1.1 Propriedades Básicas

1. Classifique as afirmações em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando cada resposta.

   (a) Se $x < 2$, então $x^2 < 4$. (b) Se $x^2 < 4$, então $x < 2$. (c) Se $0 \leq x \leq 2$, então $x^2 \leq 4$.

   (d) Se $x < 2$, então $x \leq 3$. (e) Se $x = 3$, então $x \leq 3$. (f) Se $|x| > 2$, então $x > 2$.

2. Se p é um número ímpar, então p^2 também o é. Como consequência deduza que se p^2 é par, então p também é par.

3. O número $\sqrt{2}$ não é racional.

4. Se p é um número inteiro, tal que p^2 é divisível por 3, mostre que p também o é. Use este fato para mostrar que o número $\sqrt{3}$ não é racional.

5. O conjunto $\mathbb{Q}$ é *fechado* para soma e produto.

   (a) Mostre que a soma e o produto de dois números racionais é um número racional.

   (b) Dê exemplo de dois números irracionais x e y, tais que $x + y$ e $x \cdot y$ sejam racionais.

6. Sejam r um número racional e x um irracional.

   (a) Mostre que $x + r$ é irracional.

   (b) Se $r \neq 0$, mostre que o produto $x \cdot r$ é irracional.

7. Sejam x e y dois números irracionais, de tal forma que $x^2 - y^2$ seja um racional não nulo. Mostre que os números $x - y$ e $x + y$ são irracionais. Por exemplo, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ são irracionais.

8. Reduza os números $x = 5,2121\ldots$ e $y = 0,21507507\ldots$ à forma de fração ordinária.

9. Estude o sinal de cada uma das expressões abaixo.

   (a) $\dfrac{x-1}{x-2}$ (b) $(2x+1)(x-2)$ (c) $\dfrac{2-3x}{x+2}$ (d) $x(x-1)(2x+3)$

   (e) $(2x-1)\left(x^2+1\right)$ (f) $x\left(x^2+3\right)$ (g) $x^6\left(x^2+3\right)$ (h) $-x\left(x^2-4\right)$.

1.2 Valor Absoluto & Desigualdades

1. Resolva as desigualdades.

   (a) $x^2 - 4 > 0$ (b) $x^2 - 1 \le 0$ (c) $x^2 \le 4$ (d) $x^2 > 1$ (e) $(x-a)^2 < r^2,\ r \ge 0$.

2. Resolva as equações.

   (a) $|x| = 2$ (b) $|x+1| = 3$ (c) $|2x-1| = 1$ (d) $|x-2| = -1$
   (e) $|2x+3| = 0$ (f) $|x| = 2x+1$ (g) $|1-2x| = |3x+5|$ (h) $\sqrt{(x-4)^2} = -1$
   (i) $\sqrt{(x-1)^2} = 5$ (j) $\sqrt{(2-x)^2} = 4$ (k) $\left|\dfrac{x}{1-5x}\right| = 4$ (l) $x = \sqrt{(-4)^2}$

3. As desigualdades abaixo, envolvendo produtos e quocientes, podem ser resolvidas por meio do estudo do sinal, como no Exercício 9 da Seção 1.1.

   (a) $(4x+7)^{20}(2x+8) < 0$ (b) $x(2x-1)(x+1) > 0$ (c) $\sqrt[3]{x^2-1} \le 0$ (d) $\dfrac{2x-1}{x-3} > 5$
   (e) $\dfrac{x}{2x-3} \le 3$ (f) $(2x-1)(x+3) < 0$ (g) $\dfrac{2x-1}{x+1} < 0$ (h) $\dfrac{3x-2}{2-x} \le 0$
   (d) $\dfrac{x^2-9}{x+1} < 0$ (j) $(2x-1)\left(x^2-4\right) \le 0$ $\dfrac{x-3}{x^2+1} > 5$ (i) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4} > 0$.

