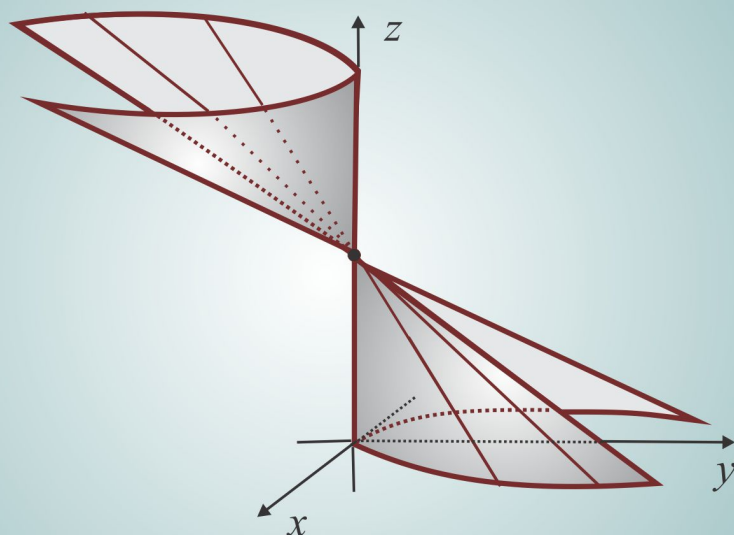


# Vetores e Álgebra Linear

Marivaldo P Matos



# VETORES & ÁLGEBRA LINEAR

Marivaldo P Matos

# Sumário

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Vetores Geométricos</b>                          | <b>1</b> |
| 1.1 Coordenadas Cartesianas                            | 2        |
| 1.1.1 Distância entre dois Pontos                      | 6        |
| 1.2 Vetores Geométricos: conceito e operações          | 8        |
| 1.2.1 Equipolência & Conceito de Vetor                 | 9        |
| 1.2.2 Soma & Produto por Escalar                       | 11       |
| 1.2.3 Dependência Linear                               | 15       |
| Escrevendo para Aprender 1.1                           | 21       |
| 1.3 Vetores em Coordenadas                             | 24       |
| Escrevendo para Aprender 1.2                           | 27       |
| 1.4 Produto Interno                                    | 29       |
| 1.4.1 Propriedades & Consequências do Produto Interno  | 31       |
| 1.5 Produto Vetorial                                   | 32       |
| 1.5.1 Propriedades & Consequências do Produto Vetorial | 35       |
| 1.6 Produto Misto                                      | 36       |
| 1.6.1 Propriedades & Consequências do Produto Misto    | 37       |
| Escrevendo para Aprender 1.3                           | 38       |
| 1.7 Regra de Cramer                                    | 41       |
| Revisando o Conteúdo                                   | 43       |
| Respostas & Sugestões                                  | 46       |
| Escrevendo para Aprender 1.1                           | 46       |
| Escrevendo para Aprender 1.2                           | 50       |
| Escrevendo para Aprender 1.3                           | 51       |
| Questões de Revisão                                    | 54       |

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>2.</b> | <b>Retas &amp; Planos</b>                      | <b>59</b> |
| 2.1       | O plano no Espaço $\mathbb{R}^3$ . . . . .     | 61        |
| 2.1.1     | Equação Normal do Plano . . . . .              | 61        |
| 2.1.2     | Plano determinado por 3 Pontos . . . . .       | 63        |
| 2.1.3     | Posição Relativa entre dois Planos . . . . .   | 65        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.1 . . . . .         | 68        |
| 2.2       | A Reta no Espaço $\mathbb{R}^3$ . . . . .      | 71        |
| 2.2.1     | Posição Relativa Reta $\times$ Plano . . . . . | 73        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.2 . . . . .         | 74        |
| 2.3       | Distâncias . . . . .                           | 77        |
| 2.3.1     | Distância de Ponto a Plano . . . . .           | 77        |
| 2.3.2     | Distância de Ponto a Reta . . . . .            | 79        |
| 2.3.3     | Distância entre duas Retas . . . . .           | 81        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.3 . . . . .         | 84        |
| 2.4       | Interseção de três planos . . . . .            | 86        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.4 . . . . .         | 87        |
|           | Respostas & Sugestões . . . . .                | 88        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.1 . . . . .         | 88        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.2 . . . . .         | 89        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.3 . . . . .         | 91        |
|           | Escrevendo para Aprender 2.4 . . . . .         | 92        |
| <b>3.</b> | <b>As Cônicas</b>                              | <b>93</b> |
| 3.1       | A circunferência . . . . .                     | 95        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.1 . . . . .         | 97        |
| 3.2       | A Elipse . . . . .                             | 99        |
| 3.2.1     | Conceito & Equação Reduzida . . . . .          | 100       |
| 3.2.2     | Gráficos & Elementos Principais . . . . .      | 101       |
| 3.2.3     | Translação da Elipse . . . . .                 | 103       |
|           | Escrevendo para Aprender 3.2 . . . . .         | 104       |
| 3.3       | A Hipérbole . . . . .                          | 106       |
| 3.3.1     | Conceito & Equação Reduzida . . . . .          | 107       |
| 3.3.2     | Gráficos & Elementos Principais . . . . .      | 108       |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 3.3.3     | Hipérbole Equilátera . . . . .                       | 112        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.3 . . . . .               | 118        |
| 3.4       | A Parábola . . . . .                                 | 119        |
| 3.4.1     | O Foco e a Diretriz da Parábola . . . . .            | 121        |
| 3.4.2     | Translação da Parábola . . . . .                     | 123        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.4 . . . . .               | 125        |
| 3.5       | Equação Geral do 2º Grau em Duas Variáveis . . . . . | 126        |
| 3.5.1     | Translação de Eixos . . . . .                        | 127        |
| 3.5.2     | Rotação de Eixos . . . . .                           | 129        |
| 3.5.3     | O ângulo de rotação . . . . .                        | 130        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.5 . . . . .               | 131        |
| 3.6       | O Foco e a Diretriz de uma Cônica . . . . .          | 132        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.6 . . . . .               | 133        |
|           | Respostas & Sugestões . . . . .                      | 133        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.1 . . . . .               | 133        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.2 . . . . .               | 134        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.3 . . . . .               | 135        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.4 . . . . .               | 136        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.5 . . . . .               | 137        |
|           | Escrevendo para Aprender 3.6 . . . . .               | 137        |
| <b>4.</b> | <b>Superfícies &amp; Quádricas</b> . . . . .         | <b>139</b> |
| 4.1       | Superfície Cilíndrica . . . . .                      | 141        |
|           | Escrevendo para Aprender 4.1 . . . . .               | 143        |
| 4.2       | Superfície Cônica . . . . .                          | 144        |
| 4.2.1     | Cone de Revolução . . . . .                          | 145        |
|           | Escrevendo para Aprender 4.2 . . . . .               | 145        |
| 4.3       | Superfície de Revolução . . . . .                    | 146        |
| 4.3.1     | Geratriz na Forma Explícita . . . . .                | 146        |
| 4.3.2     | Quádricas de Revolução . . . . .                     | 149        |
|           | Escrevendo para Aprender 4.3 . . . . .               | 152        |
| 4.4       | Equações & Gráficos . . . . .                        | 154        |
|           | O Elipsoide . . . . .                                | 156        |

|  |            |
|--|------------|
| O Hiperboloide de uma Folha . . . . .                      | 158        |
| O Hiperboloide de duas Folha . . . . .                     | 159        |
| O Cone Quádrico . . . . .                                  | 160        |
| O Paraboloides Eíptico . . . . .                           | 163        |
| O Paraboloides Hiperbólico . . . . .                       | 164        |
| Escrevendo para Aprender 4.4 . . . . .                     | 168        |
| Respostas & Sugestões . . . . .                            | 169        |
| Escrevendo para Aprender 4.1 . . . . .                     | 169        |
| Escrevendo para Aprender 4.2 . . . . .                     | 169        |
| Escrevendo para Aprender 4.3 . . . . .                     | 169        |
| Escrevendo para Aprender 4.4 . . . . .                     | 171        |
| <b>5. Espaços Vetoriais</b>                                | <b>173</b> |
| 5.0.1 Corpos Numéricos . . . . .                           | 174        |
| Escrevendo para Aprender 5.0 . . . . .                     | 174        |
| 5.1 Construindo Espaços Vetoriais . . . . .                | 175        |
| Escrevendo para Aprender 5.1 . . . . .                     | 179        |
| 5.2 O Espaço Vetorial $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . . | 180        |
| 5.2.1 Outras Operações com Matrizes . . . . .              | 181        |
| 5.2.2 Resolvendo Sistemas Lineares . . . . .               | 185        |
| Escrevendo para Aprender 5.2 . . . . .                     | 187        |
| 5.3 Subespaços Vetoriais . . . . .                         | 189        |
| Escrevendo para Aprender 5.3 . . . . .                     | 191        |
| 5.3.1 Conjunto Gerador de um Subespaço . . . . .           | 192        |
| Escrevendo para Aprender 5.4 . . . . .                     | 195        |
| 5.3.2 Soma Direta . . . . .                                | 196        |
| Escrevendo para Aprender 5.5 . . . . .                     | 197        |
| 5.4 Base & Dimensão . . . . .                              | 199        |
| Escrevendo para Aprender 5.6 . . . . .                     | 209        |
| 5.4.1 Mudança de Base . . . . .                            | 213        |
| Escrevendo para Aprender 5.7 . . . . .                     | 216        |
| 5.4.2 Extraindo uma Base do Conjunto Gerador . . . . .     | 219        |
| Revisando o Conteúdo . . . . .                             | 220        |

|  |            |
|--|------------|
| Respostas & Sugestões . . . . .                                  | 222        |
| Escrevendo para Aprender 5.0 . . . . .                           | 222        |
| Escrevendo para Aprender 5.1 . . . . .                           | 223        |
| Escrevendo para Aprender 5.2 . . . . .                           | 223        |
| Escrevendo para Aprender 5.3 . . . . .                           | 226        |
| Escrevendo para Aprender 5.4 . . . . .                           | 227        |
| Escrevendo para Aprender 5.5 . . . . .                           | 229        |
| Escrevendo para Aprender 5.6 . . . . .                           | 231        |
| Escrevendo para Aprender 5.7 . . . . .                           | 240        |
| Escrevendo para Aprender 5.8 . . . . .                           | 242        |
| <b>6. Aplicações Lineares . . . . .</b>                          | <b>245</b> |
| Introdução . . . . .   | 245        |
| Escrevendo para Aprender 6.0 . . . . .                           | 247        |
| 6.1 Transformações Elementares do Plano $\mathbb{R}^2$ . . . . . | 248        |
| 6.2 Operações com Aplicações Lineares . . . . .                  | 250        |
| Escrevendo para Aprender 6.1 . . . . .                           | 252        |
| 6.3 Núcleo, Imagem & Isomorfismo . . . . .                       | 253        |
| 6.3.1 Conceito & Ações de um Isomorfismo . . . . .               | 258        |
| Escrevendo para Aprender 6.2 . . . . .                           | 264        |
| 6.4 Representação Matricial . . . . .                            | 266        |
| 6.4.1 Matriz da Aplicação Composta . . . . .                     | 268        |
| Escrevendo para Aprender 6.3 . . . . .                           | 270        |
| 6.5 Autovalor, Autovetor & Autoespaço . . . . .                  | 274        |
| 6.5.1 O Polinômio Característico . . . . .                       | 276        |
| Escrevendo para Aprender 6.4 . . . . .                           | 278        |
| 6.6 Operadores Diagonalizáveis . . . . .                         | 279        |
| Escrevendo para Aprender 6.5 . . . . .                           | 280        |
| Revisando o Conteúdo . . . . .                                   | 281        |
| Respostas & Sugestões . . . . .                                  | 282        |
| Escrevendo para Aprender 6.0 . . . . .                           | 282        |
| Escrevendo para Aprender 6.1 . . . . .                           | 283        |
| Escrevendo para Aprender 6.2 . . . . .                           | 284        |

|   |            |
|---|------------|
| Escrevendo para Aprender 6.3 . . . . .                | 286        |
| Escrevendo para Aprender 6.4 . . . . .                | 291        |
| Escrevendo para Aprender 6.5 . . . . .                | 295        |
| Revisando o Conteúdo . . . . .                        | 295        |
| <b>7. Espaços com Produto Interno</b>                 | <b>299</b> |
| Introdução . . . . .                                  | 299        |
| 7.1 Preliminares . . . . .                            | 300        |
| 7.1.1 Identidades & Desigualdades . . . . .           | 303        |
| 7.1.2 Explorando as Desigualdades . . . . .           | 304        |
| Escrevendo para Aprender 7.1 . . . . .                | 305        |
| 7.2 Ortogonalização . . . . .                         | 307        |
| Escrevendo para Aprender 7.2 . . . . .                | 310        |
| 7.3 Complementar Ortogonal . . . . .                  | 311        |
| 7.3.1 Projeção Ortogonal sobre um Subespaço . . . . . | 312        |
| Escrevendo para Aprender 7.3 . . . . .                | 314        |
| Revisando o Conteúdo . . . . .                        | 315        |
| Respostas & Sugestões . . . . .                       | 316        |
| Escrevendo para Aprender 7.1 . . . . .                | 316        |
| Escrevendo para Aprender 7.2 . . . . .                | 318        |
| Escrevendo para Aprender 7.3 . . . . .                | 321        |
| Escrevendo para Aprender 7.4 . . . . .                | 323        |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                     | <b>327</b> |





## Introdução

Os conceitos de *ponto*, *reta* e *plano* são primitivos e as relações entre esses conceitos são estabelecidos por meio de *axiomas*<sup>1</sup> de geometria elementar. Os pontos serão anotados por  $A, B, P, Q, \dots$  etc, enquanto as retas por  $r, s, l, \dots$  etc. Já os planos serão representados pelas letras  $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \dots$  etc, do alfabeto grego.

