2.1 Domínio & Imagem

1. Dê o domínio e esboce o gráfico de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = 3x$ (b) $g(x) = -x$ (c) $h(x) = -x+1$

(d) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ (e) $g(x) - \frac{1}{2}x$ (f) $g(x) = |x-1|$

(g) $h(x) = \left| \begin{array}{l} x, \text{ se } x \le 2 \\ 3, \text{ se } x > 2 \end{array} \right.$ (h) $h(x) = \left| \begin{array}{l} 2x, \text{ se } x \le -1 \\ -x+1, \text{ se } x > -1 \end{array} \right.$ (i) $h(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$

(j) $f(x) = |x+2|+1$ (k) $h(x) = \dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ (l) $h(x) = |x+2|$

(m) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ (n) $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (o) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x-1| + |x-2|$. Mostre que:

$$f(x) = \left| \begin{array}{l} -2x+3, \text{ se } x \le 1 \\ 1, \text{ se } 1 < x < 2 \\ 2x-3, \text{ se } x \ge 2 \end{array} \right.$$

e esboce o gráfico de f.

3. Determine o domínio das funções indicadas abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ (b) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ (c) $s(t) = \sqrt{t^2-1}$ (d) $y = \dfrac{x}{x+2}$

(e) $h(x) = \sqrt{x+2}$ (f) $q(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x}$ (g) $r(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (h) $y = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x+3}}$

(i) $g(x) = \sqrt[3]{x^2-x}$ (j) $y = \sqrt{x(2-3x)}$ (k) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{1-3x}}$ (l) $y = \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$

(m) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (n) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$ (o) $y = \sqrt{4-x^2}$ (p) $y = \sqrt{5-2x^2}$

(q) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$ (r) $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$ (s) $y = \sqrt{x} - \sqrt{5-2x}$ (t) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$

4. Utilizando o procedimento indicado no Exercício 2, esboce o gráfico das funções definidas abaixo.

(a) $f(x) = |x| - 1$ (b) $g(x) = ||x|-1|$ (d) $h(x) = |x+1| - |x|$ (d) $y = \left|x^2-1\right|$.

5. Uma pequena indústria fabrica termômetros e estima que o lucro semanal, em reais, pela fabricação e venda de x unidades/semana é de $R(x) = (-0.001)\,x^2 + 8x - 5000$. Qual o lucro da empresa em uma semana que foram fabricados 1.000 termômetros?

6. Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{4 - \left|\dfrac{3-2x}{2+x}\right|}$.

7. Considere a função f definida em $[-3, 2]$ por $f(x) = \left|x^3 - 2x^2 + 3x - 4\right|$. Determine dois números reais m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$, seja qual for o valor de x no intervalo $[-3, 2]$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.

   (a) Verifique que $f(x) = (x+2)^2 + 1$.

   (b) Esboce o gráfico de f.

   (c) Calcule o menor valor de $f(x)$ e para qual x esse valor é assumido.

9. Verifique que $\sqrt{1+x^2} - |x| = \dfrac{1}{|x| + \sqrt{1+x^2}}$ e, então, conclua que a medida que x cresce, o valor da diferença $\sqrt{1+x^2} - |x|$ aproxima-se de zero.

10. Seja $y = f(x)$ a função dada a partir da equação $x^2 + y^2 = 4$, para $y \geq 0$.

    (a) Determine uma fórmula que defina explicitamente y como função de x.

    (b) Determine o domínio de f.

    (c) Esboce o gráfico de f.

11. Uma caixa retangular sem tampa, com volume de $2m^3$, tem uma base quadrada. Expresse a área S da superfície da caixa como uma função do comprimento x de um lado da base.

12. À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Sabendo-se que a temperatura do solo é de 20^0C e que a temperatura a $1km$ de altura é de 10^0C, expresse a temperatuta T, em ^0C, como uma variável dependente da altura h, medida em km, supondo que um modelo baseado em uma função *afim* seja apropriado. Qual a temperatura a uma altura de $2,5km$?

13. Suponha que a figura 2.1 abaixo representa graficamente uma função $y = f(x)$.

(a) Determine $f(-1)$.

(b) É correta a estimativa $2 < f(2) < 3$?

(c) Para quais valores de x tem-se $f(x) = 2$?

(d) Para quantos valores de x tem-se $f(x) = 0$?

(e) Qual o domínio de f?

(f) Qual a imagem de f ?

