1.1 Propriedades Algébricas

1. Se x e y são números reais não negativos, mostre que:

$$2xy \leq x^2 + y^2. \tag{1.1}$$

   Quando ocorre a igualdade em (1.1)?

2. Se $x_1, x_2, \cdots, x_N$ são números reais não negativos, verifique a relação:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_N)^{1/N} \leq \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \cdots + x_N). \tag{1.2}$$

   Quando ocorre a igualdade em (1.2)? Como sugestão, use $\exp(\lambda) \geq 1 + \lambda$, com $\lambda = -1 + x_i/A$, sendo $A = (x_1 + x_2 + \cdots + x_N)/N$, e, em seguida, efetue as multiplicações membro a membro.

3. Com o Método de Indução Finita, prove a relação

$$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{N} a_i \cdot b_j, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

4. Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^1$, mostre que existe $C > 0$ tal que $\|x\| = C|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1$.

5. Se $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^N$, mostre que $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

6. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *preserva norma* se $\|Tx\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, e *preserva produto interno* se $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

   (a) Prove que T preserva norma se, e somente se, preserva produto interno.

   (b) Se T preserva norma, mostre que T é um isomorfismo e que T^{-1} é da mesma natureza.

7. Se x e y são vetores não nulos do $\mathbb{R}^N$, o ângulo entre x e y, denotado por $\angle(x, y)$, é definido por $\operatorname{arccos}(\langle x, y \rangle / \|x\| \cdot \|y\|)$. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ preserva ângulo se T é um isomorfismo e para $x \neq y$ tem-se $\angle(Tx, Ty) = \angle(x, y)$.

   (a) Se T preserva norma, mostre que T preserva ângulo.

(b) Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ uma base do $\mathbb{R}^N$, de vetores próprios de T, com respectivos valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$, e suponha que T preserva ângulo. Mostre que todos os $|\lambda_i|$ são iguais. Verifique que a recíproca não é verdadeira considerando a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(1,0) = (1,0)$ e $T(1,1) = -(1,1)$.

8. Mostre que $\|\bullet\|_1 \sim \|\bullet\|_2$ é uma relação de equivalência.

9. Demonstra-se que uma norma $\|\cdot\|$ em $\mathbb{R}^N$ é gerada por um produto interno quando a *identidade do paralelogramo*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

for atendida para todo x e y do $\mathbb{R}^N$. Verifique que em $\mathbb{R}^N$ a norma $\|\bullet\|_S$ não é gerada por um produto interno. Idem para a norma $\|\bullet\|_\infty$.

1.2 Propriedades Métricas

1. Dados $x \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, mostre que $B_r(x) = x + B_r(0)$. Mostre também que $z \in B_r(x) \Leftrightarrow z = x + ry$, com $y \in B_1(0)$, e use isto para estabelecer uma bijeção $h : B_1(0) \longleftrightarrow B_r(x)$.

2. Em cada caso, identifique o *exterior*, o *interior*, a *fronteira* e o *fêcho* de cada subconjunto X do $\mathbb{R}^N$, classificando-o topologicamente em: *aberto*, *fechado*, *limitado*, *compacto*, etc.

(a) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

(b) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0 \text{ ou } x > 0 \text{ e } y = 0\}$.

(c) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 \geq 1\}$.

(d) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2/4 > 1\}$.

(e) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \|(x,y)\|_\infty < 2\}$.

3. O produto cartesiano $R = I \times J$ de dois intervalos abertos da reta é denominado um *retângulo aberto* do $\mathbb{R}^2$. Verifique que nos conceitos de interior, exterior e fronteira pode-se substituir a expressão *bola aberta* por *retângulo aberto*. Como se define *retângulo aberto* do $\mathbb{R}^N$?

4. Com relação a um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^N$, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $S = \text{int}(S)$ **(b)** $S \cap \partial S = \varnothing$.

5. Mostre que $x \in \overline{S}$ se, e somente se, $S \cap B_\varepsilon(x) \neq \varnothing$, seja qual for o ε positivo.

6. Dado $S \subset \mathbb{R}^N$, mostre que $\partial S = \overline{S} \cap \overline{S^c}$.

7. Mostre que o interior de um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ é o maior aberto do $\mathbb{R}^N$ contido em S, enquanto o fêcho de S é o menor fechado que o contém.

8. Um subconjunto $A \subset S$ é aberto em S, quando A for a interseção de S com um aberto do $\mathbb{R}^N$.

9. Dado um subconjunto S, aberto em $\mathbb{R}^N$, mostre que os subconjuntos abertos em S são precisamente os abertos do $\mathbb{R}^N$ contidos em S.

10. Mostre que $A \subset S$ é aberto em S se, e somente se, para cada $x \in A$, existe um raio $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap S \subset A$.