4. Resolva as Desigualdades.

   (a) $x^2 - 3x + 2 < 0$ (b) $x^2 + x + 1 \le 0$ (c) $3x^2 + x - 2 > 0$
   (d) $4x^2 - 4x + 1 \le 0$ (e) $x^2 + 3 > 0$ (f) $x^2 + x + 1 > 0$
   (g) $x^2 - 5x + 6 \ge 0$ (h) $x^2 + 5 \le 0$ (i) $(x-2)(x+3)(1-x) > 0$
   (j) $x^2 + 1 < 3x - x^2 - 3$ (k) $x(x+4)^2(x-2)^{-4} < 0$ (l) $\left(x^2-4\right)\left(x^2-3x+2\right) \le 0$

5. Dê o conjunto solução de cada uma das inequações modulares abaixo.

   (a) $|x| \le 1$ (b) $|2x-1| < 3$ (c) $|x| > 3$ (d) $|3x+3| \le 1/3$
   (e) $\left|2x^2-1\right| < 1$ (f) $|3x-1| < -2$ (g) $|x+3| \ge 1$ (h) $|2x-1| < x$
   (i) $|x+1| < |2x-1|$ (j) $|x-2| - |x-5| > x$ (k) $\left|(x-1)^3\right| < 1$ (l) $|x-1| + |x+3| < |4x|$

6. Duas desigualdades são ditas *equivalentes*, se possuem o mesmo conjunto de soluções. Com base nesta definição, classifique os pares de desigualdades abaixo.

   (a) $\sqrt{x-1} < \sqrt{2-x}$ e $x - 2 < 1 - x$.
   (b) $x^2 > 1$ e $1 + \dfrac{2}{x-1} > 0$.

7. Resolva os sistemas de inequações.

   (a) $\begin{cases} 8x - 2 < x - 1 \\ 2x^2 - x \le 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 < 0 \\ 1/x^2 \ge 1 \end{cases}$

8. Mostre que:

   (a) $x + \dfrac{1}{x} \geq 2, \quad \forall\, x > 0.$

   (b) Não existem números reais x e y, tais que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+y}$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 1.1

1. Uma sentença *falsa* pode ser justificada com um contra-exemplo, o qual consiste de dados que atendem à hipótese, mas, não à tese. Por exemplo, se a sentença

$$\underbrace{x < 2}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{x^2 < 4}_{\text{tese}}$$

   fosse verdadeira, ela seria válida em qualquer valor atribuído à variável x. Note que para $x = -3$ a hipótese é atendida, mas a tese não.

   Por outro lado, uma sentença verdadeira deve ser justificada usando conceitos e/ou regras, sem particularizar os dados. Por exemplo, a sentença

$$\underbrace{x^2 < 4}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{x < 2}_{\text{tese}}$$

   é verdadeira. De fato:

$$x^2 < 4 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{4} \Rightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

   e, em particular, conclui-se que $x < 2$, que é a tese.

   (a) F (b) V (c) V (d) V (e) V (f) F.

2. Se p é ímpar, então existe um inteiro k, tal que $p = 2k + 1$. Logo,

$$p^2 = (2k+1)^2 = 2m + 1, \qquad \text{onde } m = 2k^2 + 2k,$$

   e, portanto, p^2 é um número ímpar.

3. **DEMONSTRAÇÃO POR ABSURDO** Uma Demonstração por Absurdo consiste em negar a Tese e chegar a uma contradição da Hipótese. Isso nada mais é do que a equivalência das sentenças

$$[P] \Rightarrow [Q] \quad \text{e} \quad [\sim Q] \Rightarrow [\sim P] \tag{1.1}$$

   (em (1.1) $\sim Q$ indica a negativa da afirmação Q)

Para provar que $\sqrt{2}$ não é um número racional, raciocinemos por absurdo. Se $\sqrt{2}$ fosse racional, ele se escreveria sob a forma irredutível $\sqrt{2} = p/q$, sendo p e q inteiros e $q \neq 0$. Assim,

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2. \tag{1.2}$$

De (1.2) segue que p e q são números pares, contradizendo a irredutibilidade da fração $\dfrac{p}{q}$.

4. Mais uma vez usaremos a Demonstração por Absurdo. Se p não fosse divisível por 3, então o resto da divisão de p por 3 seria um inteiro $r \neq 0$, isto é, $p = 3k + r$ e, por conseguinte, teríamos

$$p^2 = 3\left(3k^2 + 2kr\right) + r^2 = 3m + r^2 \tag{1.3}$$

Segue de (1.3) que o resto da divisão de p^2 por 3 não é zero, contradizendo a divisibilidade de p^2 por 3, que é a hipótese da sentença a ser provada.