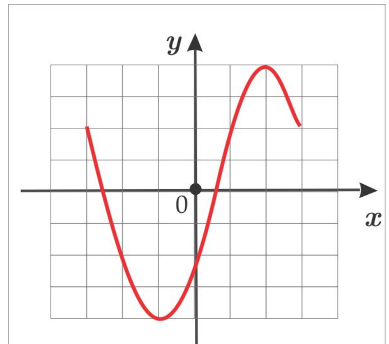


Fig. 2.1

14. Considere as funções f e g, cujos gráficos são representados na figura abaixo.

(a) Obtenha os valores de $f(-4)$ e $g(3)$.

(b) Para quais valores de x, $f(x) = g(x)$?

(c) Estabeleça o domínio e a imagem de f.

(d) Estabeleça o domínio e a imagem de g.

(e) Para quantos valores de x, $f(x) = 0$?

(f) Para quantos valores de x, $g(x) = 0$?

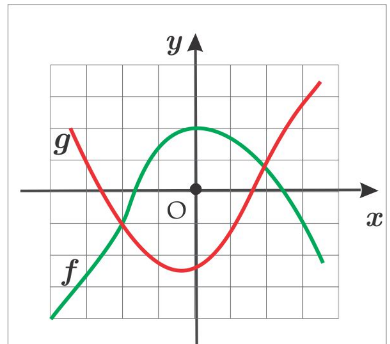


Fig. 2.2

2.2 Classificando uma Função Real

■ **FUNÇÃO PAR & FUNÇÃO ÍMPAR** Uma função f, definida em um intervalo simétrico $[-a, a]$, denomina-se *função par* se satisfaz $f(x) = f(-x)$, para todo x em seu domínio. Se f satisfaz $f(x) = -f(-x)$, para todo x em seu domínio, então f é denominada *função ímpar*.

■ **FUNÇÃO MONÓTONA** Com relação ao crescimento, as funções reais se classificam em: *crescente*, *decrescente*, *não crescente* ou *não decrecente*. Em qualquer desses casos, a função recebe a denominação de *Função Monótona*. Temos:

(a) Uma função f é *crescente* em um intervalo I, se dados $x_1,\ x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$. Se $f(x_1) \le f(x_2)$, para $x_1 \le x_2$, então f é dita não-decrescente em I.

(b) Uma função f é *decrescente* em um intervalo I, se dados $x_1,\ x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Se $f(x_1) \ge f(x_2)$, para $x_1 \le x_2$, então f é dita não-crescente em I.

■ **FUNÇÃO LIMITADA** Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ denomina-se *limitada inferiormente* quando existir uma constante m, tal que

$$m \leq f(x), \quad \text{para todo } x \text{ no domínio } D. \tag{2.1}$$

Uma tal constante m denomina-se *cota inferior* de f. Quando existir uma constante M, tal que

$$f(x) \leq M, \quad \text{para todo } x \text{ no domínio } D, \tag{2.2}$$

diremos que a função f é *limitada superiormente* e cada constante M que satisfaz (2.2) leva o nome de *cota superior* de f. Diremos que f é *limitada* quando o for superior e inferiormente. Neste caso existirá uma constante $C > 0$, tal que

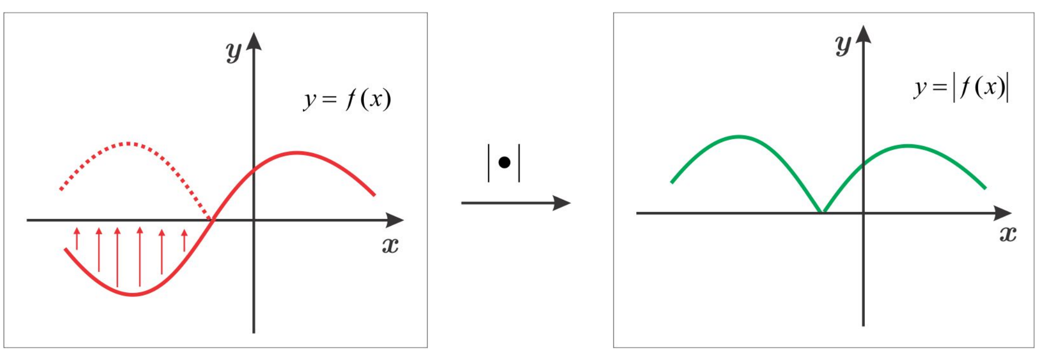
$$|f(x)| \leq C, \quad \forall\, x \in D. \tag{2.3}$$