**Axioma 1.0.1** *Três pontos  $A, B$  e  $C$ , não colineares, ou não alinhados, determinam um único plano  $\alpha$ . Veja a Figura 1.1.*

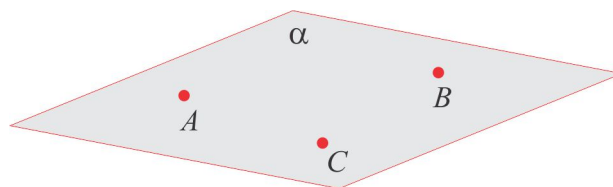


Figura 1.1: Plano definido por 3 pontos.

**Axioma 1.0.2** *Se dois pontos de uma mesma reta  $r$  estão em um plano  $\alpha$ , então a reta  $r$  está inteiramente contida no plano  $\alpha$ , como ilustra a Figura 1.2.*

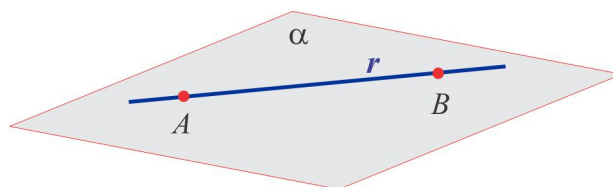
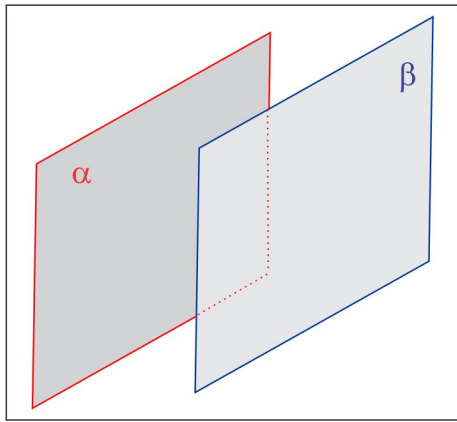
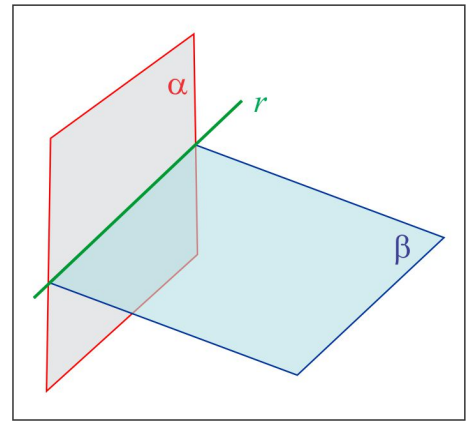


Figura 1.2: Reta  $r$  contida no plano  $\alpha$ .

**Axioma 1.0.3** *Dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  ou não se interceptam, neste caso eles são paralelos e anotamos  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ , ou têm uma reta  $r$  em comum e anotamos  $\alpha \cap \beta = r$ . Veja as Figuras 1.3 e 1.4.*

<sup>1</sup>Por *axioma* entendemos uma afirmação verdadeira, desprovida de demonstração.

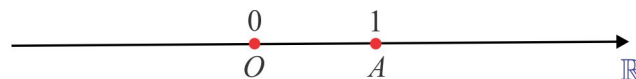
Figura 1.3:  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ Figura 1.4:  $\alpha \cap \beta = r$ 

No Capítulo 2 descreveremos de forma analítica, isto é, por meio de equações, o plano  $\alpha$  referido no Axioma 1.0.1 e a reta  $r$  referida no Axioma 1.0.2. Também será objeto de estudo a posição relativa entre dois e três planos.

## 1.1 Coordenadas Cartesianas

Para motivar a apresentação das coordenadas cartesianas em três configurações distintas, vamos identificar o *Lugar Geométrico*<sup>2</sup> descrito pela equação:  $x = 1$ . Devemos ter em mente que um ponto é caracterizado por sua(s) coordenada(s), de acordo com a configuração na qual ele está inserido.

■ **SITUAÇÃO 1** No eixo real  $\mathbb{R}$  (espaço unidimensional) os números representam pontos desse eixo e a equação  $x = 1$  representa o ponto à direita e distante uma unidade da origem, como na Figura 1.5.

Figura 1.5: O Eixo real  $\mathbb{R}$ .

■ **SITUAÇÃO 2** No plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , ou plano  $xy$  (espaço bidimensional) um ponto  $P$  é caracterizado por um par ordenado  $(x, y)$  de números reais, denominados *coordenadas cartesianas* do ponto  $P$ .

<sup>2</sup>Lugar Geométrico é um conjunto de pontos que atendem a uma equação.

O plano  $\mathbb{R}^2$  é representado graficamente por um par de eixos orientados e mutuamente perpendiculares, denominados eixo  $Ox$  e eixo  $Oy$ . Normalmente, representa-se o eixo  $Ox$  (eixo das *abscissas*) na posição horizontal e o eixo  $Oy$  (eixo das *ordenadas*) na vertical, como ilustra a Figura 1.6.  $P(x, y)$

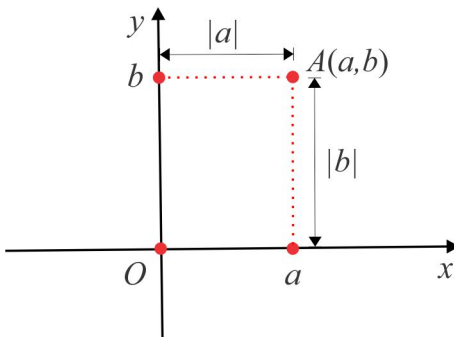


Figura 1.6: O plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

A abscissa  $x$  de um ponto representa, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo  $Oy$ , enquanto a ordenada  $y$  representa, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo  $Ox$ . Dito isso, os pontos do eixo  $Ox$  são da forma  $(x, 0)$  e os do eixo  $Oy$  da forma  $(0, y)$ . Em  $\mathbb{R}^2$  uma equação do tipo  $ax + by + c = 0$ , do primeiro grau nas variáveis  $x$  e  $y$ , representa graficamente uma reta  $r$ , como na Figura 1.7; no caso em que  $a \neq 0$  e  $b = 0$  trata-se de uma reta vertical pelo ponto  $A(-c/a, 0)$ . Assim, a equação  $x = 1$  representa a reta vertical  $s$  pelo ponto  $A(1, 0)$ , como ilustra a Figura 1.8.

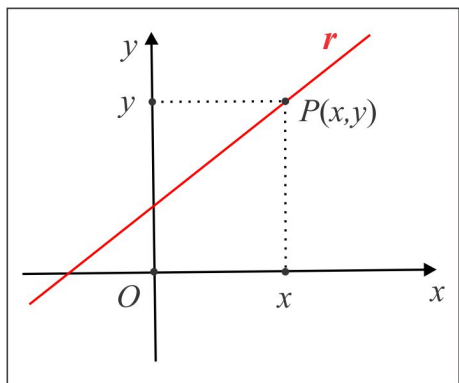


Figura 1.7: Reta  $r : ax + by + c = 0$

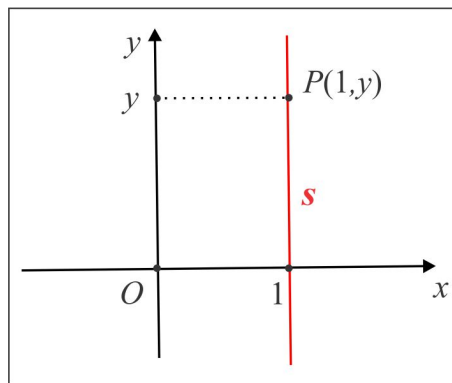


Figura 1.8: Reta  $s : x = 1$

PONTOS SIMÉTRICOS NO  $\mathbb{R}^2$  No traçado do gráfico de uma curva do plano  $xy$  é importante observarmos a simetria da curva em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , a partir da equação que descreve a

curva. Por exemplo, a equação  $y = x^2$ , que descreve uma parábola, permanece inalterada ao trocarmos  $x$  por  $-x$  e isto indica que a curva é simétrica em relação ao eixo  $Oy$ . A Figura 1.9 ilustra os pontos  $B(-x, y)$ ,  $D(x, -y)$  e  $C(-x, -y)$  simétricos de um dado ponto  $A(x, y)$  em relação ao eixo  $Oy$ , ao eixo  $Ox$  e à origem, respectivamente.

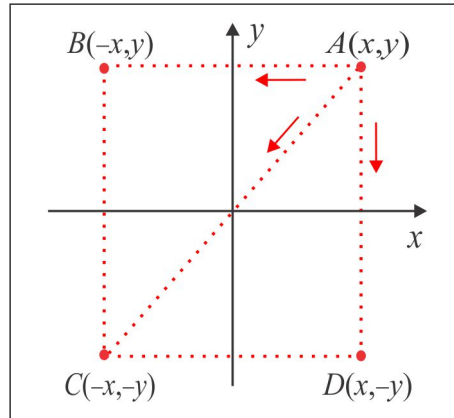


Figura 1.9: Pontos Simétricos.

■ **SITUAÇÃO 3** No espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (produto cartesiano de três cópias de  $\mathbb{R}$ ), cuja configuração geométrica corresponde a três eixos mutuamente perpendiculares, os pontos são caracterizados por três coordenadas cartesianas: a abscissa  $x$ , a ordenada  $y$  e a cota  $z$ , e representados por  $P(x, y, z)$ . Essas coordenadas medem, em valor absoluto, as distâncias do ponto  $P$  aos planos coordenados:  $|x|$  é a distância do ponto  $P$  ao plano  $yz$ ;  $|y|$  é a distância do ponto  $P$  ao plano  $xz$  e  $|z|$  é a distância do ponto  $P$  ao plano  $xy$ .

No espaço  $\mathbb{R}^3$ , além dos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , destacamos três planos coordenados: o plano  $xy$ , cujos pontos têm cota  $z = 0$ ; o plano  $xz$ , cujos pontos têm ordenada  $y = 0$ ; o plano  $yz$ , constituídos dos pontos com abscissa  $x = 0$ . Na Figura 1.10 ilustramos a porção do espaço  $\mathbb{R}^3$  constituída dos pontos  $P(x, y, z)$  em que  $x, y$  e  $z$  são não negativos. Esta porção recebe o nome de 1º Octante. Existem oito octantes definidos de acordo com os sinais de  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Identifique-os! É oportuno ressaltar que o eixo  $Ox$  é a reta interseção do plano  $xy$  com o plano  $xz$ ; o eixo  $Oy$  é a reta interseção do plano  $xy$  com o plano  $yz$  e o eixo  $Oz$  é a reta interseção do plano  $xz$  com o plano  $yz$ .