5. Sejam $r = p/q$ e $s = m/n$ dois números racionais.

   (a) Temos:
      i. $r + s = \dfrac{np + mq}{nq}$ é racional (quociente de dois inteiros) e
      ii. $r \cdot s = \dfrac{mp}{nq}$ é racional.

   (b) Considere os irracionais $x = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$. Então, $x + y = 0$ e $x \cdot y = -2$ são ambos racionais.

6. Seja $r = p/q$ um número racional qualquer.

   (a) Se $x + r$ fosse racional, então existiriam inteiros m e n, $n \neq 0$, tais que $x + r = m/n$. Assim,

$$x + r = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$$

   de onde deduzimos que x é racional (quociente de dois inteiros), contradizendo a hipótese.

   (b) Se o produto $x \cdot r$ fosse racional, então

$$x \cdot r = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{mq}{np}$$

   e daí resultaria x racional, contradizendo a hipótese.

7. Por hipótese, x e y são irracionais e $x^2 - y^2$ é um racional não nulo, de modo que podemos escrever

$$(x - y)(x + y) = \frac{p}{q}. \tag{1.4}$$

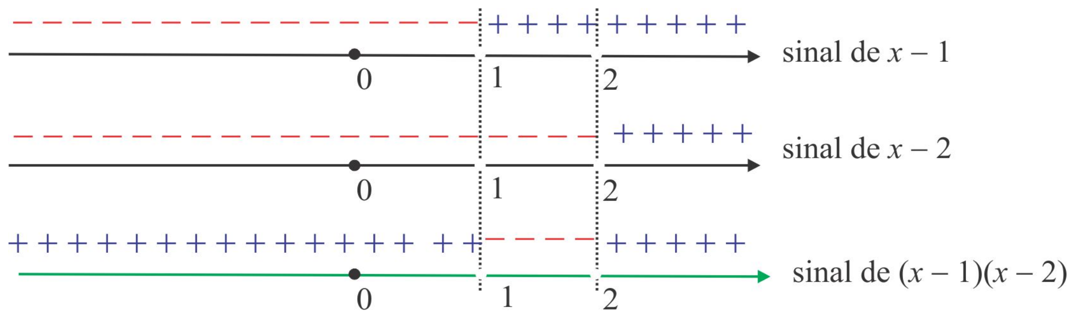
Se, por exemplo, $x - y$ fosse racional, segue de (1.4) que $x + y$ também seria racional e, portanto,

$$x = \tfrac{1}{2}\left[(x - y) + (x + y)\right]$$

seria racional, contradizendo a hipótese.

8. $x = 516/99$ e $y = 21486/99900$.

9. Como ilustração, veja na Figura abaixo como se obtém o sinal da expressão $(x-1)(x-2)$.



Vemos que a expressão $(x-1)(x-2)$ é positiva se $x < 1$ ou $x > 2$ e é negativa se $1 < x < 2$.

	positiva	negativa	zero	indefinida
(a)	$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$	$(1, 2)$	$\{1\}$	$x = 2$
(b)	$(-\infty, -1/2) \cup (2, +\infty)$	$(-1/2, 2)$	$\{-1/2, 2\}$	
(c)	$(-2, 2/3)$	$(-\infty, -2) \cup (2/3, +\infty)$	$\{2/3\}$	$x = -2$
(d)	$(-3/2, 0) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -3/2) \cup (0, 1)$	$\{0, 1, -3/2\}$	
(e)	$(1/2, +\infty)$	$(-\infty, 1/2)$	$\{1/2\}$	
(f)	$(0, +\infty)$	$(-\infty, 0)$	$\{0\}$	

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 1.2

1. (a) $x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2$ ou $x < -2$.

   (b) $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

   (c) $x^2 \leq 4 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

   (d) $x > 1$ ou $x < -1$.

   (e) $(x-a)^2 < r^2 \Rightarrow |x-a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.

2. Decorre da definição de Valor Absoluto que $|\square| = a \Leftrightarrow \square = \pm a$. Esta é a propriedade a ser usada.

   (a) $x = \pm 2$ (b) $x = 2$ ou $x = -4$ (c) $x = 0$ ou $x = 1$ (d) $\varnothing$

   (e) $x = -3/2$ (f) $x = -1/3$ (g) $x = -4/5$ ou $x = -6$ (h) $\varnothing$

   (i) $x = 6$ ou $x = -4$ (j) $x = -2$ ou $x = 6$ (k) $x = 4/21$ ou $x = 4/19$ (l) $x = 4$

3. Expressemos as respostas na forma de intervalo.

   (a) Na expressão $(4x+7)^{20}(2x+8)$ vemos que o primeiro fator é positiva e a expressão será negativa quando $2x - 8 < 0$, isto é, $x < -4$.