■ **FUNÇÃO COMPOSTA** Considere duas funções f e g, tais que a imagem de f seja um subbconjunto do domínio de g, isto é, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$. Denominamos de *composta* de g e f, e anotamos $g \circ f$, a função cujo domínio coincide com $\mathrm{Dom}(f)$ e definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, com $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

■ **CONSTRUINDO O GRÁFICO DE $|f(x)|$** A partir do gráfico da funçâo $y = f(x)$, é simples construir o gráfico da função $g(x) = |f(x)|$. Para isto basta refletir para cima a parte do gráfico de f que se encontra abaixo do eixo x. Esta regra prática decorre da definição de módulo de um número real. De fato, temos

$$g(x) = \left| \begin{array}{ll} f(x), & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) < 0 \end{array} \right. .$$

Veja a ilustração na figura abaixo.



■ ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, verifique se a função é par ou ímpar.

   (a) $f(x) = x^3$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $h(x) = 2x - x^2$ (d) $k(x) = 1 - x^4$ (e) $f(x) = |x|$.

2. Dada uma função f, definida em $\mathbb{R}$ ou em um intervalo $[-a, a]$, mostre que $g(x) = f(x) + f(-x)$ é uma função par e que $h(x) = f(x) - f(-x)$ é uma função ímpar. Deduza a partir daí que qualquer função f, definida em um intervalo $[-a, a]$, pode ser expressa como soma de uma função par com uma função ímpar.

3. Estabeleça as seguintes regras sobre funções pares e ímpares:

   (a) Se f e g são funções pares, então $f + g$ e $f \cdot g$ são funções pares.

   (b) Se f e g são funções ímpares, então $f + g$ é ímpar e $f \cdot g$ é par.

   (c) Se f é uma função par e g é uma função ímpar, então $f \cdot g$ é ímpar.

4. As funções $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$ são iguais quando $A = A'$, $B = B'$ e, além disso, $f(x) = g(x), \quad \forall x \in A$. Em cada caso, decida se f e g são iguais ou não.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

   (b) $f(x) = x^2$ e $g(x) = |x|^2$.

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e $g(x) = x + 1$.

   (d) $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x^2}$.

5. Uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, recebe o nome de *Função Quadrática*. Determine a função quadrática f que satisfaz $f(0) = 5$, $f(-1) = 10$ e $f(1) = 6$.

6. Verifique onde a função $f(x) = x^2$ é crescente e onde ela é decrescente. Idem para a função $g(x) = |x - 1| + 2$.

7. Uma função do tipo $f(x) = ax + b$ recebe o nome de *Função Afim*[1].Mostre que a *função afim* $f(x) = ax + b$ é crescente, se $a > 0$, e decrescente, se $a < 0$.

8. Com relação ao gráfico apresentado no Exercício 13 da seção 1.1, identifique o conjunto no qual f é uma função crescente.

9. Nos casos a seguir, verifique que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$ para, assim, determinar a função composta $h = g \circ f$.

   (a) $f(x) = x^2 \quad$ e $\quad g(x) = \sqrt{x}$.

   (b) $f(x) = x^2 + 3 \quad$ e $\quad g(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

   (c) $f(x) = -\sqrt{x} \quad$ e $\quad g(x) = \sqrt{2 - x}$.

[1] Por que e denominação "função afim"?

(d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

10. Determine a função f de modo que $(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in D(f)$, onde:

    (a) $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ (b) $g(x) = x^2 - 2x$, definida para $x \geq 1$.

11. Considere f uma função par e seja $h = g \circ f$. Mostre que h é uma função par. E se f for uma função ímpar, pode-se afirmar que h também o será?

12. Classifique as funções abaixo quanto a limitação.

    (a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^2, \ 0 \leq x \leq 2$ (c) $g(x) = x^3, \ -1 \leq x \leq 2$ (d) $f(x) = 1/x, \ x < 0$.

13. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada apenas inferiormente e uma função $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ não limitada nem superior nem inferiormente.

14. Construa os gráficos da seguintes funções:

    (a) $g(x) = \left|x^3\right|, \ -1 \leq x < 2$.

    (b) $g(x) = |1/x|, \ -2 \leq x < 4$.

    (c) $g(x) = \left|x^2 - 1\right|, \ -3 \leq x < 2$.

