



3.1 Equações Diferenciais Parciais

1. Determine a solução da EDP:

$$4f_x + 3f_y = 0,$$

que satisfaz à condição $f(x, 0) = \sin x$, para todo x .

2. Sejam $u(x, y) = f(xy)$ e $v(x, y) = g(x/y)$ sendo f e g deriváveis. Mostre que:

$$xu_x - yu_y = 0 \quad \text{e} \quad xv_x + yv_y = 0.$$

Determine uma solução $u(x, y)$ que satisfaz $u(x, x) = x^4 e^{x^2}$, $\forall x$. Encontre uma solução $v(x, y)$ que satisfaz $v(1, 1) = 2$ e $v_x(x, 1/x) = 1/x$, $\forall x \neq 0$.

3. Encontre a solução geral da equação $u_{xy} = 0$.

4. Uma função $u(x, y)$ é definida pela equação $u(x, y) = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, sendo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável. Determine uma função $G(x, y)$, de modo que u satisfaça à EDP:

$$x^2 u_x - y^2 u_y = G(x, y) u$$

5. Seja $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 que depende apenas da distância à origem, digamos, $f(x) = g(\|x\|)$. Mostre que $\Delta f = \frac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|) + g''(\|x\|)$. Se f satisfaz a equação de Laplace, deduza que $f(x) = a\|x\|^{2-n} + b$, $x \neq 0$.

6. **FUNÇÕES HOMOGÊNEAS** Seja f um campo escalar diferenciável em um aberto S do \mathbb{R}^n , com a seguinte propriedade: $f(tx) = t^p f(x)$, $\forall t > 0$ e todo x de S , para o qual $tx \in S$. Uma tal função f recebe o nome de *função homogênea de grau p* . Se f é homogênea de grau p , mostre que:

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = pf(x), \quad \text{para todo } x \text{ em } S.$$

Como sugestão calcule a derivada $g'(1)$, sendo $g(t) = f(tx)$.

3.2 Funções Implícitas

1. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina z como função de x e y , digamos, $z = f(x, y)$, sendo F de classe C^2 . Mostre que:

$$f_{xx} = -\frac{F_{zz}F_x^2 - 2F_{xz}F_zF_x + F_z^2F_{xx}}{F_z^3}.$$

Encontre expressões análogas para as derivadas f_{yy} e f_{xy} .

2. Se a equação $f(y/x, z/x) = 0$ define z como função de x e y , mostre que $xz_x + yz_y = z$.
3. Considere a superfície $xy - z \ln y + e^{yz} - e = 0$. É possível representá-la na forma $z = f(x, y)$ em uma vizinhança de $P_0(0, 1, 1)$?
4. Mostre que a curva interseção dessas superfícies $S_1 : x^2(y^2 + z^2) = 5$ e $S_2 : (x - z)^2 + y^2 = 2$ pode ser parametrizada, em uma vizinhança do ponto $P(1, -1, 2)$, sob a forma $y = f(x)$ e $z = g(x)$.
5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , com $f(1) = 1$, e seja

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2f(xy) = f(x)^2 + f(y)\}.$$

- (a) Se $f'(1) \neq 0$, mostre que existe $\delta > 0$, tal que $S \cap V_\delta(1, 1)$ é o gráfico de uma função $y = \varphi(x)$, de classe C^1 .
- (b) Admitindo f é de classe C^2 e $f'(1) \neq 0$, mostre que $x = 1$ é um ponto de máximo ou mínimo local para φ . Seria S o gráfico de uma função $x = \psi(y)$, em uma vizinhança de $(1, 1)$?
- (c) Se S é o gráfico de uma função $x = \psi(y)$ em uma vizinhança de $(1, 1)$, mostre que $f'(1) = 0$.
6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(0, 0) = 0$. Determine uma condição para f , que permita resolver a equação $f(f(x, y), y) = 0$, para explicitar y como função de x , em uma vizinhança de $(0, 0)$.
7. Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 , com $f(0, 0) = 0$, e considere as matrizes $A = [f_x(0, 0)]$ e $B = [f_y(0, 0)]$.
- (a) Escreva a matriz $Jf(0, 0)$ em termos dos blocos A e B .
- (b) Se $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por $\varphi(x, y) = f(f(x, y), f(x, y))$, calcule, em termos de A e B , as matrizes $[\varphi_x(0, 0)]$, $[\varphi_y(0, 0)]$ e $J\varphi(0, 0)$.
- (c) Se A é invertível e $\|B\| < 1/\|A^{-1}\|$, mostre que a equação $\varphi(x, y) = 0$ pode ser resolvida, para explicitar x em função y , em uma vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

8. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^2 - y \cos uv + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin uv + 2z^2 = 2 \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \end{cases}$$

define, ao menos implicitamente, x, y e z como funções de u e v , em uma vizinhança do ponto de coordenadas $x = y = 1, z = 0, u = \pi/2, v = 0$. Calcule as derivadas x_u e x_v nesse ponto.

3.3 Máximos & Mínimos

1. Determine o(s) ponto(s) da curva $x = \cos t, y = \sin t, z = \sin(t/2)$ mais distante(s) da origem.

2. Quais das funções seguintes tem um máximo ou mínimo em todo plano \mathbb{R}^2 ?

(a) $z = e^{x^2-y^2}$ (b) $z = e^{-x^2-y^2}$ (c) $z = x^2 - 2x(\sin y + \cos y)$.

3. Determine a distância (mínima) da origem à curva $y^2 = (x - 1)^3$. Por que o Método dos Multiplicadores de Lagrange não se aplica nesse caso?

4. Seja $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Mostre que na reta $y = mx$ a função f tem um mínimo em $(0, 0)$, mas a origem não é um mínimo local. Esboce o conjunto dos pontos (x, y) onde $f < 0$ e onde $f > 0$.

5. Determine constantes a e b que tornam a integral $\int_0^1 (ax + b - x^2)^2 dx$ mínima.

6. Seja $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$, onde $A > 0$ e $B^2 < AC$.

(a) Determine o valor mínimo de f .

(b) Mostre que no ponto P_0 , onde f assume seu valor mínimo, tem-se:

$$f(P_0) = \frac{1}{AC - B^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

7. Determine 3 números positivos cuja soma seja 5 e o produto o maior possível.

8. Se x, y e z são números reais não negativos, mostre que $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z)$.

9. Fixe n pontos distintos z_1, z_2, \dots, z_n do \mathbb{R}^m e defina $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{k=1}^n \|x - z_k\|^2$. Prove que f atinge seu valor mínimo no ponto $\mathbf{a} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$. o centroide

10. **MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS** A reta $f(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos dados $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, \dots , $A_n(x_n, y_n)$ é aquela em que os coeficientes a e b minimizam a função

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2.$$

Esta reta é denominada *Regressão Linear*. Determine a reta que melhor se ajusta aos dados $A(1, 3)$, $B(2, 7)$ e $C(3, 8)$.

11. Calcule o valor máximo de $f(x) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$, sob a restrição $\|x\|^2 = 1$. Use o resultado e mostre a desigualdade:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

válida para números reais positivos.

12. Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função do exercício precedente e considere n números reais positivos p_1, p_2, \dots, p_n . Determine o valor máximo de f no conjunto $G = \{x \in \mathbb{R}^n; \sum p_i x_i^2 = 1\}$.

FIQUE ALERTA! A condição $\nabla f + \lambda \nabla g = \vec{0}$ é necessária, mas não suficiente, para garantir a ocorrência de um valor extremo de $f(x, y)$ sujeito à restrição (vínculo) $g(x, y) = 0$. Por exemplo, considerando $f(x, y) = x + y$ e a restrição $xy = 16$, o método dos Multiplicadores de Lagrange produz os pontos $P_1(-4, -4)$ e $P_2(4, 4)$ como candidatos a pontos extremos. Ainda assim, f não tem máximo na hipérbole $xy = 16$. Quanto mais distante da origem estiver $P(x, y)$ nessa hipérbole no 1º quadrante maior será o valor de $x + y$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.1