(b) $-1 < x < 0$ ou $x > 1/2$. Na forma de intervalo, temos $(-1, 0) \cup (1/2, +\infty)$.

(c) $[-1, 1]$.

(d) $(3, 14/3)$.

(e) $(-3, 1/2)$.

(f) $(-\infty, 3/2) \cup (9/5, +\infty)$.

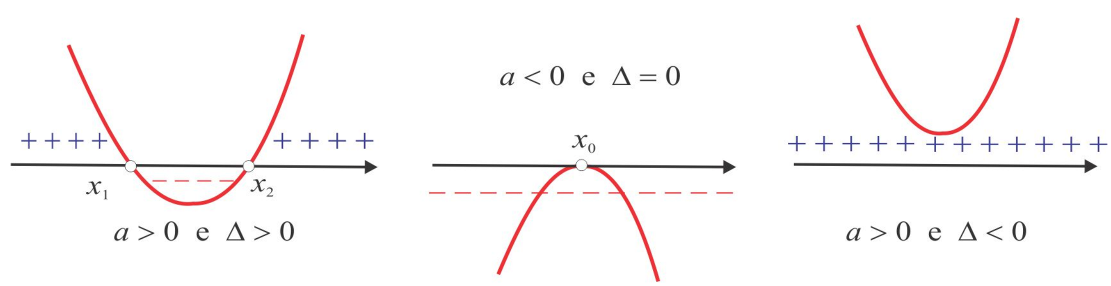
(g) $(-1, 1/2)$.

(h) $(-\infty, 2/3] \cup (2, +\infty)$.

4. No estudo do sinal do trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ressaltamos alguns fatos:

- Se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ for negativo, então o trinômio terá o mesmo sinal do coeficiente a, seja qual for o valor que se atribua a x.
- Se $\Delta > 0$, então o trinômio terá duas raízes reais e distintas x_1 e x_2 e o sinal será o mesmo do coeficiente a, se o x não estiver entre as raízes x_1 e x_2; ele terá sinal contrário ao de a, se o x estiver entre as raízes
- Se $\Delta = 0$, o trinômio terá uma única raiz real x_0 e o sinal coincide com sinal de a, se $x \neq x_0$.

Na figura abaixo ilustramos algumas situações.

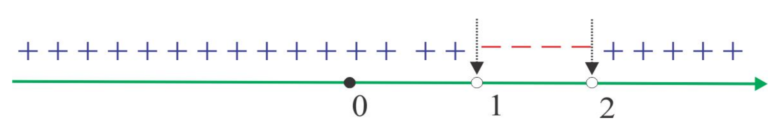


(a) $x^2 - 3x + 2 < 0$, $\quad \Delta = 1 > 0$.

As raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ e o trinômio será < 0 quando $1 < x < 2$. O conjunto solução é

$$S = (1, 2) \quad \text{ou} \quad S = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}.$$

Veja a ilustração na figura abaixo.



(b) $x^2 + x + 1 \leq 0$, $\quad \Delta = -3 < 0$. Conjunto solução $S = \varnothing$ (conjunto vazio).

(c) $3x^2 + x - 2 > 0$, $\Delta = 25 > 0$. Conjunto solução $S = (-\infty, -1) \cup (2/3, +\infty)$.

(d) $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$, $\Delta = 0$. Conjunto solução $S = \{1/2\}$ (conjunto unitário).

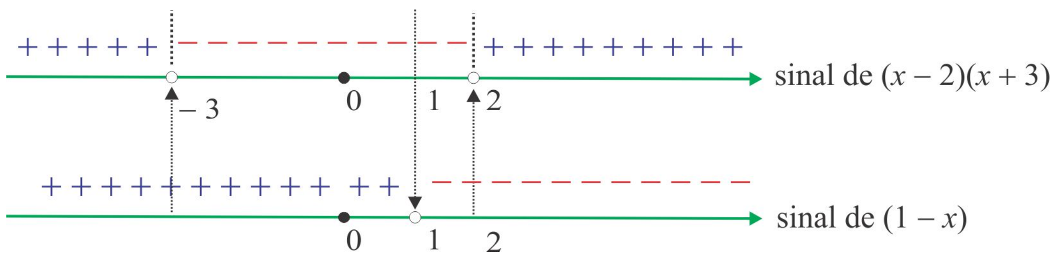
(e) $x^2 + 3 > 0$, $\Delta = -12 < 0$. Conjunto solução $S = \mathbb{R}$ ou $S = (-\infty, +\infty)$.