2.3 Invertendo uma Função Real

■ **FUNÇÃO INJETORA** Diz-se que uma função f é *injetora* (ou *injetiva*) se dado $y \in \operatorname{Im}(f)$, existe um único $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$. Isto é equivalente a: $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

■ **FUNÇÃO SOBREJETORA** Diz-se que $f : D(f) \to B$ é *sobrejetora* (ou *sobrejetiva*) se $\operatorname{Im}(f) = B$, isto é, dado $y \in B$, existe $x \in D(f)$ tal que $y = f(x)$.

■ **FUNÇÃO BIJETORA** Diz-se que uma função f é *bijetora* (ou *bijetiva*) quando for, simultaneamente, injetora e sobrejetora. Neste caso, temos:

$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$

e podemos definir a função $g : \operatorname{Im}(f) \longrightarrow D(f)$, *inversa* de f, do modo seguinte:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

A função g, inversa de f, é caracterizada por: $(f \circ g)(y) = y$ e $(g \circ f)(x) = x$. É comum representar a função inversa de f por f^{-1}.

1. Verifique que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 5$ é bijetora e determine sua inversa.

2. Considere a função do exercício precedente e determine a inversa da função $f \circ f^{-1}$.

3. Dê domínio e contra-domínio adequados à função $f(x) = x^2$, de modo que a mesma seja invertível e determine a sua inversa.

4. Considere a função $f(x) = k/x$, onde k é uma constante. É necessário impor alguma restrição à constante k para que f seja invertível? Quem é f^{-1}?

5. Considere $f : [1/2, +\infty) \to [b, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - x + 1$. Qual o valor de b que torna f invertível? Quem é f^{-1}? Esboce o gráfico de f^{-1}.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 2.1

1. As funções apresentadas em (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (j) e (l) têm para domínio o conjunto $\mathbb{R}$ dos numeros reais. Por outro lado, temos:

   (i) $\mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = x + 1$, se $x \neq 1$.

   (k) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$.

   (m) $\mathbb{R} - \{0\}$.

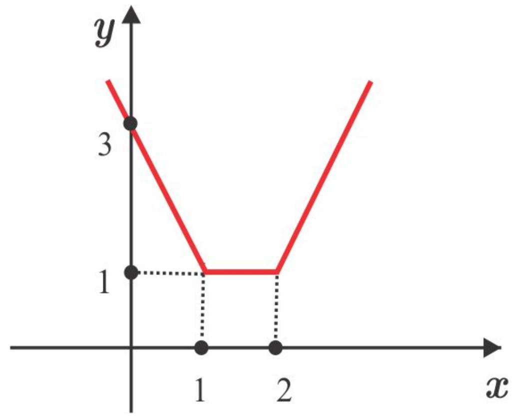
   (n) $\mathbb{R} - \{1\}$.

   (o) $\mathbb{R} - \{-1\}$ e $g(x) = x - 1$, se $x \neq -1$.

2. Considere as possibilidades:

   - $x \leq 1$, onde tem-se $|x-1| + |x-2| = (-x+1) + (-x+2) = -2x + 3$.
   - $1 < x < 2$, onde tem-se $|x-1| + |x-2| = x - 1 + (-x+2) = 1$.
   - $x \geq 2$, onde tem-se $|x-1| + |x-2| = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$.

Veja o gráfico na figura abaixo.



3. Nas descrições abaixo, representamos anotamos $\mathbb{R}-\{a\}$ para indicar o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq a\}$.

   (a) $\mathbb{R}-\{1\}$ ou $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ou $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$.

   (b) $\mathbb{R}-\{-1, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$.

   (c) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$.

   (d) $\mathbb{R}-\{-2\}$ ou $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

   (e) $[-2, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\}$.

   (f) $\mathbb{R}-\{-1, 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \text{ e } x \neq 0\}$.

   (g) $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

   (h) $(-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

   (i) $\mathbb{R}$ ou $(-\infty, +\infty)$.

   (j) $[0, 2/3]$.

   (k) $(1/3, 1/2]$.

   (l) $(-\infty, -2) \cup [3, +\infty)$.

   (m) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

   (n) $[-2, 2]$.

   (o) $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$.

   (p) $\left\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{5/2} \leq x \leq \sqrt{5/2}\right\} = [-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}]$.

   (q) $[1, 3]$.

   (r) $[0, 1]$.

   (s) $[0, 5/2]$.

(t) $[1,+\infty)\cup\{0\}$.