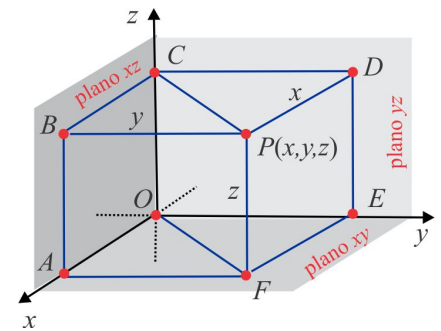


Figura 1.10: O Espaço  $\mathbb{R}^3$

A tabela abaixo mostra as particularidades dos pontos do  $\mathbb{R}^3$  situados em algum eixo ou plano

coordenado.

| Eixo $Ox$    | Eixo $Oy$    | Eixo $Oz$    | Plano $xy$   | Plano $xz$   | Plano $yz$   |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $A(x, 0, 0)$ | $B(0, y, 0)$ | $C(0, 0, z)$ | $D(x, y, 0)$ | $E(x, 0, z)$ | $F(0, y, z)$ |

sendo  $x, y$  e  $z$  números reais arbitrários.

Para localizar o ponto  $P(x, y, z)$  no espaço, procedemos da seguinte forma:

- (i) Marcamos nos respectivos eixos os valores das coordenadas  $x, y$  e  $z$  do ponto  $P$  e identificamos os pontos  $A(x, 0, 0)$ ,  $B(0, y, 0)$  e  $C(0, 0, z)$ .
- (ii) Pelo ponto  $A$  traçamos uma paralela ao eixo  $Oy$  e pelo ponto  $B$  uma paralela ao eixo  $Ox$ . Essas paralelas encontram-se no ponto  $D(x, y, 0)$  do plano  $xy$ .
- (iii) Pelo ponto  $D$  traçamos uma paralela ao eixo  $Oz$  e pelo ponto  $C$  uma paralela ao segmento  $OD$ . Essa paralelas encontram-se no ponto  $P(x, y, z)$ .

**EXEMPLO 1.1.1** Localizar os pontos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$ ,  $D(1, 1, 0)$  e  $E(1, 1, 1)$ .

**Solução** Inicialmente, observamos que os pontos  $A, B$  e  $C$  estão situados sobre os eixos  $Ox, Oy$  e  $Oz$ , respectivamente, e o ponto  $D$  está situado sobre o plano  $xy$ , fora dos eixos. O ponto  $E$  possui as três coordenadas não nulas e isso indica que o ponto encontra-se fora dos planos coordenados, como ilustra a Figura 1.17.

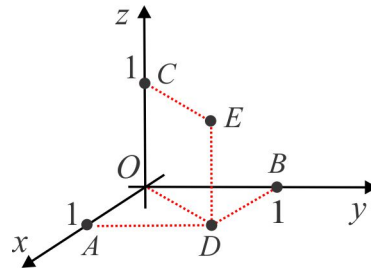
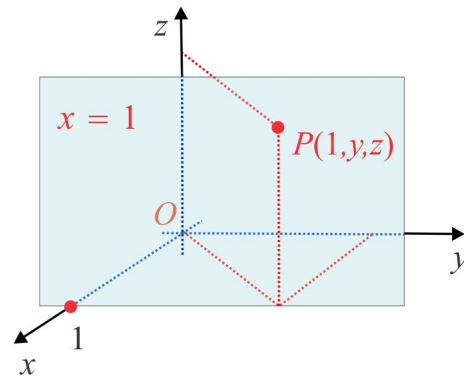


Figura 1.11: Exemplo 1.1.1

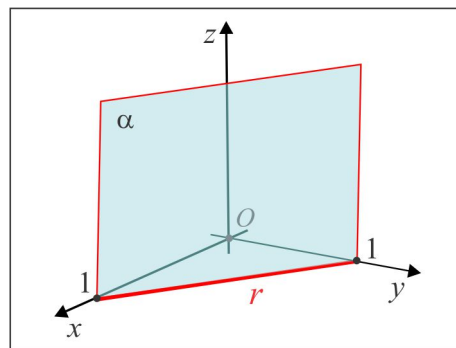
A equação  $x = 1$  descreve, agora no espaço  $\mathbb{R}^3$ , o conjunto dos pontos  $P(x, y, z)$  distantes uma unidade do plano  $yz$ . Esse conjunto de pontos, ilustrado na Figura 1.18, é o plano paralelo ao plano  $yz$ , constituído dos pontos  $P(1, y, z)$ , com  $y$  e  $z$  números reais arbitrários.

Figura 1.12: O plano  $x = 1$ .

**EXEMPLO 1.1.2** Como veremos adiante, um plano será descrito em coordenadas cartesianas por uma equação do primeiro grau nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , sob a forma:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (1.1)$$

sendo  $a, b, c$  e  $d$  números reais arbitrários. Por exemplo, a equação  $x + y = 1$  representa, no espaço  $\mathbb{R}^3$ , um plano  $\alpha$  e este não passa pela origem, porque a equação não é satisfeita para  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . A Figura 2.1 ilustra o plano  $\alpha$ , onde destacamos a reta  $r$ , interseção desse plano com o plano  $xy$ .

Figura 1.13: O plano  $\alpha : x + y = 1$ .

### 1.1.1 Distância entre dois Pontos

A fórmula da distância entre dois pontos  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$  do  $\mathbb{R}^3$  é estabelecida a partir do Teorema de Pitágoras. Vejamos as fórmulas nas três configurações.

- (i) **NO EIXO REAL  $\mathbb{R}$ :** Na Figura 1.14, ilustramos dois pontos  $A$  e  $B$  do eixo real  $\mathbb{R}$ , identificados com os números  $x_A$  e  $x_B$ , respectivamente. A distância entre os pontos  $A$  e  $B$  é dada por

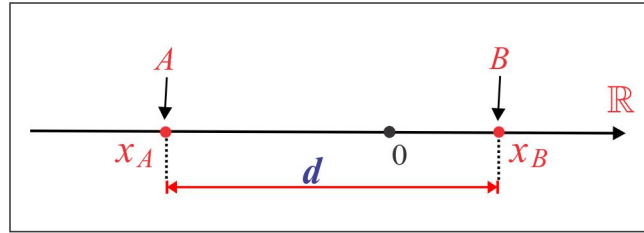


Figura 1.14: Distância em  $\mathbb{R}$ .

$$\text{dist}(A; B) = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}. \quad (1.2)$$

- (ii) **NO PLANO  $\mathbb{R}^2$ :** Em dimensão  $n = 2$  (no plano cartesiano  $xy$ ), consideremos dois pontos  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$ , como ilustrado na Figura ???. Vemos que  $AC = |x_B - x_A|$  e  $BC = |y_B - y_A|$  e do Teorema de Pitágoras segue a seguinte fórmula da distância entre os pontos  $A$  e  $B$  :

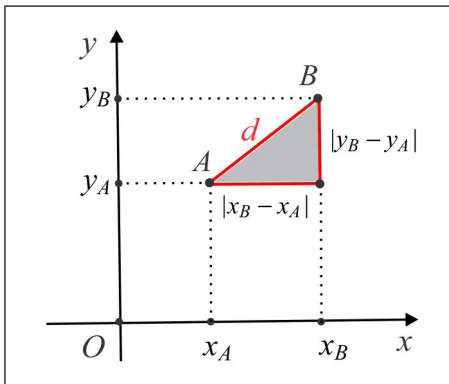
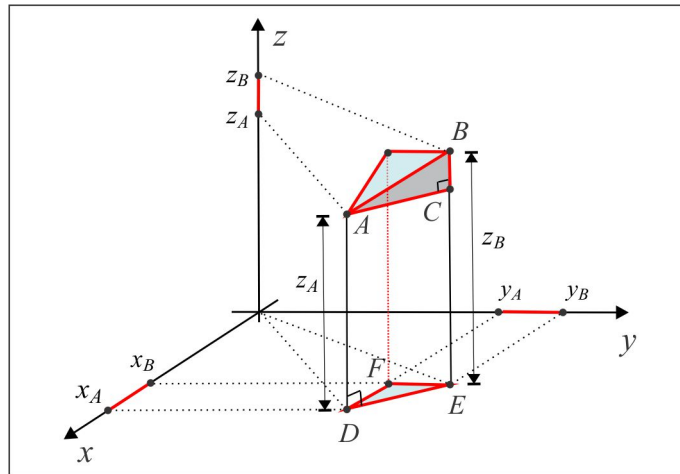


Figura 1.15: Distância em  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{dist}(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (1.3)$$

- (iii) **NO ESPAÇO  $\mathbb{R}^3$ :** No espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , consideremos os pontos  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$ , como ilustrado na Figura 1.16, onde vemos os triângulos retângulos  $ABC$  e  $DEF$  em que:  $EF = |y_B - y_A|$ ,  $DF = |x_B - x_A|$  e  $BC = |z_B - z_A|$ . Do Teorema de Pitágoras, resulta:

$$|DE|^2 = |DF|^2 + |EF|^2 \quad \text{e} \quad |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

Figura 1.16: Distância em  $\mathbb{R}^3$ .

e por substituição direta, encontramos:

$$\text{dist}(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (1.4)$$

**EXEMPLO 1.1.3** Calcular a distância entre os pontos  $A(1, -2, 3)$  e  $B(0, 2, -1)$ .

**Solução:** O cálculo é feito por aplicação direta da fórmula da distância (1.4). Temos:

$$\text{dist}(A; B) = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{33} \simeq 5.74.$$

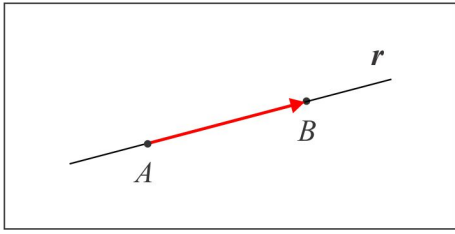
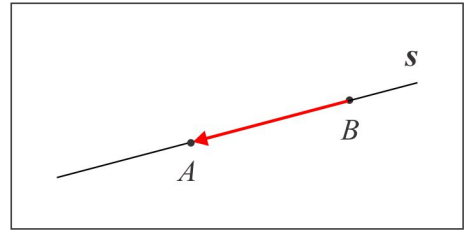
## 1.2 Vetores Geométricos: conceito e operações

Sobre uma reta  $r$  consideremos dois pontos  $A$  e  $B$ . O segmento orientado com origem  $A$  e extremidade  $B$  é indicado por  $AB$ , nessa ordem. No caso em que  $A = B$ , o segmento orientado reduz-se a um ponto (torna-se nulo) e será indicado por  $AA$  ou  $BB$ . Um segmento orientado  $AB$  possui três características fundamentais:

- ▶ **COMPRIMENTO:** a distância do ponto  $A$  ao ponto  $B$  (comprimento do segmento  $AB$ ).
- ▶ **DIREÇÃO:** a reta suporte  $r$ .
- ▶ **SENTIDO:** orientação de  $A$  (origem) para  $B$  (extremidade).

Neste contexto, é oportuno ressaltar que os segmentos orientados  $AB$  e  $BA$  são distintos, no caso em



Figura 1.17: Segmento Orientado  $AB$ .Figura 1.18: Segmento Orientado  $BA$ .

que  $A \neq B$ . Embora eles tenham mesmo comprimento e mesma direção, eles têm sentidos opostos.

### 1.2.1 Equipolência & Conceito de Vetor

Dois segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são ditos *Equipolentes* quando possuírem mesmo comprimento, mesmo sentido e retas suportes paralelas ou coincidentes. Em outras palavras, quando ocorrer uma das situações abaixo:

- ▶ **SITUAÇÃO 1:**  $A = C$  e  $B = D$ . Neste caso eles coincidem.
- ▶ **SITUAÇÃO 2:**  $AB$  e  $CD$  são distintos, mas, têm mesmo comprimento, mesmo sentido e direções (retas suportes) paralelas ou coincidentes. Neste caso, os segmentos orientados ou são colineares ou o quadrilátero de vértices  $A, B, C$  e  $D$  é um paralelogramo.

