



2.1 Domínio & Imagem

1. Dê o domínio e esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3x$

(b) $g(x) = -x$

(c) $h(x) = -x + 1$

(d) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

(e) $g(x) = \frac{1}{2}x$

(f) $g(x) = |x - 1|$

(g) $h(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 2 \\ 3, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

(h) $h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq -1 \\ -x + 1, & \text{se } x > -1 \end{cases}$

(i) $h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(j) $f(x) = |x + 2| + 1$

(k) $h(x) = \frac{|2x + 1|}{2x + 1}$

(l) $h(x) = |x + 2|$

(m) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

(n) $g(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$

(o) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$. Mostre que:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{se } x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2x - 3, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

e esboce o gráfico de f .

3. Determine o domínio das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$

(b) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

(c) $s(t) = \sqrt{t^2 - 1}$

(d) $y = \frac{x}{x + 2}$

(e) $h(x) = \sqrt{x + 2}$

(f) $q(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x}$

(g) $r(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$

(h) $y = \sqrt[4]{\frac{x}{x + 3}}$

(i) $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$

(j) $y = \sqrt{x(2 - 3x)}$

(k) $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{1 - 3x}}$

(l) $y = \sqrt[6]{\frac{x - 3}{x + 2}}$

(m) $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

(n) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x - 1}}$

(o) $y = \sqrt{4 - x^2}$

(p) $y = \sqrt{5 - 2x^2}$

(q) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}$

(r) $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$

(s) $y = \sqrt{x} - \sqrt{5 - 2x}$

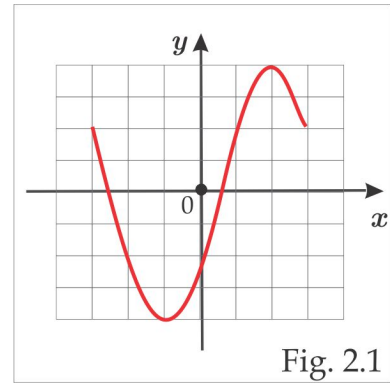
(t) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

4. Utilizando o procedimento indicado no Exercício 2, esboce o gráfico das funções definidas abaixo.

(a) $f(x) = |x| - 1$ (b) $g(x) = ||x| - 1|$ (c) $h(x) = |x + 1| - |x|$ (d) $y = |x^2 - 1|$.

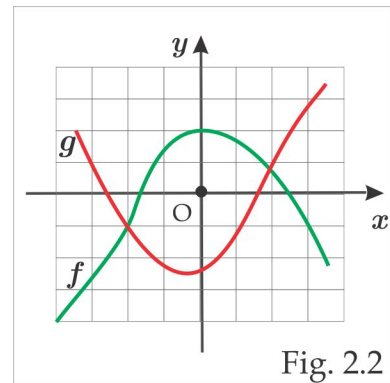
5. Uma pequena indústria fabrica termômetros e estima que o lucro semanal, em reais, pela fabricação e venda de x unidades/semana é de $R(x) = (-0.001)x^2 + 8x - 5000$. Qual o lucro da empresa em uma semana que foram fabricados 1.000 termômetros?
6. Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{4 - \left| \frac{3 - 2x}{2 + x} \right|}$.
7. Considere a função f definida em $[-3, 2]$ por $f(x) = |x^3 - 2x^2 + 3x - 4|$. Determine dois números reais m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, seja qual for o valor de x no intervalo $[-3, 2]$.
8. Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
- (a) Verifique que $f(x) = (x + 2)^2 + 1$.
 - (b) Esboce o gráfico de f .
 - (c) Calcule o menor valor de $f(x)$ e para qual x esse valor é assumido.
9. Verifique que $\sqrt{1 + x^2} - |x| = \frac{1}{|x| + \sqrt{1 + x^2}}$ e, então, conclua que a medida que x cresce, o valor da diferença $\sqrt{1 + x^2} - |x|$ aproxima-se de zero.
10. Seja $y = f(x)$ a função dada a partir da equação $x^2 + y^2 = 4$, para $y \geq 0$.
- (a) Determine uma fórmula que defina explicitamente y como função de x .
 - (b) Determine o domínio de f .
 - (c) Esboce o gráfico de f .
11. Uma caixa retangular sem tampa, com volume de $2m^3$, tem uma base quadrada. Expresse a área S da superfície da caixa como uma função do comprimento x de um lado da base.
12. À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Sabendo-se que a temperatura do solo é de $20^{\circ}C$ e que a temperatura a $1km$ de altura é de $10^{\circ}C$, expresse a temperatura T , em $^{\circ}C$, como uma variável dependente da altura h , medida em km , supondo que um modelo baseado em uma função *afim* seja apropriado. Qual a temperatura a uma altura de $2,5km$?
13. Suponha que a figura 2.1 abaixo representa graficamente uma função $y = f(x)$.

