx$, $a>0$; $u=5x$ .... (resp.: $-\dfrac{e^{5x}}{5}+\dfrac{a^{5x}}{5\ln a}+C$)

(j) $\displaystyle\int e^{x^2+4x+3}(x+2)\,dx$; $u = x^2+4x+3$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\exp(x^2+4x+3)+C$)

(k) $\displaystyle\int 2x^3\sqrt{x^2+1}dx$; $u = x^2+1$ .... (resp.: $\frac{2}{5}(x^2+1)^{5/2}-\frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2}+C$)

2. Calcule as seguintes integrais envolvendo funções trigonométricas.

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x dx$ .... (resp.: $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$)

(b) $\displaystyle\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+C$)

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x dx}{\operatorname{sen}^4 x}$ .... (resp.: $\operatorname{cosec} x-\frac{1}{3}\operatorname{cosec}^3 x+C$)

(d) $\displaystyle\int \tan^3 x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|+C$)

(e) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^5 x dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{4}\operatorname{cosec}^4 x+\operatorname{cosec}^2 x+\log|\operatorname{sen} x|+C$)

(f) $\displaystyle\int \cos 4x\cos 7x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{6}\sin(3x)+\frac{1}{22}\sin(11x)+C$)

(g) $\displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$)

(h) $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x dx$ .... (resp.: $\frac{2}{3}\sin^{3/2} x+C$)

(i) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^p x\cos^3 x dx$ .... (resp.: $\dfrac{(\sin x)^{1+p}}{1+p}-\dfrac{(\sin x)^{3+p}}{3+p}+C$)

(j) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\sec^3 x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\sin^3 x\sec^2 x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\log|\sec x+\tan x|+C$)

(k) $\displaystyle\int \cos 2x \operatorname{sen} 4x dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$)

(l) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$)

3. Use uma substituição trigonométrica e calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$)

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$ .... (resp.: $-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\text{arcsen}(x/2) + C$)

(c) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+8x+5}}$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+8x+5} - \frac{1}{2}\ln(2+2x+\sqrt{4x^2+8x+5}) + C$)

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ .... (resp.: $\ln\left(1+x+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$)

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ .... (resp.: $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$)

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-5}}$ .... (resp.: $\ln(-2+x+\sqrt{x^2-4x-5}) + C$)

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$ .... (resp.: $\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) + C$)

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x-3}}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x-3}\right) + C$)

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$ .... (resp.: $-\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{9x} + C$)

(j) $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+3} + \frac{5}{4}\ln\left|1+2x+\sqrt{4x^2+4x+3}\right) + C$)

(k) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ .... (resp.: $-\sqrt{-x^2-2x+8} - \arcsin\frac{1}{3}(x+1) + C$)

(l) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ .... (resp.: $-\frac{1}{4}x(4-x^2)^{3/2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin(x/2) + C$)

7.0 Integração por Partes

A Fórmula de Integração por Partes tem como alvo as integrais do tipo:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx$$

e é deduzida a partir da Regra do Produto para derivação. De fato, temos:

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x)\cdot g(x)\Big] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

de onde resulta, após a integração, a seguinte regra:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx. \tag{7.1}$$

A relação (7.1) é a Fórmula de Integração por Partes, onde observamos que a derivada passou da função g, na integral do lado esquerdo, para a função f na integral do lado direito. Normalmente, a fórmula (7.1) aparece na literatura sob a forma classica:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{7.2}$$

onde consideramos $u = f(x)$ e $dv = g'(x)\,dx$ e para integral definida a Fórmula de Integração por Partes torna-se:

$$\int_a^b udv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b vdu. \tag{7.3}$$

O roteiro para integrar por partes consiste no seguinte:

(i) Olhamos a integral sob a forma $\int udv$ e identificamos u e dv. Por diferenciação encontramos u e por integração encontramos v.

(ii) Usamos a fórmula de integração por partes (7.2).

(iii) Calculamos a integral resultante no lado direito de (7.2).

EXEMPLO 7.0.1 *Calcular a integral indefinida de* $x \operatorname{sen} x$.

SOLUÇÃO Notando que $d(-\cos x) = \operatorname{sen} x dx$, temos:

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \int x d(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

Para chegar ao resultado, escolhemos $u = x$ e $dv = \operatorname{sen} x dx$. Por diferenciação obtemos $du = dx$ e por integração $v = -\cos x$.