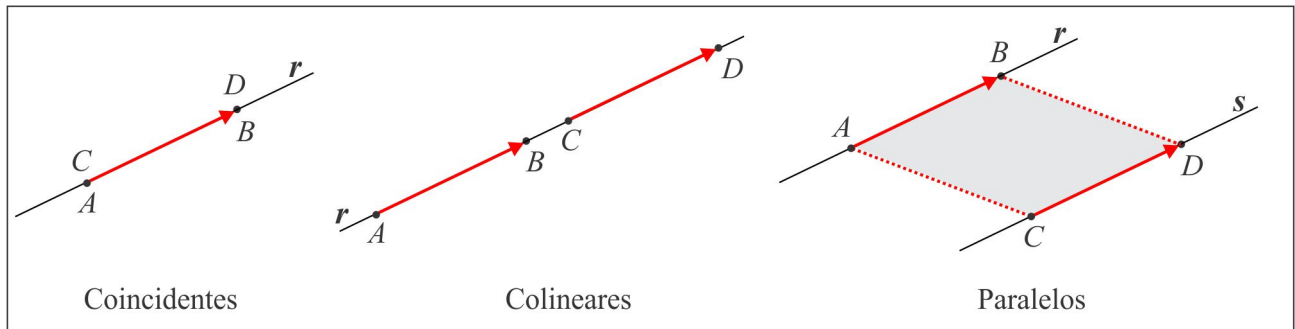


Figura 1.19: Segmentos Orientados Equipolentes.

**OBSERVAÇÃO 1.2.1** Anota-se  $AB \sim CD$  para indicar que os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes. Assim,  $AA \sim BB$  (dois pontos, vistos como segmentos orientados, são equipolentes) e a relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

- (i) **Reflexiva:**  $AB \sim AB$ . (todo segmento orientado é equipolente a si mesmo)

(ii) **Simétrica:**  $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$ .

(iii) **Transitiva:**  $AB \sim CD$  e  $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$ .

A noção de segmentos orientados equipolentes além de servir de base para o conceito de vetor, dará consistência às operações algébricas entre vetores.

Dado um segmento orientado  $AB$ , qualquer outro segmento orientado equipolente a  $AB$  terá mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido de  $AB$  e a única diferença possível entre eles é a posição que eles ocupam no espaço. Apesar dessa diferença, mantendo-se comprimento, direção e sentido, qualquer um deles pode ser transportado de modo a coincidir com o segmento orientado  $AB$ . É natural pensar em segmentos orientados equipolentes como representantes de um mesmo objeto matemático, aqui denominado *Vetor* representado ou determinado pelo segmento orientado  $AB$ . O vetor determinado pelo segmento orientado  $AB$  é normalmente indicado por  $\overrightarrow{AB}$ ; também se usa  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , ... etc. para representar vetores. Um ponto do espaço, visto como segmento orientado, representa o vetor nulo, indicado por  $\vec{0}$  ou  $\overrightarrow{AA}$ ,  $\overrightarrow{BB}$ ,  $\overrightarrow{CC}$ , ... etc.. Assim:

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \overrightarrow{BB} = \vec{0}, \overrightarrow{CC} = \vec{0}, \dots \text{etc.}$$

A Figura 1.20 exibe quatro segmentos orientados equipolentes, com origens em pontos distintos, representando o mesmo vetor  $\vec{v}$ .

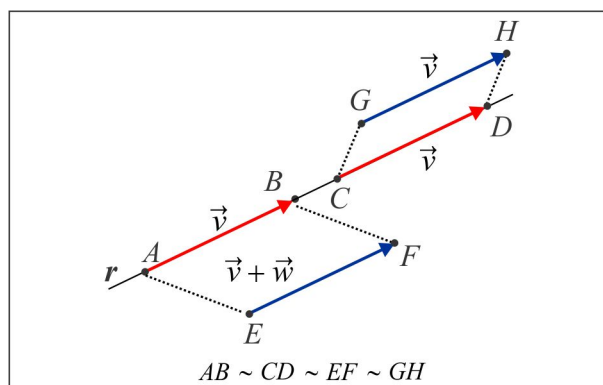


Figura 1.20:  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$ .

**DEFINIÇÃO 1.2.2** O Vetor determinado pelo segmento orientado  $AB$  é, por definição, a coleção de todos segmentos orientados do espaço, equipolentes a  $AB$ .

**CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO:** A partir da definição de vetor, decorrem os seguintes fatos:

(i) Dois segmentos orientados equipolentes representam o mesmo vetor. Em símbolos, temos:

$$AB \sim CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

(ii) Outro fato interessante diz respeito ao caráter "flutuante" do vetor. Dados um segmento orientado  $AB$  e um ponto  $P$  do espaço, existe um único segmento orientado  $PQ$ , com origem em  $P$ , equipolente a  $AB$ . O ponto  $Q$  é determinado de modo que o quadrilátero  $ABQP$  seja um paralelogramo, como ilustra a Figura 1.21.

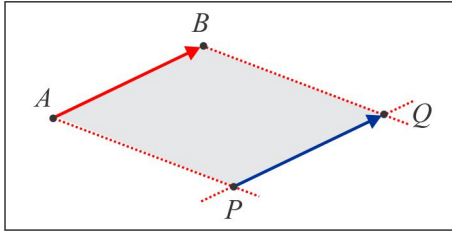


Figura 1.21:  $AB \sim PQ$  e  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ .

Esse caráter flutuante estabelece que um dado vetor  $\vec{a}$  tem exatamente um representante com origem em cada ponto do espaço.

### 1.2.2 Soma & Produto por Escalar

O termo escalar será usado como sinônimo de número real e a soma de vetores é motivada pela soma de forças em mecânica, por meio da construção do paralelogramo, como ilustrado na Figura 1.22. As grandezas que serão abordadas a partir de agora são de duas naturezas: vetorial e escalar.

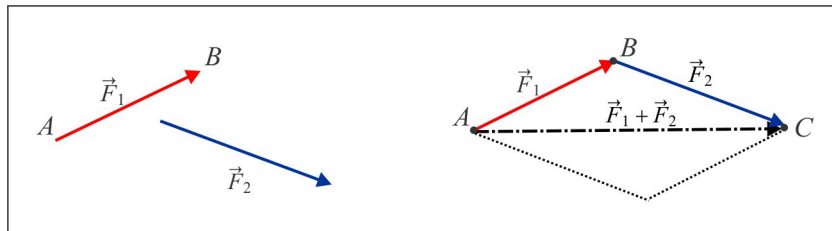


Figura 1.22: Soma de Forças em Mecânica.

► SOMA DE VETORES:

Do ponto de vista algébrico, a soma de vetores é feita usando representantes. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  dois vetores e fixemos um representante  $AB$  do vetor  $\vec{u}$ . Com origem no ponto  $B$ , extremidade do vetor  $\vec{u}$ , consideremos um representante  $BC$  do vetor  $\vec{v}$ . A soma do vetor  $\vec{u}$  com o vetor  $\vec{v}$  é o vetor  $\vec{u} + \vec{v}$ , com representante  $AC$ .

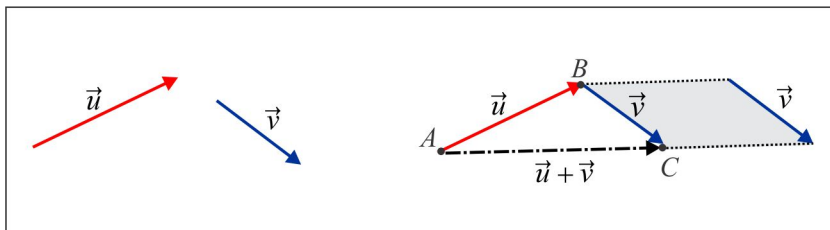


Figura 1.23: Soma de Vetores Geométricos

Usando representantes, temos a regra prática para a soma de vetores:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

que será muito utilizada na resolução de problemas geométricos.

PROPRIEDADES DA SOMA: A operação soma para vetores goza das mesmas propriedades dos números reais e as comprovações podem ser estabelecidas de forma geométrica.

(1) **Comutativa:**  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A Figura 1.24 ilustra a comprovação geométrica

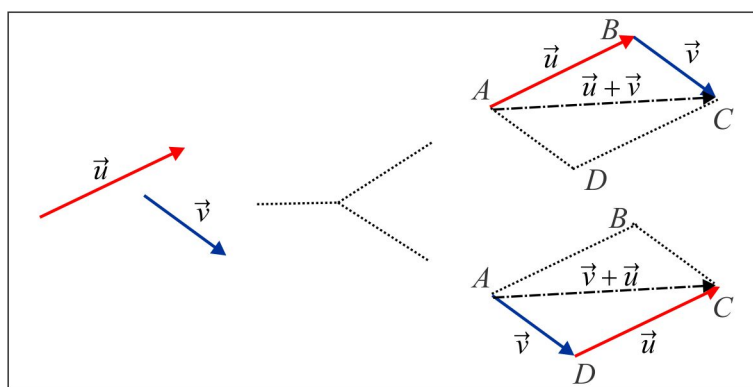


Figura 1.24: Propriedade Comutativa.

e usando os representantes, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

(2) **Associativa:**  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A comprovação geométrica está ilustrada na Figura 1.25

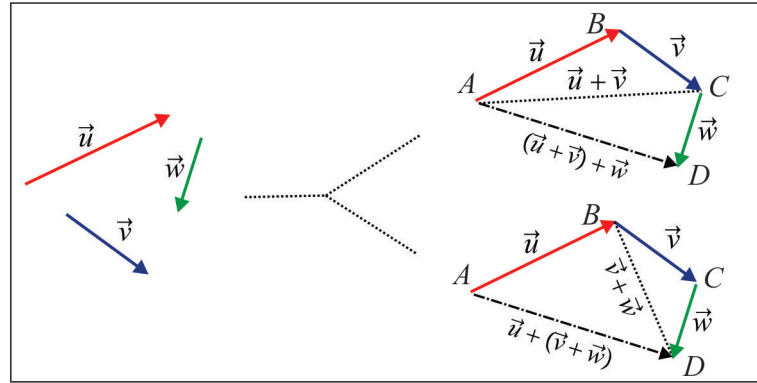


Figura 1.25: Propriedade Associativa

e usando os representantes, temos:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \quad \text{e}$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

(3) **Existência do Elemento Neutro:**  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Considerando  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$ , obtemos:

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

(4) **Existência do Simétrico:**  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Dado um vetor  $\vec{u}$  com representante  $AB$ , o simétrico do vetor  $\vec{u}$  é o vetor indicado por  $-\vec{u}$ , com representante  $BA$ . Os vetores  $\vec{u}$  e  $-\vec{u}$  têm mesmo comprimento, mesma direção e sentidos opostos, como indica a Figura 1.26 ao lado. Temos  $-\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$  e, sendo assim:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

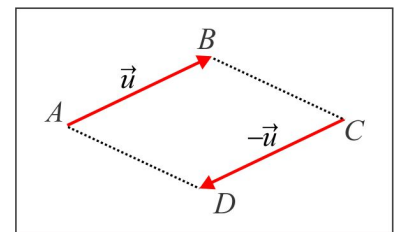


Figura 1.26: O Simétrico  $-\vec{u}$ .

**EXEMPLO 1.2.3** Observando a Figura 1.27, vemos que  $\vec{OA} = \vec{BD}$ ,  $\vec{OB} = \vec{AD}$  e  $\vec{OC} = -\vec{ED}$

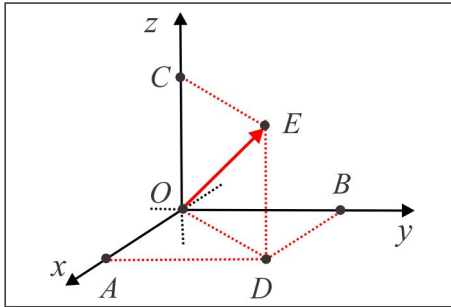


Figura 1.27: Exemplo 1.2.3.

e para expressar o vetor  $\vec{OE}$  em função dos vetores  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$ , basta notar que:

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

► PRODUTO POR ESCALAR:

Fixemos um vetor  $\vec{u}$ , com representante  $AB$  e um escalar (número real)  $x$ . O produto do escalar  $x$  pelo vetor  $\vec{u}$  é o vetor indicado por  $x \cdot \vec{u}$  e com representante  $AC$ , colinear com  $AB$ , caracterizado por:

(i) Se  $x = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$ , então  $x \cdot \vec{u} = \vec{0}$ , isto é,  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$  e  $x \cdot \vec{0} = \vec{0}$ .

(ii) Se  $x > 0$ , então  $AB$  e  $AC$  têm mesmo sentido (os pontos  $B$  e  $C$  estão de um mesmo lado do ponto  $A$ ).

(iii) Se  $x < 0$ , então  $AB$  e  $AC$  têm sentidos opostos (o ponto  $A$  está entre os pontos  $B$  e  $C$ ).