- (a) Determine $f(-1)$.
- (b) É correta a estimativa $2 < f(2) < 3$?
- (c) Para quais valores de x tem-se $f(x) = 2$?
- (d) Para quantos valores de x tem-se $f(x) = 0$?
- (e) Qual o domínio de f ?
- (f) Qual a imagem de f ?



14. Considere as funções f e g , cujos gráficos são representados na figura abaixo.

- (a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.
- (b) Para quais valores de x , $f(x) = g(x)$?
- (c) Estabeleça o domínio e a imagem de f .
- (d) Estabeleça o domínio e a imagem de g .
- (e) Para quantos valores de x , $f(x) = 0$?
- (f) Para quantos valores de x , $g(x) = 0$?



2.2 Classificando uma Função Real

■ **FUNÇÃO PAR & FUNÇÃO ÍMPAR** Uma função f , definida em um intervalo simétrico $[-a, a]$, denomina-se *função par* se satisfaz $f(x) = f(-x)$, para todo x em seu domínio. Se f satisfaz $f(x) = -f(-x)$, para todo x em seu domínio, então f é denominada *função ímpar*.

■ **FUNÇÃO MONÓTONA** Com relação ao crescimento, as funções reais se classificam em: *crescente*, *decrecente*, *não crescente* ou *não decrescente*. Em qualquer desses casos, a função recebe a denominação de *Função Monótona*. Temos:

- (a) Uma função f é *crescente* em um intervalo I , se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Se $f(x_1) \leq f(x_2)$, para $x_1 \leq x_2$, então f é dita não-decrescente em I .
- (b) Uma função f é *decrecente* em um intervalo I , se dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Se $f(x_1) \geq f(x_2)$, para $x_1 \leq x_2$, então f é dita não-crescente em I .

■ **FUNÇÃO LIMITADA** Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ denomina-se *limitada inferiormente* quando existir uma constante m , tal que

$$m \leq f(x), \quad \text{para todo } x \text{ no domínio } D. \quad (2.1)$$

Uma tal constante m denomina-se *cota inferior* de f . Quando existir uma constante M , tal que

$$f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \text{ no domínio } D, \quad (2.2)$$

diremos que a função f é *limitada superiormente* e cada constante M que satisfaz (2.2) leva o nome de *cota superior* de f . Diremos que f é *limitada* quando o for superior e inferiormente. Neste caso existirá uma constante $C > 0$, tal que

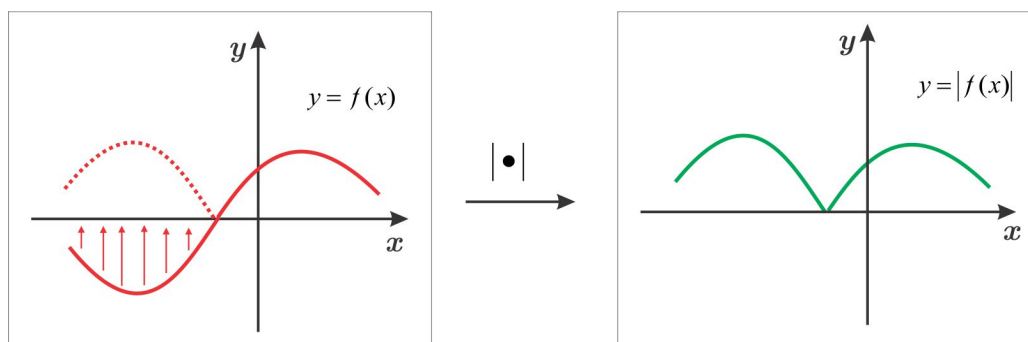
$$|f(x)| \leq C, \quad \forall x \in D. \quad (2.3)$$

