



2.1 Diferenciabilidade

- Um campo escalar $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é definido pela equação $f(x) = \langle \mathbf{a}, x \rangle$, onde \mathbf{a} é um vetor constante. Calcule a derivada direcional $D_{\mathbf{v}}f(x)$ no ponto x e direção \mathbf{v} arbitrários.
- Resolva o exercício precedente, no caso em que $f(x) = \|x\|^4$. Considere $N = 2$ e determine todas as direções v para as quais $D_{\mathbf{v}}f(2, 3) = 6$.
- Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, defina o campo $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle Tx, x \rangle$. Calcule $D_{\mathbf{v}}f(x)$.
- Suponha que um campo escalar f tem a seguinte propriedade: $D_{\mathbf{v}}f(x) = 0$, em qualquer direção \mathbf{v} e em todos os pontos da bola $B_{\delta}(a)$. Mostre que f é constante nessa bola. O que se pode deduzir no caso em que a propriedade é válida em todo ponto de $B_{\delta}(a)$, mas em uma direção fixa?
- Prove que não existe um campo escalar f tal que $D_{\mathbf{v}}f(a) > 0$, em um ponto fixo a e toda direção não nula \mathbf{v} . Dê exemplo de um campo escalar com a seguinte propriedade: $D_{\mathbf{v}}f(x) > 0$, em uma direção fixa \mathbf{v} e todo ponto x .
- Considere a função $f(x, y) = 3x^2 + y^2$, restrita ao círculo $x^2 + y^2 = 1$. Determine os pontos e as direções para os quais a derivada direcional de f é máxima.
- Considere o campo escalar $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$, sendo a, b e c constantes. Determine a, b e c , de modo que a derivada direcional do campo f , no ponto $(1, 2, -1)$, tenha valor máximo 64, na direção do eixo z .
- Em \mathbb{R}^3 seja $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e deixe r representar a norma de \mathbf{r} , isto é, $r = \|\mathbf{r}\|$. Mostre que: (a) $\nabla r(x, y, z)$ é um vetor unitário colinear com r ; (b) $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.
- Suponha que f seja diferenciável em cada ponto da bola $B_{\delta}(a)$ e que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ são n vetores linearmente independentes tais que $D_{\mathbf{v}_j}f(x) = 0$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, em qualquer ponto x de $B_{\delta}(a)$. Mostre que f é constante em $B_{\delta}(a)$.
- Seja f um campo escalar diferenciável em cada ponto da bola $B_{\delta}(a)$.
 - Se $\nabla f(x) = 0$ para todo x em $B_{\delta}(a)$, mostre que f é constante em $B_{\delta}(a)$.
 - Se $f(x) \leq f(a)$ para todo x em $B_{\delta}(a)$, mostre que $\nabla f(a) = 0$.

11. Mostre que $\nabla(\|x\|)$ é um vetor unitário na direção de x e que

$$\nabla(\|x\|^k) = k\|x\|^{k-2}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Calcule $\nabla(1/\|x\|)$, para $x \neq 0$.

12. **A REGRA DA CADEIA** Seja $h(x) = f[g(x)]$, onde $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ é um campo diferenciável em a , e f é um campo escalar diferenciável em $b = g(a)$. Mostre que:

$$\nabla h(a) = \sum_{k=1}^n D_k f(b) \nabla g_k(a).$$

13. Considere dois campos diferenciáveis $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e represente os pontos do \mathbb{R}^n por (x', x_n) , sendo $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Se $\beta : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por $\beta(x') = (x', \varphi(x'))$, mostre que:

$$D(g \circ \beta)(x') = \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x) \right]_{1 \times (n-1)} + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \nabla \varphi(x').$$

2.2 Exemplos Clássicos do Cálculo

1. Defina os campos escalares f e g em \mathbb{R}^2 por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcule as derivadas parciais $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$, $g_{xy}(0, 0)$ e $g_{yx}(0, 0)$. O campo f é diferenciável na origem? E o campo g ?

2. Determine um campo $\mathbf{v}(x, y, z)$ normal à superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$, em um ponto genérico $(x, y, z) \neq \mathbf{0}$. Se $\theta(x, y, z)$ representa o ângulo entre $\mathbf{v}(x, y, z)$ e o eixo z , determine o limite de $\cos \theta$ quando $(x, y, z) \rightarrow \mathbf{0}$.
3. Considere as funções $u(x, y)$ e $\mathbf{v}(x, y)$ definidas pelas equações $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \sin v$. Mostre que os vetores gradientes $\nabla u(x, y)$ e $\nabla v(x, y)$ são perpendiculares em cada ponto (x, y) , com $x > 0$.
4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.
- (a) Verifique que $\partial_x f(0, 0) = 0$ e $\partial_y f(0, 0) = 0$.

- (b) A função f admite plano tangente na origem? (sugestão: considere a seção da superfície com o plano $x = y$).
5. Encontre a equação do plano tangente à superfície $xyz = a^3$, $a > 0$, no ponto (x_0, y_0, z_0) e mostre que o volume do tetraedro limitado por este plano e os três planos coordenados é $9a^3/2$.
 6. Se $\nabla f(x, y, z)$ é sempre paralelo ao vetor $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, mostre que f assume valores iguais nos pontos $(0, 0, \pm a)$.
 7. As equações $u = (x - y)/2$ e $v = (x + y)/2$ transformam $f(u, v)$ em $F(x, y)$. Use uma forma apropriada da regra da cadeia para expressar as derivadas F_x e F_y em termos das derivadas f_u e f_v .
 8. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2$. Mostre que f é diferenciável e calcule a derivada $Df(x)$.
 9. Sejam $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ dois campos vetoriais diferenciáveis e defina $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Mostre que F é diferenciável e calcule a derivada $DF(x)$.
 10. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

não é diferenciável na origem.

11. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz à condição $|f(x)| \leq \|x\|^2$, $\forall x$, mostre que f é diferenciável na origem.
12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$ e que as derivadas parciais de primeira ordem de f , embora existam em todo \mathbb{R}^2 , não são contínuas na origem.

13. Dê exemplo de um campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, descontínuo na origem, mas com derivada direcional $D_{\mathbf{v}}f(0, 0)$ em qualquer direção \mathbf{v} .
-

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.1