6.1 Convergência Pontual & Convergência Uniforme

1. Estude o limite pontual das seguintes sequências de funções nos domínios indicados

   (a) $\dfrac{x}{x+n},\ x \geq 0$ (b) $\dfrac{nx}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$ (c) $n^2x(1-x)^n,\ 0 \leq x \leq 1$

   (d) $\dfrac{nx}{1+nx},\ x \geq 0$ (e) $\dfrac{x^n}{1+x^n},\ x \neq -1$ (f) $\dfrac{\cos(nx)}{1+nx},\ x \geq 0$

   (g) $x^n(1-x)^n,\ 0 \leq x \leq 1$ (h) $n^2x^2e^{-nx},\ x \geq 0$ (i) $x^n(1-x),\ x \in \mathbb{R}$

2. Mostre que a convergência da sequência do Exercício 6.1(a) é uniforme em $[0, a]$, $a > 0$, mas não é uniforme em $[0, +\infty)$.

3. Mostre que a convergência da sequência do Exercício 6.1(b) é uniforme em $[a, +\infty)$, $a > 0$. Idem para a sequência do Exercício 6.1(c).

4. Mostre que a convergência da sequência do Exercício 6.1(d) é uniforme em $[1+b, +\infty)$, $b > 0$, e em $[0, a]$, $0 < a < 1$, mas não é uniforme em $[0, 1]$.

5. Mostre que a convergência da sequência do Exercício 6.1(e) é uniforme em $[a, +\infty)$, $a > 0$, mas não é uniforme em $[0, +\infty)$. Idem para a sequência do Exercício 6.1(f)

6. Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ convergem uniformemente em D para f e g, respectivamente, e λ é uma constante, mostre que $\lambda f_n + g_n \to \lambda f + g$, uniformemente em D.

7. Considere a sequência $f_n(x) = x + 1/n$ e a função $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $\|f_n - f\|_\infty = 1/n$ e conclua que $\{f_n\}$ converge para f uniformemente em $\mathbb{R}$. Mostre também que a sequência $\{f_n^2\}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$ e deduza que o produto de sequências uniformemente convergentes pode não ser uniformemente convergente.

8. O exercício precedente pode ser generalizado assim: se $p(x)$ é um polinômio de grau ≥ 1, então a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) = p(x) + 1/n$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para $p(x)$, porém $\{f_n^2\}$ não converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

9. Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ convergem uniformemente em D para f e g, respectivamente, e f_n e g_n são funções limitadas em D, para cada n, mostre que a sequência $\{f_n \cdot g_n\}$ converge uniformemente em D para $f \cdot g$.

10. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções definidas em D, com as seguintes propriedades:

(i) $f_n \xrightarrow{u} f$, uniformemente em D.

(ii) $\{f_n\}$ é uniformemente limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$, $\forall n$, $\forall x \in D$.

Se g é uma função contínua no intervalo $[-M, M]$, mostre que a composição $\{g \circ f_n\}$ converge uniformemente em D para $g \circ f$.

11. Se $g : E \to \mathbb{R}$ uniformemente contínua e $f_n \xrightarrow{u} f$ em D, com $f(D) \subseteq E$ e $f_n(D) \subseteq E$, $\forall\ n$, mostre que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformemente em D. Investigue a convergência de $(f_n \circ g)$.

12. **CRITÉRIO DE CAUCHY:** Para que uma sequência de funções $f_n : D \to \mathbb{R}$ convirja uniformemente e necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, exista um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

13. Seja $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ e suponha que $f_n \to f$ uniformemente em D. Mostre que a função f é limitada se, e somente se, existem $K > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|f_n(x)| \leq K$, $\forall x \in D$, $\forall n \geq n_0$.

14. Considere $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)/\sqrt{n}$. Mostre que $\{f_n\}$ converge uniformemente para zero, mas a sequência das derivadas $\{f_n'\}$ diverge em todo ponto do intervalo $[0,1]$.

15. Mostre que a sequência de funções $f_n(x) = x + x^n/n$ converge uniformemente em $[0,1]$ para uma função derivável, a sequência de derivadas converge pontualmente em $[0,1]$, mas $\lim f_n' \neq [\lim f_n]'$.

16. Considere a sequência de funções $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$. Mostre que $\{f_n\}$ converge pontualmente mas não uniformemente em $[0,1]$ e, apesar disso, vale:

$$\int_0^1 \lim f_n(x)\, dx = \lim \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

17. Sejam $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ funções contínuas em D. Se $f_n \xrightarrow{u} f$ em D, mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $\overline{D}$.

18. O Teorema de Bolzano-Weierstrass é um caso particular do Teorema de Arzelá-Áscoli?

19. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções reais definidas no intervalo compacto $[a,b]$. Suponha que para cada $c \in [a,b]$ e $\varepsilon > 0$, existe um número positivo $\delta = \delta(c, \varepsilon)$ tal que se $x \in [a,b]$ e $|x - c| < \delta$, então $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Mostre que a família $\mathcal{F}$ é eqüicontínua.

20. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pontualmente convergente no conjunto $\mathbb{Q}$. Se a família $\mathcal{F} = \{f_n\}$ é eqüicontínua, mostre que $\{f_n\}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

21. No intervalo compacto $[0,1]$, considere a sequência de funções $\{f_n\}$ definidas por:

$$f_n(x) = x^2\left[x^2 + (1-nx)^2\right]^{-1}.$$

Verifique que a sequência $\{f_n\}$ é uniformemente limitada, converge pontualmente para zero mas não possui subsequência uniformemente convergente. Note que $f_n(1/n) = 1$, $\forall n$.

22. Se uma sequência de funçõe limitadas for uniformemente convergente, mostre que ela é uniformemente limitada.

23. Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_n(x) = \operatorname{sen}^2(\pi/x)$, para $1/(n+1) \leq x \leq 1/n$ e $f_n(x) = 0$, caso contrário. Mostre que $\{f_n\}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para uma função contínua, mas a convergência não é uniforme. Considere a série $\sum f_n$ para comprovar que a convergência uniforme não é consequência da convergência absoluta, mesmo que esta última se verifique para todo x.

24. Em qualquer intervalo limitado, verifique que a série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(n + x^2\right)}{n^2}$$
converge uniformemente e, contudo, a convergência não é absoluta em ponto algum.

25. Verifique que a sequência $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, onde $f_n(x) = x\left(1 + nx^2\right)^{-1}$ converge pontualmente em $\mathbb{R}$ para uma função f e que a relação $\lim f_n'(x) = f'(x)$ é falsa quando $x = 0$.

26. Seja f uma função real contínua em $[0,1]$ tal que $\int_0^1 f(x)\, x^n dx = 0$, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Use o Teorema Aproximação de Weierstrass para mostrar que $\int_0^1 f^2 = 0$ e daí conclua que $f \equiv 0$, em $[0,1]$.

27. Seja $\{f_n\}$ uma sequência uniformemente limitada de funções integráveis em $[a,b]$. Mostre que a sequência de primitivas
$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\, dt, \quad a \leq x \leq b,$$
possui uma subsequência uniformemente convergente em $[a,b]$.

28. Suponha que $f_n \to f$ uniformemente em D e seja $\{x_n\}$ uma sequência em D com limite $x \in D$. Se f é contínua em x, mostre que $\lim f_n(x_n) = f(x)$.

29. **TEOREMA DE DINI:** Se uma sequência monótona de funções contínuas $\{f_n\}$ em $[a,b]$ convergir para uma função contínua f em $[a,b]$, então a convergência é uniforme.

30. Qualquer sequência eqüicontínua $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ pontualmente convergente é uniformemente convergente. Você pode substituir o intervalo $[a,b]$ por qualquer outro compacto da reta e o resultado continua válido.

31. Sejam $f_n, f : A \cup B \to \mathbb{R}$ tais que $f_n \xrightarrow{u} f$ em A e $f_n \xrightarrow{u} f$ em B. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$ em $A \cup B$.

32. Mostre que as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^2$ convergem uniformemente em $[0,1]$.

33. Verifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ converge pontualmente em $(-1,1]$ para a função descontínua $f:(-1,1]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=1$, se $|x|<1$ e $f(1)=0$.

34. **PERMUTA DOS LIMITES:** A sequência $\{\exp(-n^2x^2)\}$ converge pontualmente (mas não uniformemente em $\mathbb{R}$) para zero. De fato, um cálculo simples nos conduz a:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\lim\limits_{x\to 0}\exp(-n^2x^2)\right]=1$ **(ii)** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{n\to\infty}\exp(-n^2x^2)=0\right]$.

Se uma sequência de funções contínuas $\{f_n : X\to\mathbb{R}\}$ convergir uniformemente, mostre que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a}f_n(x)\right]=\lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right],\quad \forall\, a\in X\cap X'.$$

35. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável, com derivada limitada. Defina $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $g_n(x)=f(x+1/n)$ e mostre que a sequência $\{g_n\}$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

36. Seja $f_n:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f_1(x)=\sqrt{x}$ e $f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)}$.

(a) Mostre por indução que $f_n(x)<(1+x)^2-x$.

(b) Mostre que $\{f_n\}$ converge pontualmente em $[0,+\infty)$ para a função f dada por

$$f(x)=\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4x},\quad \text{se}\quad x>0\\ 0,\quad \text{se}\quad x=0\end{array}\right.$$

37. Em cada caso, investigue a possibilidade de derivar a série termo a termo no domínio indicado.

(a) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\exp(nx)}{3^n}$, $-\infty<x<\ln 3$.

(b) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, $-1\le x\le 1$.

(c) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, $-1<x<1$.