11. Seja $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq 0\}$. Verifique qual dos conjuntos abaixo é aberto em S.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in S;\ x^2 + y^2 < 1\} \\ B &= \{(x,y) \in S;\ x^2 + y^2 < 1 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x \geq 0\} \\ C &= \{(x,y) \in S;\ x^2 + y^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

12. Prove a seguinte igualdade elementar entre conjuntos: $A - B = A \cap B^c$. Deduza a partir desta relação que se A é aberto e B é fechado, então $A - B$ é aberto. E se A for fechado e B for aberto será que $A - B$ é fechado?

13. Um ponto $x_0 \in S \subset \mathbb{R}^N$ denomina-se *ponto isolado* de S quando existir um raio $r > 0$ tal que $B_r(x) \cap S = \{x_0\}$. Mostre que um ponto de S ou é um ponto isolado ou é um ponto de acumulação.

14. Verifique que os conjuntos abaixo são convexos.

$$\begin{aligned} &A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\} \\ &B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < y\} \\ &C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Mostre que uma esfera do $\mathbb{R}^N$ não é um conjunto convexo. A interseção de dois convexos é ainda convexo? E a união?

1.3 Convergência & Topologia

1. Calcule o limite da sequência $x_k = (1/k, (\ln k)/k, k \operatorname{sen}(1/k))$.

2. Use a definição, com a norma do máximo, e mostre que a sequência $x_k = (1/k, \operatorname{sen}(1/k))$ converge para $(0, 0)$.

3. Se $F \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto fechado e (x_k) é uma sequência em F, convergindo para x, mostre que $x \in F$.

4. Dado $x \in \partial S$, construa indutivamente uma sequência $(x_k) \subset S$, com $x_k \to x$.

5. Mostre que $x \in \overline{S}$ se, e somente se, existe em S uma sequência (x_k) convergindo para x.

6. Mostre que duas normas equivalentes *geram* as mesmas sequências convergentes. Demonstra-se que em $\mathbb{R}^N$ quaisquer duas normas são equivalentes e isto nos autoriza, pra efeito de convergência, usar indistintamente qualquer norma.

1.4 Convergência & Continuidade

1. Mostre que um campo vetorial $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n) : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínuo em x_0 se, e somente se, cada coordenada $f_j : D \to \mathbb{R}$ for contínua em x_0.

2. Sejam $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ duas funções contínuas em $\overline{S} \subset \mathbb{R}^m$, tais que $f(x) = g(x)$ para qualquer x em S. Mostre que f e g coincidem em $\overline{S}$.

3. Mostre que $f : S \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in S$, se para toda seqüência $\{X_k\}$ em S convergindo para a, a seqüência $\{f(X_k)\}$ tem uma subseqüência convergindo para $f(a)$.

4. Use a função $f(x) = x^2$ para mostrar que a imagem de um conjunto aberto da reta por uma função contínua pode não ser um aberto. Exemplifique esta situação em $\mathbb{R}^2$.

5. Se $f : S \subset \mathbb{R}^m \to R^n$ é uma função contínua e $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado, mostre que $f^{-1}(F)$ é fechado em S. Substitua o fechado F por um aberto A e prove um resultado análogo. Conclua que o conjunto dos *zeros* de uma função contínua e, em particular, o *núcleo* de um operador linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, é fechado.

6. Considere $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, x > 0 \text{ e } 0 < y < x^2\right\}$ e mostre que qualquer reta passando pela origem contém um intervalo em torno de $(0, 0)$ que não toca o conjunto A. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 0$, se $x \notin A$, e $f(x) = 1$, se $x \in A$ e fixado $v \in \mathbb{R}^2$, defina $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_v(t) = f(tv)$. Mostre que g_v é contínua em $t = 0$, embora f não seja contínua em $(0, 0)$.

7. Considere um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ e suponha que A não é fechado. Mostre que é possível definir um campo escalar contínuo $f : A \to \mathbb{R}$ não limitada. Como sugestão considere um ponto $x_0 \notin A \cup \operatorname{int}\{\mathbb{R}^n \backslash A\}$ e defina $f(x) = 1/\|x - x_0\|$.

8. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto compacto, mostre que qualquer campo escalar contínuo em K é limitado e atinge seus extremos.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 1.1

1. Decorre diretamente da desigualdade: $(x-y)^2 \geq 0$. Ocorre a igualdade se, e somente se, $x = y$.

2. Veja o caso $N = 2$ como ilustração. De acordo com a sugestão, temos:

$$\exp\left(-1+\frac{x_1}{A}\right) \geq \frac{x_1}{A} \quad \text{e} \quad \exp\left(-1+\frac{x_2}{A}\right) \geq \frac{x_2}{A}$$

e, considerando que $A = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, resulta:

$$\exp\left(-1+\frac{x_1}{A}\right)\exp\left(-1+\frac{x_2}{A}\right) \geq \frac{x_1x_2}{A^2} \Leftrightarrow A^2\exp(0) \geq x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1x_2)^{1/2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}.$$