EXEMPLO 7.0.2 *Calcular, usando integração por partes, as integrais*:

(a) $\int (xe^x)\,dx$ **(b)** $\int_1^2 (\ln x)\,dx$.

SOLUÇÃO No caso (a), temos:

$$\int (xe^x)\,dx = \int xd(e^x) = (\text{usar } u = x \text{ e } v = e^x) = xe^x - \int e^x dx = (x-1)\,e^x + C.$$

No caso (b), consideramos $u = \ln x$ e $dv = dx$, o que nos dá $du = (1/x)\,dx$ e $v = x$. De (7.3) resulta:

$$\int_1^2 (\ln x)\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^2 - \int_1^2 dx = (2\ln 2 - \ln 1) - (2-1) = 2\ln 2 - 1.$$

EXEMPLO 7.0.3 *No cálculo de integrais do tipo* $\int f(x)\,dx$, *a escolha natural é* $u = f(x)$ *e* $dv = dx$. *Por exemplo*:

$$\int \arctan x dx = (usar\ u = \arctan x \ e \ v = x) = x \arctan x - \int \frac{x\ dx}{1+x^2} = x \arctan x - \tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$$

EXEMPLO 7.0.4 *Em alguns casos é necessário aplicar o método duas vezes. De fato*:

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x dx &= -\int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= -e^x \cos x + \int e^x d(\operatorname{sen} x) = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x dx\end{aligned}$$

e daí resulta:

$$2\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) \quad ou \quad \int e^x \operatorname{sen} x dx = \frac{e^x}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x).$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.5 (click aqui e veja a lista completa)

1. Usando o Método de Integração por Partes, calcule as seguintes integrais indefinidas.

   (a) $\int x \ln x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$)

   (b) $\int x \operatorname{sen}(kx)\,dx, \quad k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{k^2} - \dfrac{x\cos(kx)}{k} + C$)

   (c) $\int x \cos(kx)\,dx, \quad k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\dfrac{\cos(kx)}{k^2} + \dfrac{x\operatorname{sen}(kx)}{k} + C$)

   (d) $\int \operatorname{arcsen} x dx$ .... (resp.: $x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + C$)

   (e) $\int x^n \ln x dx$ .... (resp.: $\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x - \frac{1}{n+1}) + C$)

   (f) $\int x \arctan x dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C$)

   (g) $\int \ln(x^2+1)dx$ .... (resp.: $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C$)

   (h) $\int \dfrac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ .... (resp.: $2\sqrt{x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$)

   (i) $\int \dfrac{x \arctan x dx}{(x^2+1)^2}$ .... (resp.: $\dfrac{x - (1-x^2)\operatorname{arctg} x}{4(1+x^2)} + C$)

   (j) $\int x \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) dx$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\left[x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}\right] + C$)

(k) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen} x dx}{x^2}$ .... (resp.: $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + C$)

(l) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$ .... (resp.: $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$)

2. Calcule as seguintes integrais definidas.

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx$ .... (resp.: $e-2$)

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx)\, dx, \quad k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$)

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \operatorname{sen}(kx)\, dx, \quad k = 1, 2, 3,$ .... (resp.: $\frac{-4\pi^2}{k}$)

7.1 Decomposição em Frações Parciais

Antes da descrição do método, deixe-nos considerar algumas integrais básicas, já calculadas por substituição, que normalmente aparecem ao aplicarmos o método.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = (\text{usar } u = ax+b \text{ e } du = adx) = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$ $\quad (a \neq 0)$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^p} = (\text{usar } u = ax+b \text{ e } du = adx) = \frac{1}{a}\int u^{-p} du = \frac{(ax+b)^{1-p}}{a(1-p)} + C.$ $\quad (a \neq 0 \text{ e } p \neq 1)$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{ax^2+b} = (\text{usar } u = ax^2+b \text{ e } du = 2axdx) = \frac{1}{2a}\ln\left|ax^2+b\right| + C.$ $\quad (a \neq 0)$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{1+(x/b)^2} = (\text{usar } u = x/b) = \frac{1}{b}\arctan(x/b) + C.$ $\quad (b \neq 0)$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \int \frac{dx}{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} = (\text{usar } u = x + b/2a) = \int \frac{du}{au^2 - \frac{\Delta}{4a}}.$ $\quad (a \neq 0 \text{ e } \Delta < 0)$

A última integral em (5) é do tipo $\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$, como mostrado no Exemplo 7.1.1.