(iv)  $|AC| = |x| \cdot |AB|$  (o comprimento de  $AC$  é igual a módulo de  $x$  vezes o comprimento de  $AB$ ).

É claro que  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$  e  $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ . Além disso, se  $x \neq 0$  e  $x \neq \pm 1$ , há quatro casos a considerar:

$$x > 1, \quad 0 < x < 1, \quad x < -1 \quad \text{e} \quad -1 < x < 0$$

ilustrados graficamente na Figura 1.28, lembrando que  $\vec{u} = \vec{AB}$  e  $x\vec{u} = \vec{AC}$ .

PROPRIEDADES DO PRODUTO POR ESCALAR: O produto por escalar goza das seguintes propriedades:

(1) **Associativa:**  $(xy) \cdot \vec{u} = x(y \cdot \vec{u})$

(2) **Distributiva:**  $(x + y) \cdot \vec{u} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{u}$

(3) **Distributiva:**  $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}$

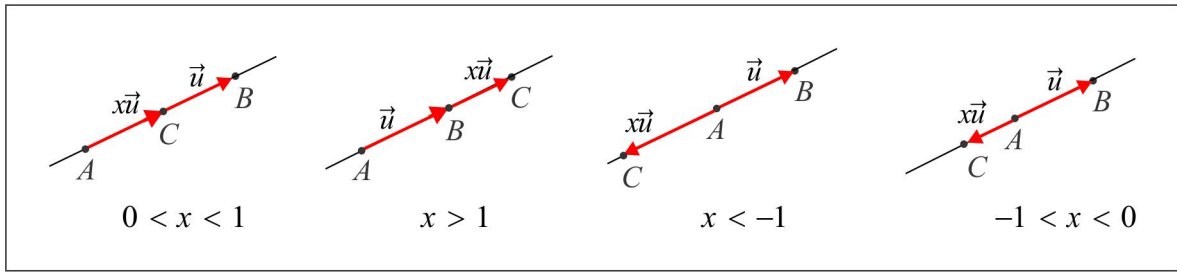


Figura 1.28: Produto por Escalar.

**EXEMPLO 1.2.4** No triângulo da Figura 1.29,  $D$  é o ponto médio do segmento  $AB$ . Vamos expressar o vetor  $\overrightarrow{CD}$  em função de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CB}$ .

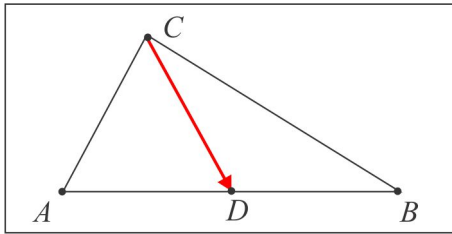


Figura 1.29: Exemplo 1.2.4.

**Solução:** Observando a figura, vemos que:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

e considerando que  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ , obtemos:

$$\boxed{\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.}$$

### 1.2.3 Dependência Linear

Para motivar os conceitos referentes à dependência linear entre vetores, deixe-nos considerar algumas situações geométricas em dois casos distintos.

**1º CASO - DOIS VETORES** A Figura 1.30 ilustra dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , com representantes: (a) colineares, (b) paralelos e (c) não paralelos nem colineares.

Nos casos equivalentes (a) e (b) os dois vetores são ditos LD (*Linearmente Dependentes*), porque

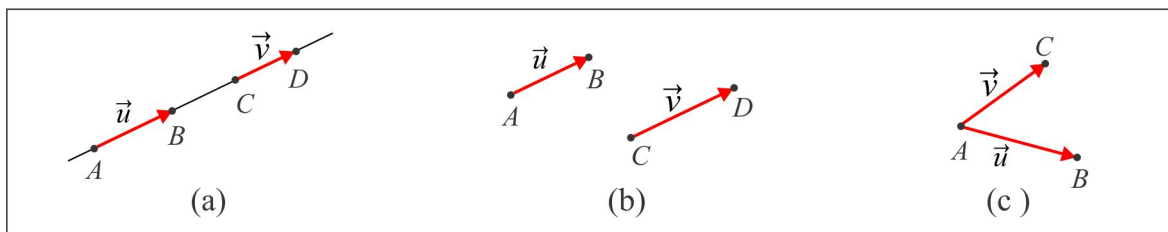


Figura 1.30: Vetores LD e Vetores LI.

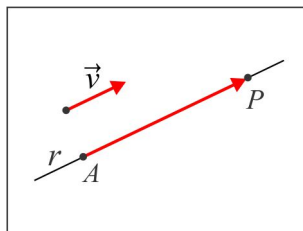
um deles é múltiplo escalar do outro, isto é:

$$\vec{u} = t \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = s \cdot \vec{u}$$

Dados um ponto  $A$  e um vetor não nulo  $\vec{v}$ , com representante  $AB$ , seja  $r$  a reta suporte do segmento orientado  $AB$ . Um ponto  $P(x, y, z)$  do espaço está sobre a reta  $r$  se, e somente se, existe um único parâmetro (escalar)  $t$ , tal que:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) descreve, de forma vetorial, a reta  $r$  que passa no ponto  $A$ , na direção do vetor  $\vec{v}$ , e os vetores do espaço com representantes sobre a reta  $r$  são precisamente os múltiplos escalares do vetor  $\vec{v}$ . Veja a Figura 1.31.

Figura 1.31: Reta  $r$  na direção do vetor  $\vec{v}$ .

No caso (c) em que os representantes não são paralelos nem colineares, um dos vetores não pode ser escrito como múltiplo escalar do outro e eles são ditos LI (*Linearmente Independentes*). Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados e, portanto, determinam um (único) plano  $\alpha$ , no seguinte sentido: dado um ponto  $P(x, y, z)$  no plano  $\alpha$  existem parâmetros únicos  $p$  e  $q$ , tais que:

$$\overrightarrow{AP} = p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}, \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$



Faremos referência à equação 1.6 como a descrição vetorial do plano gerado pelos vetores LI  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Na Figura 1.32 abaixo vemos  $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$ , sendo  $\vec{AB} = q \cdot \vec{v}$  e  $\vec{BP} = p \cdot \vec{u}$ .

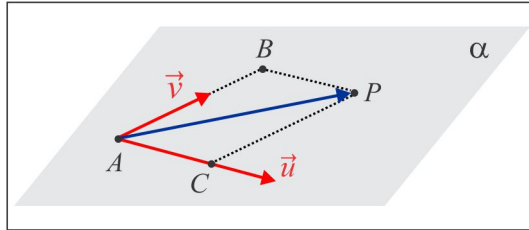


Figura 1.32: Plano gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Qualquer expressão da forma  $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$ , com  $x$  e  $y$  escalares, recebe o nome de *Combinação Linear* dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e, neste contexto, a igualdade (1.6) nos diz que o vetor  $\vec{AP}$  é combinação linear dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Os escalares  $x$  e  $y$  são os coeficientes da combinação linear. Por fim, ressaltamos que os vetores com representantes no plano  $\alpha$  são as combinações lineares de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

**2º CASO - TRÊS VETORES** Observando a Figura 1.33, notamos que nos casos (a), (b) e (c) os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  possuem representantes coplanares, isto é, estão sobre o mesmo plano.

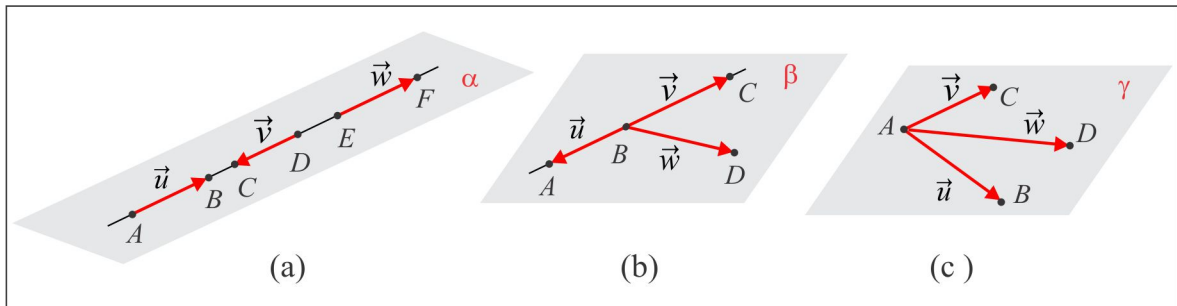


Figura 1.33: Três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  coplanares.

Já a Figura 1.34 ilustra os representantes dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  coplanares (quaisquer dois vetores sempre têm representantes coplanares. Por quê?), enquanto o representante  $AD$  do vetor  $\vec{w}$  não é paralelo ao plano  $\pi$  que contem os representantes  $AB$  e  $AC$ . Em uma linguagem simples, dizemos que o vetor  $\vec{w}$  "fura" o plano  $\pi$  no ponto  $A$ .

Essas considerações motivam a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 1.2.5** Três vetores do espaço  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são *Linearmente Dependentes* (abrevia-se *LD*) quando possuírem representantes coplanares, como ilustram os casos (a), (b) e (c). Se os três vetores não

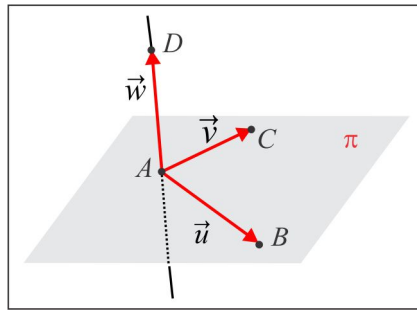


Figura 1.34: Três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  não coplanares.

possuem representantes coplanares, como ocorre no caso (d), eles são ditos *Linearmente Independentes* (abrevia-se *LI*).

**LEMA 1.2.6 (Lema Fundamental I)** *Três vetores do espaço  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI se, e somente se, a equação vetorial:*

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

possui apenas a solução nula:  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . Qualquer expressão da forma  $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$ , com  $x$ ,  $y$  e  $z$  escalares, recebe o nome de *combinação linear dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$* .

**Prova:** A comprovação é feita por contradição. De fato, se os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD, então eles têm representantes coplanares e um deles, digamos  $\vec{w}$ , é combinação linear dos outros dois, isto é:

$$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$$

e, assim, teríamos a combinação linear nula  $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + (-1) \cdot \vec{w} = \vec{0}$ , com o coeficiente  $z = -1$  não nulo. Reciprocamente, se um dos coeficientes, digamos  $z$ , na combinação linear nula

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

é diferente de zero, então:

$$\vec{w} = (-x/z) \cdot \vec{u} + (-y/z) \cdot \vec{v}$$

e isso indica que o vetor  $\vec{w}$  jaz no plano gerado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e, portanto,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são *Linearmente Dependentes* (coplanares). ■

**LEMA 1.2.7 (Lema Fundamental II)** *Três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , linearmente independentes, geram o espaço  $\mathbb{R}^3$ , no seguinte sentido: dado  $\vec{a}$  um vetor qualquer do espaço, existem escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$ , únicos, tais que:*

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}.$$

**Prova:** A Figura 1.35 ilustra os representantes:  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$  e  $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$

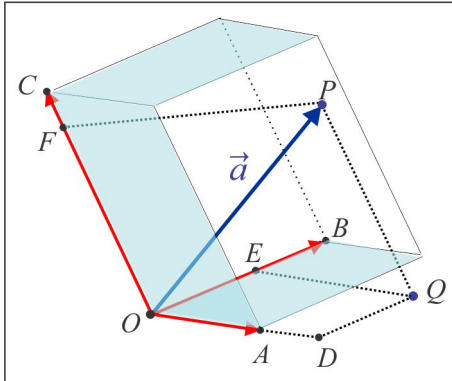


Figura 1.35: Os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  geram o espaço  $\mathbb{R}^3$ .

onde notamos que  $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OE} = y \cdot \overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OF} = z \cdot \overrightarrow{OC}$  e, assim:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \\ &= x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

A unicidade da representação segue do Lema 1.2.6 ■

### CONSEQUÊNCIAS:

(i) Considerando  $z = 0$  reduzimos o Lema Fundamental II ao caso de dois vetores, isto é,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI se, e somente se, a equação vetorial:

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

possui apenas a solução nula:  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

(ii) Se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores LI, então:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot \vec{u} + y_1 \cdot \vec{v} + z_1 \cdot \vec{w} &= x_2 \cdot \vec{u} + y_2 \cdot \vec{v} + z_2 \cdot \vec{w} \\ \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot \vec{u} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{v} + (z_1 - z_2) \cdot \vec{w} &= \vec{0}\end{aligned}$$

e usando o Lema 1.2.6 deduzimos que

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2 \text{ e } z_1 = z_2.$$

**EXEMPLO 1.2.8** Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores LI, mostremos que os vetores  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$  também o são. De fato, considerando a combinação linear nula:

$$x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + y \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \quad (1.7)$$

usamos o Lema 1.2.6 para mostrar que  $x = 0$  e  $y = 0$ . De (1.7) e da propriedade distributiva, obtemos:

$$x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} + y \cdot \vec{u} - y \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (x + y) \cdot \vec{u} + (x - y) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

e, considerando que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, a última equação nos leva ao sistema algébrico:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são  $x = 0$  e  $y = 0$ .

