CÁLCULO I - **PERÍODO: 2015.2** **TURNO:** [ ] MANHÃ [ ] TARDE

3ž EXAME DE AVALIAÇÃO - **DERIVADAS: PARTE II**

[ ] EDUARDO [ ] JOEDSON [ ] MPMATOS [ ] NACIB [ ] SHIRLEY

GABARITO - PROVA B

---

01 **PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO** **(2,0 PONTOS)** Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, com tampa, de forma que sua área total seja 50 cm^2 e seu volume seja o maior possível.

SOLUÇÃO

Se representarmos por x o lado da base e por y a altura da caixa, o volume V e a área total A da caixa são dados por:

$$V = x^2 y \quad \text{e} \quad A = 50 = 2x^2 + 4xy.$$

Considerando que $A = 50$, obtemos $y = \dfrac{50 - 2x^2}{4x}$ e, sendo assim:

$$V = \frac{25x - x^3}{2} \Rightarrow V' = \frac{25 - 3x^2}{2}.$$

Logo, $V' = 0 \Leftrightarrow x = 5/\sqrt{3},\ x > 0$. Um cálculo direto nos dá $V''\left(5/\sqrt{3}\right) = -5\sqrt{3} < 0$, o que indica ser $x = 5/\sqrt{3}$ um ponto de máximo, e $y = 5/\sqrt{3}$. Trata-se de uma caixa com formato de um cubo de lado $x = 5/\sqrt{3}\ cm$.

---

02 **COMPARANDO FUNÇÕES** **(2,0 PONTOS)** Se x é qualquer número real positivo, mostre que

$$1 + x < e^x.$$

SOLUÇÃO

Considerando $f(x) = 1 + x - e^x,\ x > 0$, temos:

$$f'(x) = 1 - e^x < 0, \quad \forall x > 0,$$

e isto indica que $f(x)$ é decrescente no intervalo $(0, +\infty)$. Logo:

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) = 0, \quad \text{isto é,} \quad 1 + x - e^x < 0 \Leftrightarrow 1 + x < e^x.$$

03 CALCULANDO LIMITES (2,0 PONTOS) Use a regra de L'Hôpital e calcule os limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x.$

SOLUÇÃO

(a) A substituição de x por 0^+ produz uma indeterminação do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$ e usando a Regra de L'Hôpital encontramos:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} x\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = (\text{usar L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^{3/2}} = -2\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

(b) A substituição de x por 0 produz uma indeterminação do tipo $0\times\infty$, a qual pode ser convertida em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, onde usaremos a Regra de L'Hôpital. Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x &= \lim_{x\to 0} (1-\cos x)\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x} = \frac{0}{0} \\ &= (\text{usar L'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\sec^2 x} = 0.\end{aligned}$$

04 ESBOÇANDO GRÁFICO (4,0 PONTOS) Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida pela regra

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

(a) Calcule os limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Em que pontos o gráfico de f toca os eixos x e y?

(b) Classifique os pontos críticos de f e identifique onde a função f é crescente ou decrescente.

(c) Analise o comportamento da função f quanto à concavidade.

(d) Esboce o gráfico da função f. (resposta na folha anexa)

SOLUÇÃO

(a) Temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^4 - 2x^2\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^4\left(1 - 2/x^2\right)\right] = \div\infty.$$

As interseções do gráfico de f com os eixos coordenados são os pontos $(0,0)$ e $\left(0,\pm\sqrt{2}\right)$

(b) Os pontos críticos de f são as soluções da equação $f'(x) = 0$. Temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \pm 1.$$

Analisando o sinal da derivada, deduzimos que $f(x)$ é crescente em $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e descrescente em $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Além disso, $x = 0$ é um ponto de máximo local e $x = \pm 1$ sãõ pontos de minimo local e absoluto.

(c) Temos que:

(i) $f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$ (pontos de inflexão)

(ii) $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1/\sqrt{3}$ ou $x < -1/\sqrt{3}$ (concavidade para cima)

(iii) $f''(x) < 0 \Leftrightarrow -1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$ (concavidade para baixo)

(d) Veja o gráfico na figura abaixo. Dados que ajudam no esboço do gráfico:

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = f(1) = -1, \quad f(1/\sqrt{3}) = f(-1/\sqrt{3}) = -5/9 \simeq -0.55$$