■ **FUNÇÃO COMPOSTA** Considere duas funções f e g , tais que a imagem de f seja um subconjunto do domínio de g , isto é, $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$. Denominamos de *composta* de g e f , e anotamos $g \circ f$, a função cujo domínio coincide com $\text{Dom}(f)$ e definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, com $x \in \text{Dom}(f)$.

■ **CONSTRUINDO O GRÁFICO DE $|f(x)|$** A partir do gráfico da função $y = f(x)$, é simples construir o gráfico da função $g(x) = |f(x)|$. Para isto basta refletir para cima a parte do gráfico de f que se encontra abaixo do eixo x . Esta regra prática decorre da definição de módulo de um número real. De fato, temos

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Veja a ilustração na figura abaixo.



■ ESCRIVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, verifique se a função é par ou ímpar.

(a) $f(x) = x^3$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $h(x) = 2x - x^2$ (d) $k(x) = 1 - x^4$ (e) $f(x) = |x|$.

2. Dada uma função f , definida em \mathbb{R} ou em um intervalo $[-a, a]$, mostre que $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par e que $h(x) = f(x) - f(-x)$ é uma função ímpar. Deduza a partir daí que qualquer função f , definida em um intervalo $[-a, a]$, pode ser expressa como soma de uma função par com uma função ímpar.
3. Estabeleça as seguintes regras sobre funções pares e ímpares:
 - (a) Se f e g são funções pares, então $f + g$ e $f \cdot g$ são funções pares.
 - (b) Se f e g são funções ímpares, então $f + g$ é ímpar e $f \cdot g$ é par.
 - (c) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.
4. As funções $f : A \rightarrow B$ e $g : A' \rightarrow B'$ são iguais quando $A = A'$, $B = B'$ e, além disso, $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$. Em cada caso, decida se f e g são iguais ou não.
 - (a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2-x}$.
 - (b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|^2$.
 - (c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ e $g(x) = x+1$.
 - (d) $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$.
5. Uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, recebe o nome de *Função Quadrática*. Determine a função quadrática f que satisfaz $f(0) = 5$, $f(-1) = 10$ e $f(1) = 6$.
6. Verifique onde a função $f(x) = x^2$ é crescente e onde ela é decrescente. Idem para a função $g(x) = |x-1| + 2$.
7. Uma função do tipo $f(x) = ax + b$ recebe o nome de *Função Afim*¹. Mostre que a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$, e decrescente, se $a < 0$.
8. Com relação ao gráfico apresentado no Exercício 13 da seção 1.1, identifique o conjunto no qual f é uma função crescente.
9. Nos casos a seguir, verifique que $\text{Im}(f) \subset \text{Dom}(g)$ para, assim, determinar a função composta $h = g \circ f$.
 - (a) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.
 - (b) $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$.
 - (c) $f(x) = -\sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$.

¹Por que e denominação "função afim"?

$$(d) f(x) = \frac{x}{x+1} \quad e \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

10. Determine a função f de modo que $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in D(f)$, onde:

$$(a) g(x) = \frac{x+2}{x+1} \quad (b) g(x) = x^2 - 2x, \text{ definida para } x \geq 1.$$

11. Considere f uma função par e seja $h = g \circ f$. Mostre que h é uma função par. E se f for uma função ímpar, pode-se afirmar que h também o será?

12. Classifique as funções abaixo quanto a limitação.

$$(a) f(x) = x^2 \quad (b) f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 2 \quad (c) g(x) = x^3, -1 \leq x \leq 2 \quad (d) f(x) = 1/x, x < 0.$$

13. Construa uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ limitada apenas inferiormente e uma função $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ não limitada nem superior nem inferiormente.