EXEMPLO 7.1.1 *Calcular a integral indefinida:*

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

SOLUÇÃO Temos $a = 1,\ b = 4,\ c = 6$ e $\Delta = b^2 - 4ac = -8 < 0$ e completando o quadrado no trinômio do denominador, encontramos $x^2 + 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$ e temos:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\frac{(x-2)^2}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Agora, considerando $t = (x-2)/\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}dt = dx$, resulta:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan t + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

O método de decompoição em Frações Parciais é direcionado ao cálculo de integrais de funções racionais, isto é, integrandos do tipo $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, sendo $P(x)$ e $Q(x)$ dois polinômios. Vamos tratar o caso em que o grau do numerador $P(x)$ é menor do que o grau do denominador $Q(x)$; o outro caso se reduz a este, após a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$.

O método se inicia decompondo o denominar $Q(x)$ em produtos de fatores irredutíveis do 1º grau $(x-a)^n$ e/ou do 2º grau $\left(ax^2+bx+c\right)^m$, com $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. No caso em que $\Delta \geq 0$ o trinômio ax^2+bx+c se expressa como produto $(x-x_1)(x-x_2)$, sendo x_1 e x_2 as raízes reais. O fator $(x-a)^n$ produz as frações parciais:

$$\frac{A_1}{x-a},\ \frac{A_2}{(x-a)^2},\ \frac{A_3}{(x-a)^3},\ldots,\ \frac{A_n}{(x-a)^n}, \tag{7.4}$$

enquanto o fator irredutível $\left(ax^2+bx+c\right)^m$ produz as frações parciais:

$$\frac{B_1x+C_1}{ax^2+bx+c},\ \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2},\ \frac{B_3x+C_3}{(ax^2+bx+c)^3},\ldots,\ \frac{B_mx+C_m}{(ax^2+bx+c)^m} \tag{7.5}$$

As integrais das frações parciais são calculadas com auxílio das integrais básicas introduzidas no início desta seção. Na sequência veremos alguns exemplos para ilustrar o método.

EXEMPLO 7.1.2 *Calcular a integral*:

$$\int \frac{xdx}{x^2-3x+2}.$$

SOLUÇÃO Temos $P(x) = x$, de grau 1, e $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, de grau 2, com $\Delta = 1$ e raízes $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ e, assim:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}$$

e a decomposição:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

nos conduz à identidade polinomial $(A+B)x-2A-B=x$ e igualando os coeficientes, chegamos ao sistema linear:

$$\left| \begin{array}{l} A+B=1 \\ 2A+B=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow A=-1 \text{ e } B=2.$$

Logo, se $x \neq 1$ e $x \neq 2$, teremos:

$$\int \frac{xdx}{x^2-3x+2} = \int \frac{-1dx}{x-1} + \int \frac{2dx}{x-2} = -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C.$$

EXEMPLO 7.1.3 *O polinômio $Q(x) = x^2+2x+2$ é irredutível (não tem raiz real) e pode ser expresso como $Q(x) = (x+1)^2+1$ e, portanto:*

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+2x+2} &= \int \frac{(x-3)\,dx}{(x+1)^2+1} = (\textit{usar } t = x+1) = \int \frac{(t+4)\,dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{tdt}{1+t^2} + 4\int \frac{dt}{1+t^2} = \tfrac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + 4\arctan t + C \end{aligned}$$

e retornado com a variável x, encontramos:

$$\int \frac{(x-3)\,dx}{x^2+2x+2} = \tfrac{1}{2}\ln\left[1+(x+1)^2\right] + 4\arctan(x+1) + C.$$

EXEMPLO 7.1.4 *Calcular a integral definida:*

$$\int_1^2 \frac{\left(x^2+2\right)dx}{x^3+x}.$$

SOLUÇÃO Fatorando o denominador como $x\left(x^2+1\right)$, obtemos a decomposição em frações parciais:

$$\frac{x^2+2}{x^3+x} = \frac{x^2+2}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)}$$

e igualando os numeradores, obtemos $x^2+2 = (A+B)x^2+Cx+A$ e daí segue $A=2,\ B=-1$ e $C=0$. Assim:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\left(x^2+2\right)dx}{x^3+x} &= \int_1^2 \frac{2dx}{x} + \int_1^2 \frac{-xdx}{x^2+1} = 2\Big[\ln x\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\Big[\ln\left(x^2+1\right)\Big]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - \ln\left(\sqrt{5/2}\right) = \ln\left(8/\sqrt{10}\right). \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.1.5 *Calcular a integral indefinida:*