(f) $x^2 + x + 1 > 0$, $\Delta = -3 < 0$. Conjunto solução $S = \mathbb{R}$ ou $S = (-\infty, +\infty)$.

(g) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, $\Delta = 1 > 0$. Conjunto solução $S = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

(h) $x^2 + 5 \leq 0$, $\Delta = -20 < 0$. Conjunto solução $S = \varnothing$ (conjunto vazio).

(i) $(x - 2)(x + 3)(1 - x) > 0$. Para começar, veja a ilustração na figura abaixo.



O conjunto solução é $S = (-\infty, -3) \cup (1, 2)$.

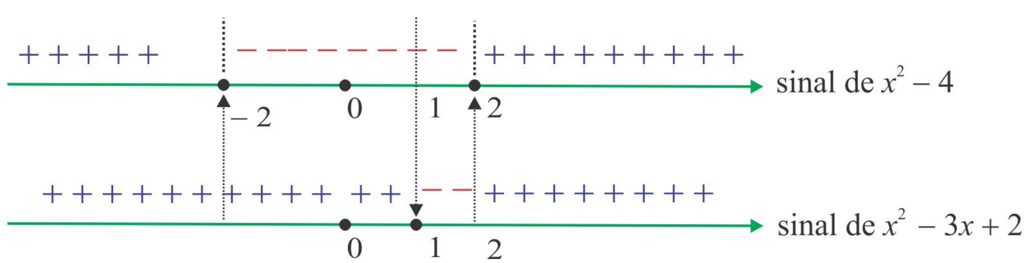
(j) A desigualdade proposta é equivalente a $2x^2 - 3x + 4 < 0$, onde temos $a = 2$ e $\Delta = -23 < 0$. O trinômio será sempre positivo (tem o mesmo sinal de) O conjunto solução $S = \varnothing$.

(k) O termo $(x + 4)^2 (x - 2)^{-4}$ é não negativo, exceto quando $x = 2$. O sinal de $x (x + 4)^2 (x - 2)^{-4}$ depende tão somente do sinal de x. Assim,

$$x (x + 4)^2 (x - 2)^{-4} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

e o conjunto solução é $S = (-\infty, 0)$.

(l) Veja na figura os sinais dos trinômios $x^2 - 4$ e $x^2 - 3x + 2$ e deduza que o conjunto solução é $S = [-2, 1] \cup \{2\}$.



5. Enunciado

(a) $S = [-1, 1]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$.

(b) $S = (-1, 2)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 2\}$.

(c) $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -3 \quad \text{ou} \quad x > 3\}$.

(d) $S = [-10/9, -8/9]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -10/9 \leq x \leq -8/9\}$.

(e) $S = (-1, 0) \cup (0, 1)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1 \quad \text{e} \quad x \neq 0\}$.

(f) $S = \varnothing$ (conjunto vazio).

(g) $S = (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -4 \text{ ou } x \geq -2\}$.

(h) $S = (1/3, 1)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : 1/3 < x < 1\}$.

(i) $S = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \quad \text{ou} \quad x > 2\}$.

(j) $S = (-\infty, -3)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -3\}$.

(k) $S = (0, 2)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}$.

(l) $S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 1\}$.

(a) não equivalentes (b) equivalentes.

6. Enunciado

(a) $S = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{7})$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 < x < 1/7\}$.

(b) $S = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1]$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} : -1/2 \leq x < 0 \text{ ou } 0 < x \leq 1\}$.

7. Enunciado

(a) Basta observar que se $x > 0$, então

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

e esta última desigualdade é válida seja qual for o valor real que se atribua a x.

(b) Se existissem tais números x e y satisfazendo

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$$

teríamos

$$x^2 + xy + y^2 = 0 \tag{1.5}$$

e, olhando (1.5) como uma equação do segundo grau em x, vemos que $\Delta = -3y^2 < 0$ e a equação não tem solução.