14. Construa os gráficos das seguintes funções:

$$(a) g(x) = |x^3|, -1 \leq x < 2.$$

$$(b) g(x) = |1/x|, -2 \leq x < 4.$$

$$(c) g(x) = |x^2 - 1|, -3 \leq x < 2.$$

2.3 Invertendo uma Função Real

■ **FUNÇÃO INJETORA** Diz-se que uma função f é *injetora* (ou *injetiva*) se dado $y \in \text{Im}(f)$, existe um único $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$. Isto é equivalente a: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

■ **FUNÇÃO SOBREJETORA** Diz-se que $f : D(f) \rightarrow B$ é *sobrejetora* (ou *sobrejetiva*) se $\text{Im}(f) = B$, isto é, dado $y \in B$, existe $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$.

■ **FUNÇÃO BIJETORA** Diz-se que uma função f é *bijetora* (ou *bijetiva*) quando for, simultaneamente, injetora e sobrejetora. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \text{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

e podemos definir a função $g : \text{Im}(f) \rightarrow D(f)$, *inversa* de f , do modo seguinte:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

A função g , inversa de f , é caracterizada por: $(f \circ g)(y) = y$ e $(g \circ f)(x) = x$. É comum representar a função inversa de f por f^{-1} .

1. Verifique que a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 5$ é bijetora e determine sua inversa.
2. Considere a função do exercício precedente e determine a inversa da função $f \circ f^{-1}$.
3. Dê domínio e contra-domínio adequados à função $f(x) = x^2$, de modo que a mesma seja invertível e determine a sua inversa.
4. Considere a função $f(x) = k/x$, onde k é uma constante. É necessário impor alguma restrição à constante k para que f seja invertível? Quem é f^{-1} ?
5. Considere $f : [1/2, +\infty) \rightarrow [b, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - x + 1$. Qual o valor de b que torna f invertível? Quem é f^{-1} ? Esboce o gráfico de f^{-1} .

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 2.1

1. As funções apresentadas em (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (j) e (l) têm para domínio o conjunto \mathbb{R} dos números reais. Por outro lado, temos:

(i) $\mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = x + 1$, se $x \neq 1$.

(k) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$.

(m) $\mathbb{R} - \{0\}$.

(n) $\mathbb{R} - \{1\}$.

(o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ e $g(x) = x - 1$, se $x \neq -1$.

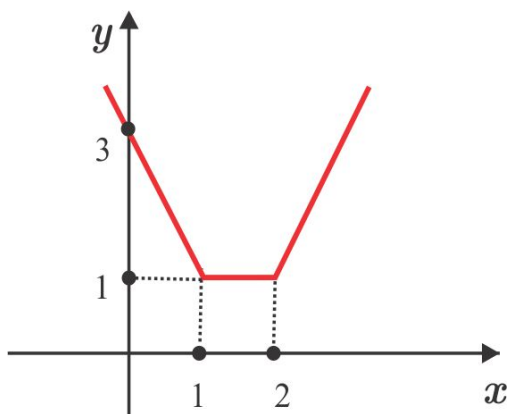
2. Considere as possibilidades:

- $x \leq 1$, onde tem-se $|x - 1| + |x - 2| = (-x + 1) + (-x + 2) = -2x + 3$.

- $1 < x < 2$, onde tem-se $|x - 1| + |x - 2| = x - 1 + (-x + 2) = 1$.

- $x \geq 2$, onde tem-se $|x - 1| + |x - 2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$.

Veja o gráfico na figura abaixo.



3. Nas descrições abaixo, representamos anotamos $\mathbb{R} - \{a\}$ para indicar o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq a\}$.

(a) $\mathbb{R} - \{1\}$ ou $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ou $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

(b) $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$.

(c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$.

(d) $\mathbb{R} - \{-2\}$ ou $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(e) $[-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$.

(f) $\mathbb{R} - \{-1, 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } x \neq 0\}$.

(g) $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

(h) $(-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

(i) \mathbb{R} ou $(-\infty, +\infty)$.

(j) $[0, 2/3]$.

(k) $(1/3, 1/2]$.

(l) $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$.

(m) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

(n) $[-2, 2]$.

(o) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.

(p) $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{5/2} \leq x \leq \sqrt{5/2}\} = [-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}]$.

(q) $[1, 3]$.

(r) $[0, 1]$.