$$\int \frac{x^3dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

SOLUÇÃO Considerando a decomposiçao em frações parciais:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)\,x+B+D}{(x^2+1)^2}$$

encontramos $x^3=Ax^3+Bx^2+(A+C)\,x+B+D$ e daí resulta $A=1,\ B=0,\ C=-1$ e $D=0$. Assim, com a substituição $t=x^2+1$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3dx}{(x^2+1)^2} &= \int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln|t|+\frac{1}{t^2}\right]+C=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\right]+C.\end{aligned}$$

EXEMPLO 7.1.6 *Neste exemplo, abordaremos o caso em o grau do numerador é maior do que o grau do denominador. Calcular a integral*:

$$\int\frac{\left(x^3-2x\right)dx}{x^2+x+1}.$$

SOLUÇÃO Temos $P(x)=x^3-2x$, de grau 3, e $Q(x)=x^2+x+1$, de grau 2. Efetuando a divisão de $P(x)$ por $Q(x)$, obtemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=q(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

onde $q(x)=x-1$ é o quociente e $R(x)=-2x+1$ é o resto da divisão. Assim:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int q(x)\,dx+\int\frac{R(x)}{Q(x)}dx. \tag{7.6}$$

Ressaltamos que na última integral em (7.6) o numerador $R(x)$ tem grau menor do que o denominador $Q(x)$ e o cálculo da integral se reduz ao caso anterior.

$$\begin{aligned}\int\frac{\left(x^3-2x\right)dx}{x^2+x+1} &= \int(x-1)\,dx+\int\frac{(-2x+1)\,dx}{x^2+x+1}=\frac{x^2}{2}-x-\int\frac{2x+1-2}{x^2+x+1}dx\\ &= \frac{x^2}{2}-x-\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}+2\int\frac{dx}{x^2+x+1}\\ &= \frac{x^2}{2}-x-\ln\left(x^2+x+1\right)+2\int\frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}.\end{aligned}$$

A última integral pode ser calculada com a substituição $t=x+1/2$ e, finalmente, encontramos:

$$\int\frac{\left(x^3-2x\right)dx}{x^2+x+1}=\frac{x^2}{2}-x-\ln\left(x^2+x+1\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

EXEMPLO 7.1.7 *Calcular as integrais*: (**a**) $\displaystyle\int\sec\theta d\theta$ (**b**) $\displaystyle\int\sec^3\theta d\theta$

SOLUÇÃO No caso (a), iniciamos com a substituição $t = \operatorname{sen}\theta$ e em seguida fazemos a decomposição em frações parciais. Temos:

$$\begin{aligned}\int \sec\theta d\theta &= \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \int \frac{dt}{1-t^2} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C.\end{aligned}$$

No caso (b), integramos por partes, notando que $d(\tan\theta) = \sec^2\theta d\theta$, e obtemos:

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta d\theta &= \int \sec\theta d(\tan\theta) = \sec\theta\tan\theta - \int \tan^2\theta\sec\theta d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \left(\sec^2\theta - 1\right)\sec\theta d\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta d\theta - \int \sec^3\theta d\theta\end{aligned}$$

e daí resulta:

$$\int \sec^3\theta d\theta = \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big] + C.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.6 (click aqui e veja a lista completa)

1. Integrais por Decomposição em Frações Parciais.

   (a) $\displaystyle\int \frac{(2x-1)}{(x-1)(x-2)}dx$ .... (resp.: $-\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + C$)

   (b) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$ .... (resp.: $-\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| - \frac{5}{8}\ln|x+5| + C$)

   (c) $\displaystyle\int \frac{\left(x^5+x^4-8\right)dx}{x^3-4x}$ .... (resp.: $4x + 2\ln x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 5\ln|x-2| - 3\ln|x+2| + C$)

   (d) $\displaystyle\int \frac{x^4dx}{(x^2-1)(x+2)}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x+1}\right| + \frac{16}{3}\ln|x+2| + C$)

   (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$ .... (resp.: $\displaystyle\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + C$)

   (f) $\displaystyle\int \frac{(x-8)dx}{x^3-4x^2+4x}$ .... (resp.: $\displaystyle -2\ln|x| + \frac{3}{x-2} + 2\ln|x-2| + C$)