**EXEMPLO 1.2.9** Se  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um conjunto de vetores LI, então  $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \vec{v} + 3\vec{w}\}$  também o é. De fato, pelo Lema 1.2.6 é suficiente mostrar que a combinação linear nula:

$$x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + y \cdot (\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}) + z \cdot (\vec{v} + 3\vec{w}) = \vec{0} \quad (1.8)$$

tem solução  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . A equação vetorial (1.8) é equivalente a:

$$(x + y) \cdot \vec{u} + (x - y + z) \cdot \vec{v} + (-2y + 3z) \cdot \vec{w} = \vec{0} \quad (1.9)$$

e considerando que os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI, segue de (1.9) que:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases}$$

e resolvendo o sistema encontramos:  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ , como queríamos.

**DEFINIÇÃO 1.2.10** Um conjunto  $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  constituído de três vetores LI denomina-se Base do Espaço. De acordo com o Lema 1.2.7 todo vetor  $\vec{a}$  do espaço se expressa, de maneira única, sob a forma:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$

e os escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$  recebem o nome de coordenadas do vetor  $\vec{a}$  na base  $\mathcal{B}$ .

**EXEMPLO 1.2.11 (A base Canônica  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ )** Sejam  $OA$ ,  $OB$  e  $OC$  três segmentos orientados unitários e mutuamente ortogonais, nas direções  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente, como ilustra a Figura 1.36, e designemos  $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$  e  $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$ . Dado um ponto  $P(x, y, z)$  no espaço, temos:

$$\overrightarrow{OD} = x \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OE} = y \cdot \vec{j} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OF} = z \cdot \vec{k}$$

e imitando o que foi feito no Lema 1.2.7, obtemos:

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.} \quad (1.10)$$

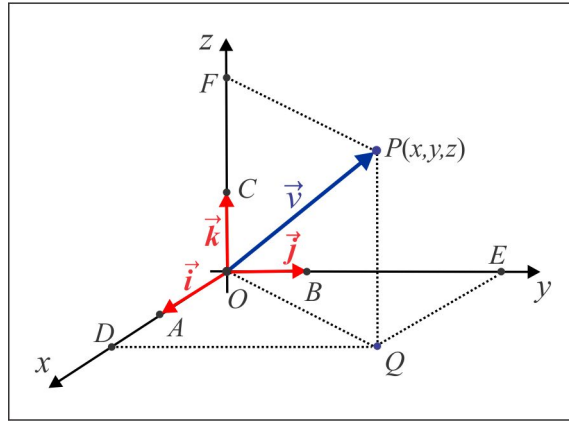


Figura 1.36: A base Canônica  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

Como consequência do Exemplo 1.2.11 deduzimos que:

- (i) As coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$  do ponto  $P$  são precisamente as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$  na base  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ . A unicidade da representação (1.10) nos permite identificar um ponto  $P(x, y, z)$  do espaço com o vetor  $\overrightarrow{OP}$ .
- (ii) Em qualquer base do espaço, o vetor nulo  $\vec{0}$  é o único que possui as três coordenadas nulas. Na base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , temos:

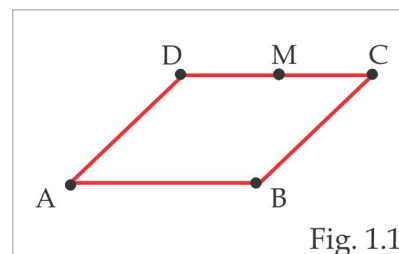
$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}.$$

1. As afirmações abaixo estão classificadas em verdadeiras (V) ou falsas (F). Discuta cada uma delas.

- (a) Se  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ , então  $A = C$  e  $B = D$ . ..... (F)
- (b) Se  $AB \sim CD$ , então  $AC \sim BD$  e os vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BD}$  são iguais. .... (V)
- (c) Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são LD, então  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  têm representantes colineares. .... (V)
- (d) Se  $\vec{a} = \vec{0}$ , então os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são coplanares. .... (V)
- (e) Se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados, então os vetores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$  são LI. .... (F)
- (f) Dois segmentos orientados colineares e de mesmo comprimento são equipolentes. .... (F)
- (g) Se  $AB \sim CD$ , então  $BA \sim DC$ . .... (V)
- (h) Os segmentos orientados  $AA$  e  $BB$  representam o mesmo vetor. .... (V)
- (i) Se  $AB \sim CD$ , então o quadrilátero de vértices  $A, B, C$  e  $D$  é um quadrado. .... (F)
- (j) Vetores determinados por segmentos orientados equipolentes são iguais. .... (V)
- (k) Três pontos não colineares determinam dois vetores LI. .... (V)
- (l) Dois vetores LI são sempre coplanares. .... (V)
- (m) Três vetores LD são sempre coplanares. .... (V)
- (n) Três vetores LD são sempre colineares. .... (F)
2. A partir de dois vetores linearmente independentes  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , construa, graficamente, o vetor  $2\vec{u} - \vec{v}$ .
3. Se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados e  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , verifique que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são vértices de um paralelogramo.
4. Sejam  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  as medianas de um triângulo  $ABC$ . Mostre que  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ .

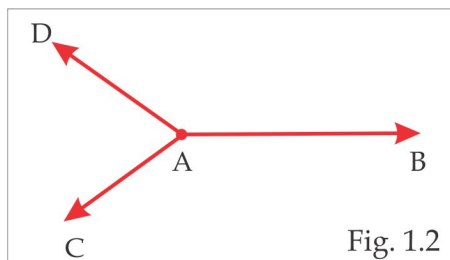
5. No paralelogramo da Fig. 1.1,  $M$  é o ponto médio do lado  $DC$ . Complete as sentenças:

- (a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$
- (b)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \dots\dots\dots$
- (c)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$
- (d)  $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$

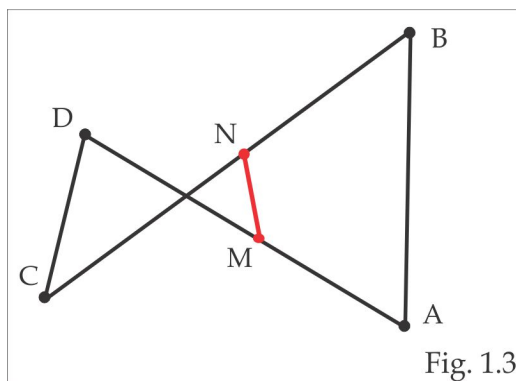


6. Na Fig. 1.2 abaixo, os vetores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{AD}$  estão no mesmo plano. Construir, graficamente,

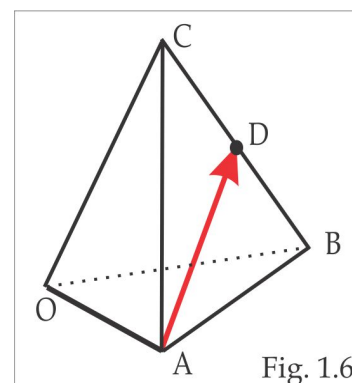
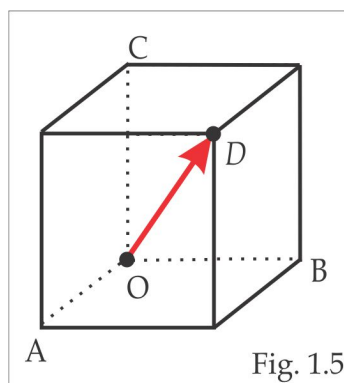
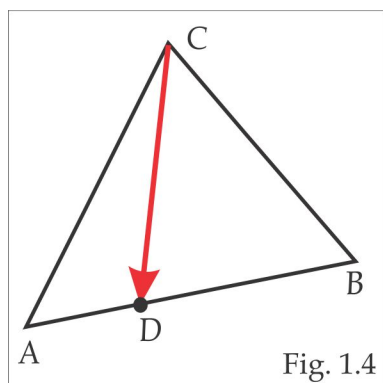
com origem em  $A$ , o vetor  $\vec{v}$ , tal que  $\vec{v} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$ .



7. Na Fig. 1.3 abaixo tem-se  $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{0}$  e  $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$ . Escrever o vetor  $\vec{AB} + \vec{DC}$  em função do vetor  $\vec{MN}$ .



8. Mostre que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.
9. Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.
10. Mostre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual a sua semi-soma.
11. Observe as figuras abaixo.



- (a) Na Fig. 1.4 tem-se  $|DB| = 2|AD|$ . Expresse o vetor  $\overrightarrow{CD}$  como uma combinação linear dos vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .
- (b) A Fig. 1.5 representa um paralelepípedo (caixa retangular). Expresse a diagonal  $\overrightarrow{OD}$  como uma combinação linear das arestas  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ .
- (c) No tetraedro da Figura 1.6,  $D$  é o ponto médio de  $BC$ . Expresse o vetor  $\overrightarrow{AD}$  como uma combinação linear das arestas  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ .
12. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.
13. O ponto de encontro das medianas de um triângulo recebe o nome de *Baricentro*. Mostre que o Baricentro de um triângulo divide as medianas na razão de 2 para 1.
14. Se  $O$  é o Baricentro de um triângulo de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , mostre que  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
15. Se o ponto  $A$  divide o segmento  $PQ$  na razão de  $n$  para  $m$  e  $O$  é um ponto qualquer do espaço, mostre que:
- $$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OP} + \left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OQ}.$$
16. Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são vetores LI, mostre que  $2\vec{a} + 3\vec{b}$  e  $\vec{a} - 6\vec{b}$  também são LI. Se  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  é uma base do espaço, mostre que  $\{\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}, \vec{b} + 2\vec{c}\}$  também o é.
17. Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  dois vetores LI. Como devem ser os escalares  $x$  e  $y$  para que o vetor  $x\vec{a} + y\vec{b}$  seja paralelo ao vetor  $\vec{a}$ , mas de sentido contrário?

### 1.3 Vetores em Coordenadas

Sejam  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$  dois pontos no espaço e seja  $\vec{v}$  o vetor com representante  $AB$ , isto é,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , como ilustra a Figura 1.37.

Para expressar o vetor  $\vec{v}$  na base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , notamos que  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  e considerando que:

$$\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k},$$



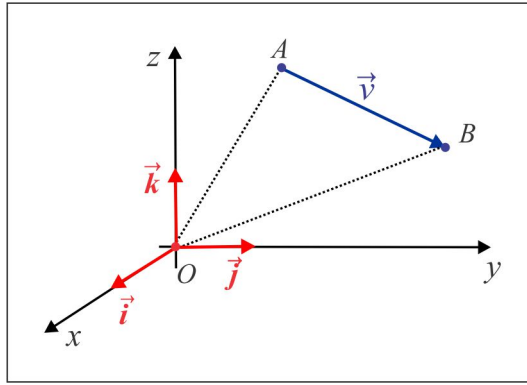


Figura 1.37: Vetor determinado por dois pontos.

obtemos:

$$\vec{v} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

A *norma* do vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , indicada por  $\|\vec{v}\|$ , é, por definição, a distância do ponto  $A$  ao ponto  $B$  e, sendo assim, temos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Se  $\|\vec{v}\| = 1$ , o vetor  $\vec{v}$  diz-se *unitário*.

A partir das propriedades da Soma e do Produto por Escalar, vejamos como ficam essas operações e a norma de um vetor, em coordenadas.

