CÁLCULO I - **PERÍODO: 2015.2** **TURNO:** [ ] MANHÃ [ ] TARDE

2º EXAME DE AVALIAÇÃO - **DERIVADAS: PARTE I**

[ ] EDUARDO [ ] JOEDSON [ ] MPMATOS [ ] NACIB [ ] SHIRLEY

GABARITO - PROVA A

01 REGRAS DE DERIVAÇÃO

(a) Seja $g(t)$ uma função derivável em $t = 0$, tal que $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$. Calcule $f'(0)$, sendo:

$$f(x) = g(x)\exp\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) + \operatorname{arctg} x.$$

(b) Sabendo que $G(x) = \ln(1 + \operatorname{sen} x) + e^{-2x}$, calcule $G'(0)$.

(a) Por meio de regras de derivação, obtemos:

$$f'(x) = g'(x)\exp\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) + g(x)(2x + \cos x)\exp\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{1+x^2}$$

e considerando $x = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} f'(0) &= g'(0)\exp\left(0^2 + \operatorname{sen} 0\right) + g(0)(0 + \cos 0)\exp\left(0^2 + \operatorname{sen} 0\right) + \frac{1}{1+0^2} \\ &= 5 \cdot e^0 + 2 \cdot 1 \cdot e^0 + 1 = \boxed{8.} \end{aligned}$$

(b) Dado que $G(x) = \ln(1 + \operatorname{sen} x) + e^{-2x}$, temos:

$$G'(x) = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} - 2e^{-2x} \Rightarrow G'(0) = \frac{\cos 0}{1 + \operatorname{sen} 0} - 2e^0 = \boxed{-1.}$$

02 RETA TANGENTE

Certa curva γ do plano xy é governada pela equação $y = \dfrac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

(a) Determine a reta tangente e a reta normal à curva γ no ponto de abscissa $x = 2$.

(b) Como se comporta a curva γ próximo de $x = 1$?

(a) O ponto de tangência é $A(2,-2)$ e as declividades das retas tangente e normal são, respectivamente, $m_T = y'(2)$ e $m_N = -1/y'(2)$. temos:

$$y' = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'(2) = 1.$$

Logo, $m_T = 1$ e $m_N = -1$ e as equações das retas são:

$$\boxed{\text{reta tangente:}\quad y = x - 4.}$$

$$\boxed{\text{reta normal:}\quad y = -x.}$$

(b) O comportamento da curva próximo de $x = 1$ é determinado pelos limites laterais em $x = 1$. Temos:

$$\text{limite lateral à esquerda:}\quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{1-x} = \boxed{+\infty.}$$

$$\text{limite lateral à direita:}\quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x} = \boxed{-\infty.}$$

03 LIMITES TRIGONOMÉTRICOS Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} [x \operatorname{sen}(2/x) + \operatorname{arctg}(-x)]$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1-\cos(2x)} + \frac{\tan x}{x}\right]$.

(a) A teoria nos ensina que:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(-x) = -\pi/2 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} [x \operatorname{sen}(2/x) + \operatorname{arctg}(-x)] &= \lim_{x\to\infty} [x \operatorname{sen}(2/x)] + \lim_{x\to\infty} [\operatorname{arctg}(-x)] \\ &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{2\operatorname{sen} t}{t}\right] + \lim_{x\to\infty} [\operatorname{arctg}(-x)] = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}.} \end{aligned}$$

(b) Usando a identidade $2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x)$, chegamos a:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1-\cos(2x)}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right]^2 = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right]\times\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\cos x}\right] = 1.$$

Assim, temos:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1-\cos(2x)}+\frac{\tan x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{1-\cos(2x)}\right]+\lim_{x\to 0}\left[\frac{\tan x}{x}\right]=\frac{1}{2}+1=\boxed{\frac{3}{2}.}$$

04 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA Suponha que próximo de $x=2$ a equação $2y^2=x+\ln(xy-y^2)$ defina y como função de x. Sabendo-se que $y(2)=1$, calcule $y'(2)$.

▶ Derivando a equação implicitamente em relação à variável x, encontramos:

$$4yy'=1+\frac{y+xy'-2yy'}{xy-y^2}$$

e considerando $x=2$ e $y=1$, resulta::

$$\begin{aligned} 4\cdot 1\cdot y'(2) &= 1+\frac{1+2y'(2)-2\cdot 1\cdot y'(2)}{2\cdot 1-1^2}\Leftrightarrow \\ 4y'(2) &= 2\Leftrightarrow \boxed{y'(2)=1/2.} \end{aligned}$$

05 TAXA DE VARIAÇÃO Um cone circular reto, ao ser aquecido, tem seu raio e sua altura aumentados às taxas de 2 cm/s e 5 cm/s, respectivamente. Determine a taxa de variação de seu volume, no instante em que sua altura atingir 40 cm e seu diâmetro for de 4 cm.

▶ O volume do cone de raio R e altura H vem dado por:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H,$$

onde o raio$R$ e altura H são funções de t. Derivando a expressão do volume em relação a t, obtemos:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}\left(R^2H\right)=\frac{\pi}{3}\left(2R\frac{dR}{dt}H+R^2\frac{dH}{dt}\right)$$

e usando os dados $\frac{dR}{dt}=2,\ \frac{dH}{dt}=5,\ R=2$ e $H=40$, chegamos a:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left(2\cdot 2\cdot 2\cdot 40+2^2\cdot 5\right)=\boxed{\frac{340\pi}{3}\ cm^3/s.}$$