   (g) $\displaystyle\int \frac{\left(x^2+2x+1\right)dx}{\left(1+x^2\right)^2}$ .... (resp.: $\displaystyle -\frac{1}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x + C$)

   (h) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\frac{1}{2}(x+1)\right] + C$)

   (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$ .... (resp.: $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right) + C$)

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$ .... (resp.: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + C$)

(k) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$ .... (resp.: $\operatorname{arctg}(2x-1) + C$)

(l) $\displaystyle\int \frac{(6x-7)\,dx}{3x^2 - 7x + 11}$ .... (resp.: $\ln|3x^2 - 7x + 11| + C$)

(m) $\displaystyle\int \frac{(7x+1)\,dx}{6x^2 + x - 1}$ .... (resp.: $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{2}{3}\ln|3x-1| + C$)

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Recorde-se que $F(x)$ é primitiva de $f(x)$ quando F for derivável e $F'(x) = f(x)$, em cada x.

   (a) $F(x) = \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{6}{5}$ (b) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{x} + \frac{2}{3}$ (c) $F(x) = \ln(x+1) + 2$.

2. $f(x) = e^{\frac{1}{2}(x^2-1)} = \exp\left(\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\right)$.

3. Usando as regras de derivação e considerando que $f' = g$ e $g' = -f$, encontramos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2[f - \operatorname{sen} x]\left[f' - \cos x\right] + 2[g - \cos x]\left[g' + \operatorname{sen} x\right] \\ &= 2[f - \operatorname{sen} x][g - \cos x] + 2[g - \cos x][-f + \operatorname{sen} x] = 0 \end{aligned}$$

   e, portanto, $h(x)$ é constante. Como $h(0) = 0$, segue que $h(x) = 0$ e temos o resultado.

4. Antes de iniciar, não esqueça de lembrar as regras básicas de integração.

   (a) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + C$.

   (b) $-\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{x} + \ln x + C$.

   (c) $-2\cos x + \dfrac{1}{4x^4} + C$.

   (d) $\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{2x^3}{3} + x + C$.

   (e) $\operatorname{arctg} x + C$.

   (f) $\operatorname{tg} x - x - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + C$.

   (g) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \operatorname{tg} x + C$.

(h) $\frac{2}{9}x^{9/2} + C.$

(i) $\dfrac{2^x}{\ln 2} + \mathrm{e}^{x+1} + C.$

(j) $2x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + C.$

(k) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}(4x+2) + C.$

(l) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

(m) $\frac{1}{2}\left(5x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C$

(n) $\frac{1}{2}\sec 2x + C$

(o) $x + \ln|x| + C$

(p) $x + 1 - \ln|x+1| + C.$

5. Com a primitiva $F(x) = \frac{1}{p}\exp(x^p)$, $p \neq 0$, encontramos:

   (a) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$ (b) $2e^{\sqrt{x}} + C$ $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$

6. Integrando duas vezes a função $f(x)$, encontramos

$$f(x) = \frac{x^4}{12} + e^x + kx + C$$

   e, substituindo os dados $f(0) = 2$ e $f'(0) = 1$, obtemos $k = 0$ e $C = 1$. Assim, $f(x) = \dfrac{x^4}{12} + e^x + 1.$

7. Recorde-se das regras básicas de integração e de algumas identidades trigonométricas.

   (a) 0 (b) 0 (c) $\pi/4$, se $k = 0$, e $\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n-2}$, se $k = 2n-1.$

8. Sendo a declividade no ponto (x, y) igual a $2x + 1$, então:

$$y' = 2x + 1 \Rightarrow y = x^2 + x + k$$

   e, considerando que $y(-3) = 0$, encontramos $y = x^2 + x - 6$, que é a equação da curva.

9. Se $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, então $\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ e, usando a Regra da Cadeia e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos o resultado.