4. Fazer.

5. R$ 2.000,00.

6. $D(f)=(-\infty,-11/2]\cup[-5/6,+\infty)$.

7. No intervalo $-3\le x\le 2$, temos

$$0\le\left|x^3-2x^2+3x-4\right|\le|x|^3+\left|2x^2-3x+4\right|\le 27+31=58.$$

(a) $x^2+4x+5=\left(x^2+4x+4\right)+1=(x+2)^2+1$

(b) Uma parábola com vértice no ponto $V(-2,1)$

(c) O menor valor de f é 1 e ocorre em $x=-2$.

8. Fazer.

9. (a) $y=\sqrt{4-x^2}$ (b) $[-2,2]$.

10. $S(x)=x^2+8/x$.

11. $T(h)=-10h+20$; $T(2,5)=-5^0C$.

12. Leitura do gráfico.

(a) -4 (b) não (c) $x=-3,\ x=1$ e $x=3$ (d) Para dois valores (e) $[-3,3]$ (f) $[-4,4]$.

13. Leitura do gráfico.

(a) $f(-4)=-4$; $g(3)=3$.

(b) $x=2$, $x=-2$.

(c) $\text{Dom}(f)=[-4,7/2]$ e $\text{Im}(f)=[-4,2]$.

(d) $\text{Dom}(g)=[-7/2,7/2]$ e $\text{Im}(g)=[-5/2,7/2]$.

(e) Dois valores.

(f) Dois valores.

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 2.2

1. Recorde-se que uma função f definida em um intervalo simétrico será par quando $f(x) = f(-x)$, $\forall\, x$, e será ímpar quado $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x$.

   (a) ímpar (b) par (c) nem par nem ímpar (d) par (e) par.

2. Mostre que $g(x) = g(-x)$ e $h(-x) = -h(x)$. Para concluir, observe que

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[g(x) + h(x)].$$

3. Mais uma vez tenha em mente os conceitos de função par e função ímpar.

   (a) Dado que f e g são funções pares, então $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = g(x)$ e, assim,

$$[f+g](-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = [f+g](x).$$

   (b) Se f e g são ímpares, então o produto $f \cdot g$ é par. De fato,

$$[f \cdot g](-x) = f(-x) \cdot g(-x) = [-f(x)] \cdot [-g(x)] = [f \cdot g](x).$$

   (c) Se f é par e g é impar, então o produto $f \cdot g$ é ímpar. De fato,

$$[f \cdot g](-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -[f \cdot g](x).$$

4. As funções f e g são iguais apenas no caso (b).

5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

6. Conceito.

7. Se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então $ax_1 + b < ax_2 + b$ e a funão afim é crescente.

8. A função f é crescente no intervalo $[0, 3]$.

   (a) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom}(g) = [0, +\infty)$ e $h(x) = |x|$.
   (b) $\mathrm{Im}(f) = [3, +\infty) \subset \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$ e $h(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$.
   (c) $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0) \subset \mathrm{Dom}(g) = (-\infty, 2]$ e $h(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}$, $x > 0$.
   (d) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $h(x) = -2x - 1$, $x \neq -1$.

   (a) $f(x) = \dfrac{x-2}{1-x}$.
   (b) $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$.

9. Se f é par, então $f(-x) = f(x)$ e, sendo assim,

$$h(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = h(x).$$

Logo, $h(x)$ é uma função par. Podemos concluir que h é uma função ímpar, se f e g o forem.

   (a) Limitada inferiormente.

   (b) Limitada.

   (c) Limitada.

   (d) Limitada Superiormente.

10. Fazer

11. Fazer

12. Fazer

13. Considere $f(x) = 1/x,\ x > 0$, e $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$g(x) = \left| \begin{array}{ll} 1/x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{array} \right.$$

Observe que $g(x)$ assume valores arbitrariamente grandes, quando x é positivo e próximo de zero, e valores arbitrariamente pequenos, quando x é negativo e próximo de zero.

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 2.3

1. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 5)$.

2. $f \circ f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$.

3. Considere para domínio e contra-domínio o intervalo $[0, +\infty)$. A inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

4. $k \neq 0 \quad \text{e} \quad f^{-1} = f$

5. $b = 3/4$. A inversa é a função $g : [3/4, +\infty) \to [1/2, +\infty)$, definida por $g(y) = \frac{1}{2} + \sqrt{y - \frac{3}{4}}$.