5.1 Funções Integráveis

1. Usando a definição mostre que $\int_a^b \lambda dx = \lambda (b - a)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. Mostre que toda função monótona $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

3. Mostre que os seguintes conjuntos têm medida de Lebesgue nula.

   (a) uUm conjunto finito $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.

   (b) Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ infinito enumerável de números reais.

4. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$, se $x \neq 1$, e $f(1) = 0$. Mostre que f é integrável em $[0, 2]$ e calcule sua integral.

5. Defina a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq 1/2$ e $g(x) = 1$ para $1/2 < x \leq 1$. Mostre que g é integrável e que $\int_0^1 g = 1/2$. Mudando o valor de g no ponto $1/2$ para 5, ela continua integrável?

6. Mostre que a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 0$, para x irracional, e $h(x) = x$, para x racional, não é integrável em $[0, 1]$.

7. Considere a função real $f(x) = x^3$, $0 \leq x \leq 1$, e a partição $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \cdots, (n-1)/n, 1\}$ do intervalo $[0, 1]$. Usando a fórmula
$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = \left[\tfrac{1}{2} m (m+1)\right]^2,$$
calcule $S(f; P_n)$ e $s(f, P_n)$. Mostre que $\int_0^1 x^3 dx = 1/4$.

8. Considere uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 0$, exceto em uma quantidade finita de pontos do intervalo $[a, b]$. Mostre que f é integrável e que $\int_a^b f = 0$.

9. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a seguinte propriedade: para toda função integrável $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, o produto $f \cdot g$ é integrável e $\int_a^b f \cdot g = 0$. Prove que $f \equiv 0$ em $[a, b]$.

10. Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções limitadas mostre que:
$$\underline{\int_a^b} (f + g) \geq \underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g. \tag{5.1}$$
Dê um exemplo onde a desigualdade estrita em (5.1) ocorre. Estabeleça uma desigualdade análoga para a integral superior.

11. Mostre que a função $f(x) = \cos(\pi/x)$, para $x \neq 0$, e $f(0) = 0$ é integrável em $[0,1]$.

12. Suponha que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja uma função limitada e que para qualquer número $c \in (a,b)$ a restrição de f ao intervalo $[c,b]$ é integrável. Mostre que f é integrável em $[a,b]$ e que:
$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f.$$

13. Use o Exercício 12 e prove que toda função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ com apenas um número finito de descontinuidades é integrável em $[a,b]$.

14. Sejam f, g e h funções limitadas em $[a,b]$ com $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Se f e h são integráveis e $\int_a^b f = \int_a^b h$, mostre que g é integrável e que $\int_a^b g = \int_a^b f$.

15. Mostre que a função $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ é integrável em $[-1,1]$, mas não possui primitiva em $[-1,1]$. Se $H(x) = |x|$, então $H'(x) = \operatorname{sgn}(x)$, para $x \neq 0$, e
$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\, dx = H(1) - H(-1).$$

16. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $H(x) = \int_x^b f$. Encontre $H'(x)$.

17. Sejam $I = [a,b]$, $J = [c,d]$ e considere $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $v : J \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $v(J) \subseteq I$. Mostre que a função $G : J \to \mathbb{R}$ definida por:
$$G(x) = \int_a^{v(x)} f$$
é diferenciável em J e $G'(x) = (f \circ v)(x)\, v'(x)$ para todo $x \in J$.

18. Calcule a derivada da função F definida em $[0,1]$ por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos\left(t^2\right) dt$.

19. Mostre que:
$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{1/x}^1 \frac{1}{1+t^2} dt,$$
para qualquer $x > 0$. Interprete geometricamente.

20. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é T-periódica, mostre que a função $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ é constante. Em particular:
$$\int_0^T f(t)\, dt = \int_x^{x+T} f(t)\, dt, \quad \forall\, x.$$

21. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, ímpar e 2-periódica, mostre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, é par, 2-periódica e $g(2n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

22. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

$$\textbf{(a)}\ F(x) = \int_1^x (\ln t)\, dt \quad \textbf{(b)}\ G(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}\, dt \quad \textbf{(c)}\ H(x) = \int_0^{x^2} \exp\left(t^2\right) dt.$$

23. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $h(x) \neq 0$ para qualquer x real, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \int_1^{x^2} th(t)\, dt$, mostre que f tem um extremo local em $x = 0$. Que condição deve satisfazer a função h para que f tenha um mínimo local no ponto $x = 0$.

24. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e monótona crescente. Se $g(x)$ é definida por $g(x) = \int_0^{\sin x} f(t)\, dt$, mostre que $g(x) \leq xf(x)$, para $x \geq 0$. Justifique que é possível aplicar o Teorema de Lagrange à função g em um intervalo conveniente.

25. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, par, positiva e designe $f(x) = \int_0^x th(t)\, dt$.

(a) Determine o domínio de f.

(b) Determine o valor mínimo absoluto de f.

(c) Mostre que f é uma função par.

(d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f \circ f$ no ponto de abscissa $x = 0$.

(e) Se $x \geq 0$, mostre que $f(x) \leq x \int_0^x h(t)\, dt$.

(f) Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\xi_x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x^2 h(\xi_x)$.

(g) Mostre que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $\theta_x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}x\theta_x h(\theta_x)$.

26. CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

(a) Mostre que a integral imprópria $\int_a^b (b-x)^{-\alpha}$ converge se, e somente se, $\alpha < 1$.

(b) Se f é integrável em cada intervalo $[a,t]$, $a < t < b$, b finito, e $f(x) \geq 0$ em $[a,b)$, seja $L(\alpha) = \lim_{x \to b^-} (b-x)^\alpha f(x)$. Se $L(\alpha) < \infty$, para algum $\alpha < 1$, então $\int_a^b f$ é convergente. Se existir algum $\alpha \geq 1$ tal que $L(\alpha) > 0$, mostre que $\int_a^b f$ é divergente.

27. DEFINIÇÃO DE ÂNGULO Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções com derivadas primeiras integráveis em cada intervalo $[a,b]$, $a < b$, e tais que $f^2(t) + g^2(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, e $f(0) = 1$. Seja $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\theta(t) = \int_0^t \left[f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g(x)\right] dx.$$

Comece derivando a função $t \mapsto [f(t) - \cos\theta(t)]^2 + [g(t) - \operatorname{sen}\theta(t)]^2$ e mostre que $f(t) = \cos\theta(t)$ e $g(t) = \operatorname{sen}\theta(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

28. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são tais que $f(x) = g(x)$, $\forall x$, exceto nos racionais de $[a,b]$, mostre que f é integrável se, e somente se, g é integrável.

29. Seja $f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \beta^2 - \alpha^2$, para todo $a < \alpha < \beta < b$, se, e somente se, $f(x) = 2x$.

30. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $0 < \alpha < \beta < 1$, mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n f(x)\,dx = 0$.

31. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e derivável em $(0,1)$. Determine condições para que f satisfaça a: $\int_0^1 f(tx)\,dt = kf(x)$ para todo $x \in (0,1)$.

32. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}dt$. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \left[x^{-2} f(x)\right] = 1/2$.

33. A FUNÇÃO GAMA A *Função Gama* $\Gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é definida por $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$.

   (a) Mostre que, de fato, a integral imprópria converge.

   (b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

   (c) Integrando or partes, deduza que $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-2)$.

   (d) Calcule $\int_0^\infty e^{-x} x^5 dx$.

34. Seja f integrável em $[a,b]$ tal que $m \le f(x) \le M$, para todo $x \in [a,b]$. Mostre que:

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)\,dx \le M.$$

35. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis, mostre que $f \vee g$ e $f \wedge g$ são integráveis em $[a,b]$.

36. REGRA DE LEIBNIZ Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ são deriváveis, mostre que $\varphi : I \to [a,b]$, definida por:

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt$$

é derivável em I e $\varphi'(x) = f(\beta(x))\,\beta'(x) - f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$.

37. Se os coeficientes do polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ satisfazem à relação $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$, mostre que $\int_0^1 |p(x)|\,dx \le \pi/2$.

38. Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, demonstre a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$