10. (a) $\sqrt[3]{1+x^4}$ (b) $[\ln(\operatorname{sen} x)]^5 \cos x + [\ln(\cos x)]^5 \operatorname{sen} x$ (c) $\mathrm{e}^x \cos(\mathrm{e}^{2x}) - 2x\cos(x^2-1)^2.$

11. (a) $1/3$ (b) 5 (c) 4 (d) 4 (e) 43 (f) $-\pi^2$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. (a) 0 (b) 0 (c) $1/2$.
2. Fazer em Sala de Aula
3. Fazer em Sala de Aula
4. Fazer em Sala de Aula
5. Fazer em Sala de Aula
6. (a) $\frac{2}{15}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $16\sqrt{2}/3$ (e) $\sqrt{2}-1$ (f) $\frac{5}{3}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) $\frac{10}{3}$ (i) 8 (j) $\frac{64}{3}$.
7. (a) $16/3$ (b) 9 (c) $\ln 2$ (d) $1/3$ (e) $1/2$.
8. $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \frac{3}{2}$; $A = 73/6$. A integral de uma função contínua por partes $y = f(x)$, no intervalo $[a,b]$, coincide com a área entre o gráfico de f e o eixo x, no caso em que a função é não negativa no intervalo.
9. (a) 1 (b) 1 (c) $5/2$ (d) $32/3$.
10. Com a mudança $x = -t$ e observando que f é uma função par, encontramos:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

    Na figura abaixo ilustramos a situação geométrica em que A representa o valor da integral no intervalo $[0,a]$ A Figura 7.2 mostra uma função par e a Figura 7.3 uma função ímpar.
11. (a) $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(2) = 5$, $g(3) = 7$ e $g(6) = 3$ (b) em $(0,3)$ (c) em $x = 3$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.3

1. Recorde-se que a integral imprópria *convergir* significa que ela tem um valor numérico. Do contrário, ela denomina-se *divergente*.

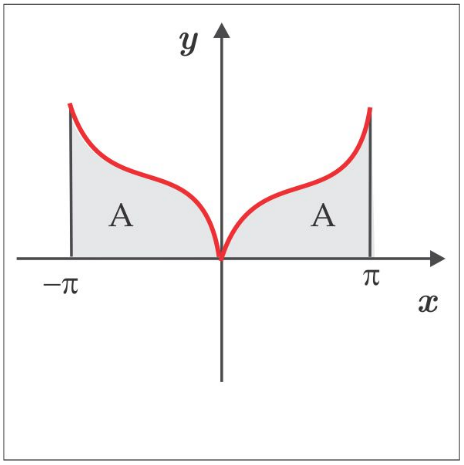

Figura 7.2: Função Par.

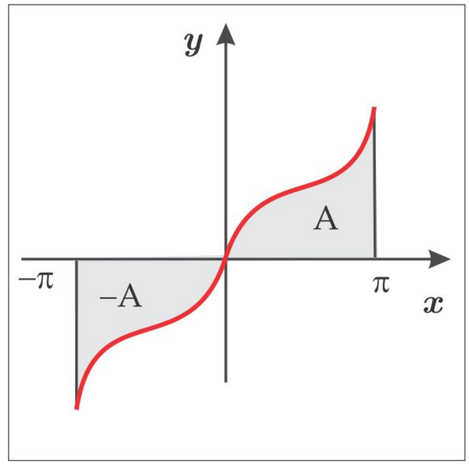

Figura 7.3: Função Ímpar.

(a) Temos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{a\to 0^+}\int_a^1\frac{dx}{\sqrt{x}}+\lim_{b\to 0^-}\int_{-1}^{b}\frac{dx}{\sqrt{-x}}\\ &= \lim_{a\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\right]_a^1+\lim_{b\to 0^-}\left[-2\sqrt{-x}\right]_{-1}^{b}2+2=4.\end{aligned}$$

Logo, a integral é convergente e tem valor 4.

(b) Divergente **(c)** Divergente.

(d) A integral é convergente, porque

$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan 0)=\pi/2.$$

(e) Considerando a primitiva $F(x)=-\frac{1}{4}\exp\left(-x^4\right)$, determinada no Exercício 5 da seção 7.1, com $p=4$, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x^3\exp\left(-x^4\right)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b x^3\exp\left(-x^4\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{4}\exp\left(-x^4\right)\right]_0^b\\ &= -\frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\left[\exp\left(-b^4\right)-1\right]=1/4.\end{aligned}$$

A integral é convergente e tem valor 1/4.

2. Divergente.

3. Temos:

$$\int_1^5 \frac{dx}{(5-x)^2} = \lim_{b \to 5^-} \int_1^b \frac{dx}{(5-x)^2} = \lim_{b \to 5^-} \left[\frac{1}{5-x}\right]_1^b$$
$$= \lim_{b \to 5^-} \left(\frac{1}{5-b} - \frac{1}{4}\right) = +\infty.$$

Assim, a integral é divergente (não tem valor numérico).