2.1 Diferenciabilidade

1. Um campo escalar $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é definido pela equação$f(x) = \langle \mathbf{a}, x \rangle$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante. Calcule a derivada direcional $D_{\mathbf{v}} f(x)$ no ponto x e direção $\mathbf{v}$ arbitrários.

2. Resolva o exercício precedente, no caso em que $f(x) = \|x\|^4$. Considere $N = 2$ e determine todas as direções v para as quais $D_{\mathbf{v}} f(2,3) = 6$.

3. Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, defina o campo $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \langle Tx, x \rangle$. Calclule $D_{\mathbf{v}} f(x)$.

4. Suponha que um campo escalar f tem a seguinte propriedade: $D_{\mathbf{v}} f(x) = 0$, em qualquer direção $\mathbf{v}$ e em todos os pontos da bola $B_\delta(a)$. Mostre que f é constante nessa bola. O que se pode deduzir no caso em que a propriedade é válida em todo ponto de $B_\delta(a)$, mas em uma direção fixa?

5. Prove que não existe um campo escalar f tal que $D_{\mathbf{v}} f(a) > 0$, em um ponto fixo a e toda direção não nula $\mathbf{v}$. Dê exemplo de uma campo escalar com a seguinte propriedade: $D_{\mathbf{v}} f(x) > 0$, em uma direção fixa $\mathbf{v}$ e todo ponto x.

6. Considere a função $f(x,y) = 3x^2 + y^2$, restrita ao círculo $x^2 + y^2 = 1$. Determine os pontos e as direções para os quais a derivada direcional de f é máxima.

7. Considere o campo escalar $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$, sendo a, b e c constantes. Determine a, b e c, de modo que a derivada direcional do campo f, no ponto $(1,2,-1)$, tenha valor máximo 64, na direção do eixo z.

8. Em $\mathbb{R}^3$ seja $\mathbf{r}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e deixe r representar a norma de $\mathbf{r}$, isto é, $r = \|\mathbf{r}\|$. Mostre que: (a) $\nabla r(x,y,z)$ é um vetor unitário colinear com r; (b) $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$.

9. Suponha que f seja diferenciável em cada ponto da bola $B_\delta(a)$ e que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{2,} \ldots, \mathbf{v}_n$ são n vetores linearmente independentes tais que $D_{\mathbf{v}_j} f(x) = 0$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, em qualquer ponto x de $B_\delta(a)$. Mostre que f é constante em $B_\delta(a)$.

10. Seja f um campo escalar diferenciável em cada ponto da bola $B_\delta(a)$.

    (a) Se $\nabla f(x) = 0$ para todo x em $B_\delta(a)$, mostre que f é constante em $B_\delta(a)$.

    (b) Se $f(x) \le f(a)$ para todo x em $B_\delta(a)$, mostre que $\nabla f(a) = 0$.

11. Mostre que $\nabla(\|x\|)$ é um vetor unitário na direção de x e que

$$\nabla\left(\|x\|^k\right) = k\,\|x\|^{k-2}\,x, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Calcule $\nabla(1/\|x\|)$, para $x \neq 0$.

12. A REGRA DA CADEIA Seja $h(x) = f[g(x)]$, onde $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ é um campo diferenciável em a, e f é um campo escalar diferenciável em $b = g(a)$. Mostre que:

$$\nabla h(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(b)\,\nabla g_k(a).$$

13. Considere dois campos diferenciáveis $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e represente os pontos do $\mathbb{R}^n$ por (x', x_n), sendo $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Se $\beta : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ é definida por $\beta(x') = (x', \varphi(x'))$, mostre que:

$$D(g \circ \beta)\left(x'\right) = \left[\frac{\partial g}{\partial x'}(x)\right]_{1\times(n-1)} + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\,\nabla\varphi\left(x'\right).$$

2.2 Exemplos Clássicos do Cálculo

1. Defina os campos escalares f e g em $\mathbb{R}^2$ por:

$$f(x,y) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{array}\right. \quad \text{e} \quad f(x,y) = \left|\begin{array}{ll} \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{array}\right.$$

Calcule as derivadas parciais $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $g_{xy}(0,0)$ e $g_{yx}(0,0)$. O campo f é diferenciável na origem? E o campo g?

2. Determine um campo $\mathbf{v}(x,y,z)$ normal à superfície $z = \sqrt{x^2+y^2} + \left(x^2+y^2\right)^{3/2}$, em um ponto genérico $(x,y,z) \neq \mathbf{0}$. Se $\theta(x,y,z)$ representa o angulo entre $\mathbf{v}(x,y,z)$ e o eixo z, determite o limite de $\cos\theta$ quando $(x,y,z) \to \mathbf{0}$.

3. Considere as funções $u(x,y)$ e $\mathbf{v}(x,y)$ definidas pelas equações $x = e^u \cos v$ e $y = e^u \operatorname{sen} v$. Mostre que os vetores gradientes $\nabla u(x,y)$ e $\nabla v(x,y)$ são perpendiculares em cada ponto (x,y), com $x > 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definido por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

(a) Verifique que $\partial_x f(0,0) = 0$ e $\partial_y f(0,0) = 0$.

(b) A função f admite plano tangente na origem? (sugestão: considere a seção da superfície com o plano $x = y$).

5. Encontre a equação do plano tangente à superfície $xyz = a^3,\ a > 0$, no ponto (x_0, y_0, z_0) e mostre que o volume do tetraedro limitado por este plano e os três planos coordenados é $9a^3/2$.

6. Se $\nabla f(x, y, z)$ é sempre paralelo ao vetor $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, mostre que f assume valores iguais nos pontos $(0, 0, \pm a)$.

7. As equações $u = (x - y)/2$ e $v = (x + y)/2$ transformam $f(u, v)$ em $F(x, y)$. Use uma forma apropriada da regra da cadeia para expressar as derivadas F_x e F_y em termos das derivadas f_u e f_v.

8. Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$. Mostre que f é diferenciável e calcule a derivada $Df(x)$.

9. Sejam $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dois campos vetoriais diferenciáveis e defina $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Mostre que F é diferenciável e calcule a derivada $DF(x)$.

10. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \text{se}\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0,\ \text{se}\ (x, y) = (0, 0) \end{array} \right.$$

não é diferenciável na origem.

11. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfaz à condição $|f(x)| \leq \|x\|^2$, $\forall x$, mostre que f é diferenciável na origem.

12. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \left| \begin{array}{l} \left(x^2 + y^2\right) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \text{se}\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0,\ \text{se}\ (x, y) = (0, 0). \end{array} \right.$$

Mostre que f é diferenciável em $(0, 0)$ e que as derivadas parciais de primeira ordem de f, embora existam em todo $\mathbb{R}^2$, não são contínuas na origem.

13. Dê exemplo de um campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, descontínuo na origem, mas com derivada direcional $D_{\mathbf{v}} f(0, 0)$ em qualquer direção $\mathbf{v}$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.1