(s) $[0, 5/2]$.

(t) $[1, +\infty) \cup \{0\}$.

4. Fazer.

5. R\$ 2.000,00.

6. $D(f) = (-\infty, -11/2] \cup [-5/6, +\infty)$.

7. No intervalo $-3 \leq x \leq 2$, temos

$$0 \leq |x^3 - 2x^2 + 3x - 4| \leq |x|^3 + |2x^2 - 3x + 4| \leq 27 + 31 = 58.$$

(a) $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1$

(b) Uma parábola com vértice no ponto $V(-2, 1)$

(c) O menor valor de f é 1 e ocorre em $x = -2$.

8. Fazer.

9. (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$ (b) $[-2, 2]$.

10. $S(x) = x^2 + 8/x$.

11. $T(h) = -10h + 20$; $T(2, 5) = -5^0C$.

12. Leitura do gráfico.

(a) -4 (b) não (c) $x = -3$, $x = 1$ e $x = 3$ (d) Para dois valores (e) $[-3, 3]$ (f) $[-4, 4]$.

13. Leitura do gráfico.

(a) $f(-4) = -4$; $g(3) = 3$.

(b) $x = 2$, $x = -2$.

(c) $\text{Dom}(f) = [-4, 7/2]$ e $\text{Im}(f) = [-4, 2]$.

(d) $\text{Dom}(g) = [-7/2, 7/2]$ e $\text{Im}(g) = [-5/2, 7/2]$.

(e) Dois valores.

(f) Dois valores.

1. Recorde-se que uma função f definida em um intervalo simétrico será par quando $f(x) = f(-x)$, $\forall x$, e será ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$.

(a) ímpar (b) par (c) nem par nem ímpar (d) par (e) par.

2. Mostre que $g(x) = g(-x)$ e $h(-x) = -h(x)$. Para concluir, observe que

$$f(x) = \frac{1}{2} [g(x) + h(x)].$$

3. Mais uma vez tenha em mente os conceitos de função par e função ímpar.

(a) Dado que f e g são funções pares, então $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$ e, assim,

$$[f + g](-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = [f + g](x).$$

(b) Se f e g são ímpares, então o produto $f \cdot g$ é par. De fato,

$$[f \cdot g](-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = [f \cdot g](x).$$

(c) Se f é par e g é ímpar, então o produto $f \cdot g$ é ímpar. De fato,

$$[f \cdot g](-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -[f \cdot g](x).$$

4. As funções f e g são iguais apenas no caso (b).

5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

6. Conceito.

7. Se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então $ax_1 + b < ax_2 + b$ e a função afim é crescente.

8. A função f é crescente no intervalo $[0, 3]$.

(a) $\text{Im}(f) = \text{Dom}(g) = [0, +\infty)$ e $h(x) = |x|$.

(b) $\text{Im}(f) = [3, +\infty) \subset \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$ e $h(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1}$.

(c) $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \subset \text{Dom}(g) = (-\infty, 2]$ e $h(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$, $x > 0$.

(d) $\text{Im}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = -2x - 1$, $x \neq -1$.

(a) $f(x) = \frac{x - 2}{1 - x}$.

(b) $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$.

9. Se f é par, então $f(-x) = f(x)$ e, sendo assim,

$$h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = h(x).$$

Logo, $h(x)$ é uma função par. Podemos concluir que h é uma função ímpar, se f e g o forem.

- (a) Limitada inferiormente.
- (b) Limitada.
- (c) Limitada.
- (d) Limitada Superiormente.

10. Fazer

11. Fazer

12. Fazer

13. Considere $f(x) = 1/x$, $x > 0$, e $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Observe que $g(x)$ assume valores arbitrariamente grandes, quando x é positivo e próximo de zero, e valores arbitrariamente pequenos, quando x é negativo e próximo de zero.

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 2.3

1. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 5)$.
2. $f \circ f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
3. Considere para domínio e contra-domínio o intervalo $[0, +\infty)$. A inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
4. $k \neq 0$ e $f^{-1} = f$
5. $b = 3/4$. A inversa é a função $g : [3/4, +\infty) \rightarrow [1/2, +\infty)$, definida por $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$.