(a) **Soma:** Dados os vetores  $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$  e  $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ , então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}.$$

(b) **Produto por Escalar:** Dados um vetor  $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$  e um escalar  $x$ , então:

$$x \cdot \vec{v} = (xv_1)\vec{i} + (xv_2)\vec{j} + (xv_3)\vec{k}.$$

(c) **Norma:** Considerando o ponto  $P(v_1, v_2, v_3)$  e notando que  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ , obtemos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

e dado um escalar  $x$ , então  $\|x \cdot \vec{v}\| = |x| \cdot \|\vec{v}\|$ . De fato, como  $x \cdot \vec{v} = x \cdot v_1 \vec{i} + x \cdot v_2 \vec{j} + x \cdot v_3 \vec{k}$ , temos:

$$\begin{aligned} \|x \cdot \vec{v}\| &= \sqrt{(xv_1)^2 + (xv_2)^2 + (xv_3)^2} \\ &= |x| \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = |x| \cdot \|\vec{v}\|. \end{aligned}$$

Olhando os vetores básicos  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  sob a forma:

$$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}, \quad \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

encontramos:

$$\|\vec{i}\| = 1, \quad \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{k}\| = 1,$$

indicando, como já era esperado, que os vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são unitários. Além disso, dado um vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  os vetores  $\vec{u} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  são unitários e colineares com o vetor  $\vec{v}$ , porque se  $x = \pm 1/\|\vec{v}\|$ , então  $\vec{u} = x \cdot \vec{v}$  e, portanto:

$$\|\vec{u}\| = |x| \cdot \|\vec{v}\| = (1/\|\vec{v}\|) \cdot \|\vec{v}\| = 1.$$

**EXEMPLO 1.3.1** Dados os pontos  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-1, 2, -3)$  e  $C(1, 2, 0)$ , temos:

(i)  $\vec{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$  e  $\vec{AC} = 0\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

(ii) Usando as operações com vetores, encontramos:

$$3\vec{AB} - 2\vec{AC} = (-6\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{k}) + (-2\vec{j} + 2\vec{k}) = -6\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

(iii) Calculando as normas, temos:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \quad \text{e} \quad \|3\vec{AB} - 2\vec{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \sqrt{161}.$$

**EXEMPLO 1.3.2 (Coordenadas do Ponto Médio)** Dados os pontos  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$ , seja  $M(x_M, y_M, z_M)$  o ponto médio do segmento  $AB$ , como ilustra a Figura 1.38.

Observando a figura, deduzimos que  $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$  e usando as coordenadas, encontramos:

$$x_M = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A), \quad y_M = y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \quad \text{e} \quad z_M = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$

de onde resultam as coordenadas do ponto médio:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}} \quad \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{z_M = \frac{z_A + z_B}{2}}.$$

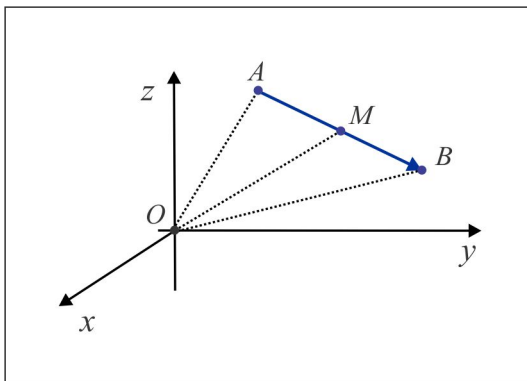


Figura 1.38: Coordenadas do Ponto Médio.

**EXEMPLO 1.3.3** O ponto médio  $M(x_M, y_M, z_M)$  do segmento de extremidades  $A(2, -1, 4)$  e  $B(6, -3, -2)$  tem coordenadas:

$$x_M = 4, \quad y_M = -2 \quad e \quad z_M = 1$$

e o ponto médio é  $M(4, -2, 1)$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

- Dados os vetores  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$  e  $\vec{d} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$ , calcule:
  - $\frac{1}{4}\vec{a}$
  - $3\vec{b} - 5\vec{a} + \vec{c}$
  - $-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a}$
  - $\vec{b} - \vec{a}$ .
- Dado  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ , determine um vetor  $\vec{v}$  colinear com  $\vec{u}$ , de sentido contrário, e cujo comprimento seja igual a 3. Represente graficamente  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- Localize no sistema de coordenadas os pontos:  $A(2, 3, 3)$ ,  $B(2, 0, 3)$  e  $C(2, 2, 0)$  e represente graficamente os vetores  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  e  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ .
- Calcule  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BC}$ , sendo  $A(2, 3, 4)$ ,  $B(-2, 1, 1)$  e  $C(-2, -1, -2)$ .
- Considere o ponto  $A(1, 2, 3)$  e o vetor  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ . Determine  $B$  tal que  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ .
- Determine as coordenadas do ponto médio do segmento  $PQ$ , sabendo que  $P(2, 1, 5)$  e  $Q(4, 3, 1)$ . Qual a distância do ponto  $P$  ao ponto  $Q$ ?
- Dados os vetores  $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  e  $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ , determine o vetor  $\vec{w}$  tal que  $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$ .

8. Dados os pontos  $A(1, -2, 3)$ ,  $B(5, 2, 5)$  e  $C(-4, 2, 9)$ , determine o ponto  $D$  de modo que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sejam vértices de um paralelogramo.
9. Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  os vértices de um paralelogramo e  $G$  o ponto de encontro das diagonais. Sabendo que  $A(2, -1, -5)$ ,  $B(-1, 3, 2)$  e  $G(4, -1, 7)$ , determine os vértices  $C$  e  $D$ .
10. Em cada caso verifique se vetores são LD ou LI.
- (a)  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$       (b)  $\vec{u} = -14\vec{i} + 91\vec{j} + 56\vec{k}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} - 13\vec{j} - 8\vec{k}$   
 (c)  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{v} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + \vec{k}$       (d)  $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$
11. Determine  $m$  de modo que os vetores  $\vec{u} = m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = -\vec{i} + m\vec{j}$  e  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  sejam coplanares.
12. Qual valor de  $m$  faz com que  $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{v} = 8\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$  sejam colineares?
13. Verifique se os pontos  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(0, 1, 1)$  e  $C(2, -1, 3)$  estão alinhados.
14. Determine  $y$  e  $z$  de modo que os pontos  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(1, 0, 0)$  e  $C(1, y, z)$  sejam colineares.
15. Em cada caso verifique se os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são coplanares.
- (a)  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(-2, -1, -3)$ ,  $C(0, 2, -2)$  e  $D(-1, 0, -2)$ .  
 (b)  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(-1, 0, 3)$ ,  $C(2, 4, 1)$  e  $D(-1, -2, 2)$ .
16. Verifique se os vetores  $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$  e  $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$  podem ser representados pelos lados de um triângulo.
17. Verifique se os pontos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(3, 1, 0)$  e  $C(1, 3, 0)$  podem ser vértices de um triângulo.
18. Verifique que os vetores  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  e  $\vec{c} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$  formam uma base do  $\mathbb{R}^3$  e determine as coordenadas do vetor  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  nessa base. A base é positiva ou negativa?
19. Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vetores LI e considere  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$  e  $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ . Escreva o vetor  $\vec{w} = 9\vec{a} + 15\vec{b} + 6\vec{c}$  como combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
20. Calcule os valores de  $x$  para os quais os vetores  $\vec{a} = \vec{i} + x\vec{j}$ ,  $\vec{b} = -x\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  são LI.
-

## 1.4 Produto Interno

O *Produto Interno*, ou *Produto Escalar*, entre dois vetores é motivado pela projeção ortogonal de um vetor sobre outro. Iniciaremos com os conceitos de norma e ângulo entre vetores.

► **NORMA & ÂNGULO:** Como vimos anteriormente, todos representantes de um dado vetor  $\vec{v}$  têm o mesmo comprimento e se  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  definimos a norma de  $\vec{v}$  por  $\|\vec{v}\| = \text{dist}(A; B)$ . Se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , os vetores  $\vec{u} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  são os únicos vetores unitários colineares (LD) com o vetor  $\vec{v}$ .

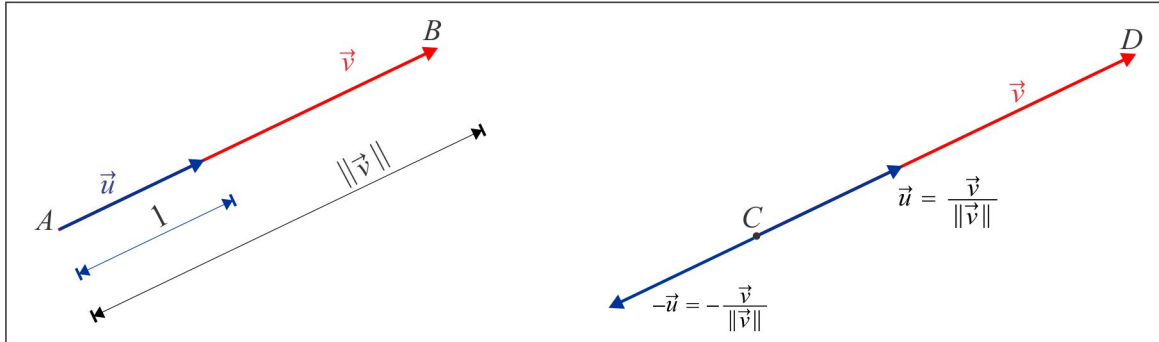


Figura 1.39: Construção de vetor unitário.

Um fato que nos parece óbvio é que se  $\vec{u}$  é um vetor unitário e  $\vec{v}$  é um vetor colinear com  $\vec{u}$ , então:

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = -\|\vec{v}\|\vec{u},$$

a depender dos sentidos dos representantes como ilustra a Figura 1.39.

O *ângulo* entre dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é, por definição, o menor ângulo orientado  $\theta$  entre dois representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , com mesma origem, como ilustra a Figura 1.40.

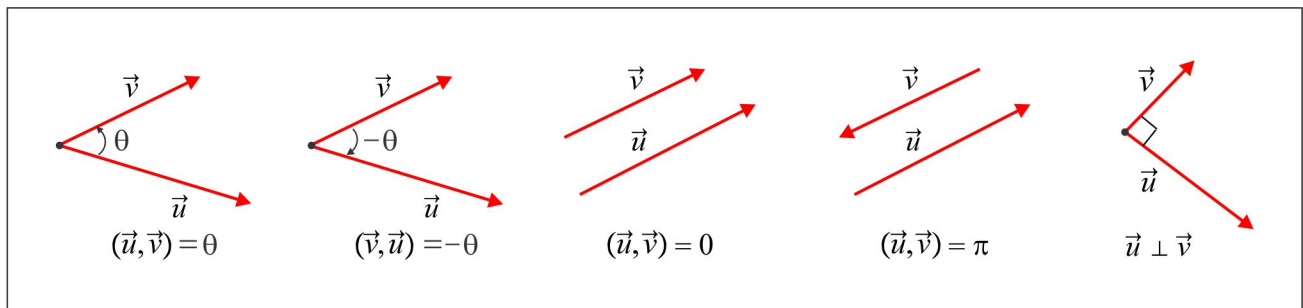


Figura 1.40: Ângulo entre vetores.

Anota-se  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$  para indicar o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e em se tratando de ângulo orientado, segue

que  $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$ . Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  com representantes perpendiculares são ditos *ortogonais* e anotamos  $\vec{u} \perp \vec{v}$ ; neste caso o ângulo entre eles é  $\theta = \pm\pi/2$  rad.

A base canônica  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  é constituída de três vetores unitários e mutuamente ortogonais. As coordenadas cartesianas  $x, y$  e  $z$  de um ponto  $P$  são precisamente as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OP}$  na base  $\mathcal{B}$ . Isso torna a base  $\mathcal{B}$  especial!

► **PROJEÇÃO ORTOGONAL:** A Figura 1.41 ilustra os vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , com representantes  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, e  $D$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $B$  sobre o segmento  $AC$ .

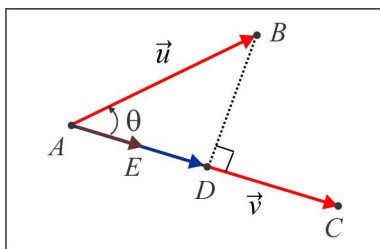


Figura 1.41: Projeção Ortogonal.

O vetor  $\overrightarrow{AD}$  recebe o nome de Projeção Ortogonal do vetor  $\vec{u}$  sobre o vetor  $\vec{v}$  e é indicado por  $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ .

Para expressar o vetor  $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$  em função dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , notamos que o vetor  $\overrightarrow{AD}$  é colinear com o vetor unitário  $\vec{v}/\|\vec{v}\|$  e, sendo assim,  $\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot (\vec{v}/\|\vec{v}\|)$ . Portanto:

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \left( \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) = \|\vec{u}\| \cos \theta \left( \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right)$$

ou, de forma equivalente:

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left[ \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta \right] \left( \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right). \quad (1.11)$$

Ao número real  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ , que figura em (1.11), sendo  $\theta$  o ângulo entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , damos o nome de *Produto Interno* ou *Produto Escalar* entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . De forma precisa, temos a seguinte definição:

**DEFINIÇÃO 1.4.1** O Produto Interno entre os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , indicado por  $\vec{u} \bullet \vec{v}$ , é definido como segue:

(i) Se  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ , então  $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ .

(ii) Se  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , então:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}). \quad (1.12)$$

### 1.4.1 Propriedades & Consequências do Produto Interno

Dados três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e um escalar (número real)  $x$ , temos as seguintes propriedades:

- (1) **Comutativa:**  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ .
- (2) **Associativa:**  $x \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v}) = (x \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (x \cdot \vec{v})$ .
- (3) **Distributiva:**  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ .

**CONSEQUÊNCIAS** A partir das propriedades do Produto Interno, seguem facilmente as seguintes consequências:

- (a)  $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . Se  $\vec{u}$  for unitário, então  $\vec{u} \bullet \vec{u} = 1$ .
- (b)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$ . O ângulo é  $\theta = \pi/2$  e  $\cos \theta = 0$ .
- (c)  $\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$ ,  $\vec{i} \bullet \vec{k} = 0$  e  $\vec{j} \bullet \vec{k} = 0$ . Os vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são mutuamente ortogonais.
- (d)  $\vec{i} \bullet \vec{i} = 1$ ,  $\vec{j} \bullet \vec{j} = 1$  e  $\vec{k} \bullet \vec{k} = 1$ . Os vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são unitários.
- (e) Dado  $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ , então as coordenadas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  do vetor  $\vec{u}$  são precisamente:

$$u_1 = \vec{u} \bullet \vec{i}, \quad u_2 = \vec{u} \bullet \vec{j} \quad \text{e} \quad u_3 = \vec{u} \bullet \vec{k}.$$

- (f) Se  $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$  e  $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ , temos a seguinte regra para o Produto Interno em coordenadas:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

- (g) Segue de (1.12) que o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é o menor ângulo orientado  $\theta$ , tal que

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

**PRODUTOS NOTÁVEIS & DESIGUALDADES** Usando as propriedades e consequências do Produto Interno, temos:

- (a) **Quadrado da Soma:**  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ .

Prova:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

(b) **Quadrado da Diferença:**  $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$

(c) **Produto da Soma pela Diferença:**  $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$

Prova:

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

(d) **Desigualdade de Cauchy-Schwarz:**  $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$

Prova: Considerando que  $|\cos \theta| \leq 1$ , temos:

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

(e) **Desigualdade Triangular:**  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$

Prova: A Figura 1.42 ilustra um triângulo  $ABC$  e a desigualdade triangular estabelece que o comprimento  $AC$  de um dos lados não ultrapassa a soma dos outros dois e daí resultou o nome Desigualdade Triangular. Usando o quadrado da soma e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2\end{aligned}$$

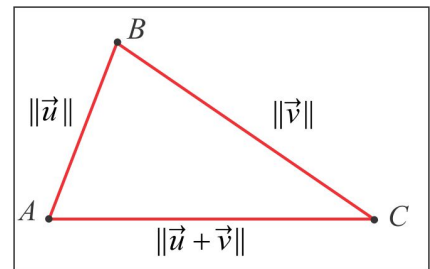


Figura 1.42:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$

## 1.5 Produto Vetorial

Para motivar o conceito de *Produto Vetorial* entre dois vetores, deixe-nos considerar o seguinte problema geométrico:



► **PROBLEMA:** Calcular a área do paralelogramo cujos lados são representantes dos vetores LI (não paralelos)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , como ilustra a Figura 1.43. A área do paralelogramo  $S$  vem dada por:

$$A(S) = (\text{base}) \times (\text{altura}) = \|\vec{u}\| \times h = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$$

e como veremos adiante, o valor numérico da área  $A(S)$  é a norma de um novo vetor, conhecido por *produto vetorial* de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

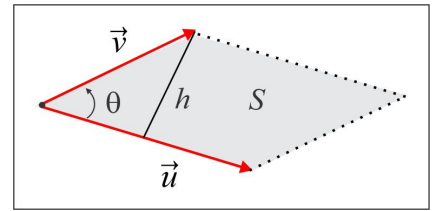


Figura 1.43: Área  $A(S)$ .

Dados três vetores LI  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , podemos construir com esses vetores seis bases ordenadas:

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \mathcal{B}_2 = \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}, \mathcal{B}_3 = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}, \mathcal{B}_4 = \{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\}, \mathcal{B}_5 = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} \text{ e } \mathcal{B}_6 = \{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$$

e a cada base ordenada associaremos o sinal "+" ou "-", de acordo com a *Regra da Mão Direita* descrita a seguir. Para melhor clareza da regra, suponhamos que os vetores LI  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  estejam dispostos como ilustrado na Figura 1.44.

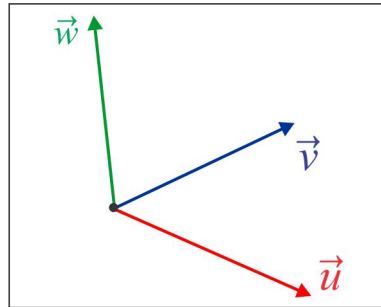


Figura 1.44: Base Ordenada.

O sinal da base  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é estabelecido da seguinte forma: imaginemos o vetor  $\vec{w}$  (terceiro vetor da base) apontando para nossos olhos e giramos, segundo o menor ângulo, o vetor  $\vec{u}$  (primeiro vetor da base) até torná-lo colinear com o vetor  $\vec{v}$  (segundo vetor da base). Se a rotação for anti-horária a base será positiva e, caso contrário, associamos à base o sinal "-". Dito de outra forma, acompanhando com os quatro dedos da mão direita a rotação do vetor  $\vec{u}$  (primeiro vetor da base) até torná-lo colinear com o vetor  $\vec{v}$  (segundo vetor da base), se o polegar apontar na direção do vetor  $\vec{w}$  (terceiro vetor da base) a base será positiva. Esta é a *Regra da Mão Direita*. Na tabela abaixo, exibimos os sinais associados às bases listadas acima, com respeito à configuração da Figura 1.44.

| $\mathcal{B}_1$ | $\mathcal{B}_2$ | $\mathcal{B}_3$ | $\mathcal{B}_4$ | $\mathcal{B}_5$ | $\mathcal{B}_6$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| +               | -               | +               | -               | +               | -               |

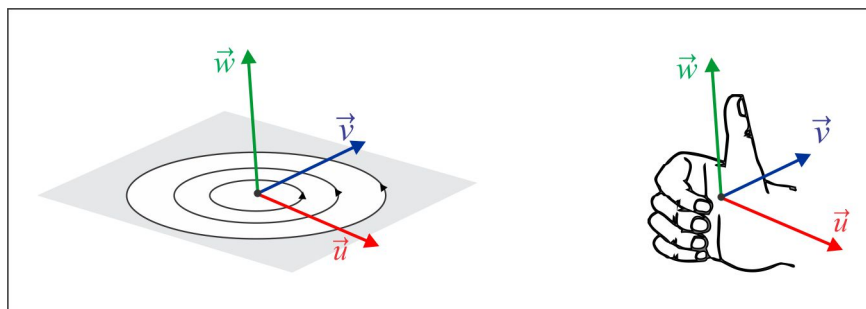


Figura 1.45: Regra da Mão Direita.

Procedendo dessa forma com as demais bases, deduzimos que as bases  $\mathcal{B}_3$  e  $\mathcal{B}_5$  são positivas, enquanto as bases  $\mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{B}_4$  e  $\mathcal{B}_6$  são negativas. É claro que os sinais das bases serão alterados quando a disposição gráfica dos vetores for modificada.

**DEFINIÇÃO 1.5.1** *Dados os vetores LI (não paralelos)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , o produto vetorial de  $\vec{u}$  por  $\vec{v}$  é, por definição, o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$ , caracterizado por:*

- (i) **Norma:**  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$ .
- (ii) **Direção:** o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é ortogonal aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , simultaneamente.
- (iii) **Sentido:** a base ordenada  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é positiva, isto é, atende à regra da mão direita.

No caso em que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos (aqui estão incluídos os casos  $\vec{u} = \vec{0}$  e  $\vec{v} = \vec{0}$ ), define-se  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ . Sobre a definição do produto vetorial, ressaltamos que:

- (a) O sentido do vetor  $\vec{v} \times \vec{u}$  é determinado pela regra da mão direita, considerando que a base ordenada  $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u}\}$  deve ser positiva. A Figura 1.46 ilustra os produtos vetoriais  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{v} \times \vec{u}$ .

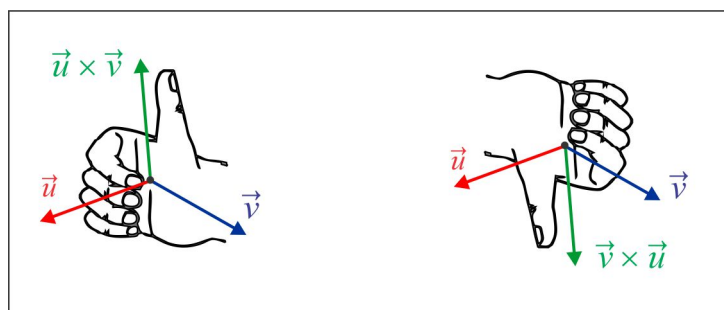


Figura 1.46: Os produtos  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{v} \times \vec{u}$ .

- (b) Os vetores  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{v} \times \vec{u}$  são paralelos, já que ambos são ortogonais ao plano gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- (c) A norma  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  é precisamente o valor numérico da área do paralelogramo cujos lados são representantes dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , ilustrado na Figura 1.47.

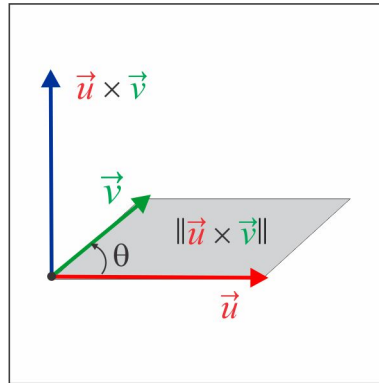


Figura 1.47:  $A(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ .

### 1.5.1 Propriedades & Consequências do Produto Vetorial

- (1) Os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são paralelos (LD) se, e somente se,  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ . De fato, sendo  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  paralelos, então  $\text{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  e, portanto,  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$ .
- (2) Antissimetria:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ . Basta observar a Figura 1.46.
- (3) Com respeito aos vetores básicos  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , dispostos como ilustrado no Exemplo 1.2.11, temos a seguinte tabela de produtos vetoriais:

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\vec{i} \times \vec{j}$ | $\vec{k} \times \vec{i}$ | $\vec{j} \times \vec{k}$ | $\vec{i} \times \vec{i}$ | $\vec{j} \times \vec{j}$ | $\vec{k} \times \vec{k}$ | $\vec{j} \times \vec{i}$ | $\vec{i} \times \vec{k}$ | $\vec{k} \times \vec{j}$ |
| $\vec{k}$                | $\vec{j}$                | $\vec{i}$                | $\vec{0}$                | $\vec{0}$                | $\vec{0}$                | $-\vec{k}$               | $-\vec{j}$               | $-\vec{i}$               |

- (4) Associatividade:  $x \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (x \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (x \cdot \vec{v})$ .
- (5) Distributividade:  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ .
- (6) O Produto Vetorial em coordenadas. Dados os vetores  $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$  e  $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$ , obtemos, a partir das propriedades já estabelecidas, a seguinte expressão em coordenadas para o produto vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_1 v_2) \vec{k} - (u_1 v_3) \vec{j} - (u_2 v_1) \vec{k} + (u_2 v_3) \vec{i} + (u_3 v_1) \vec{j} - (u_3 v_2) \vec{i} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}. \end{aligned}$$

Na última linha, os coeficientes podem ser identificados com determinantes  $2 \times 2$ , de modo que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}. \quad (1.13)$$

O lado direito de (1.13) nada mais é do que o desenvolvimento de Laplace do determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

que normalmente se usa para representar o produto vetorial.

**EXEMPLO 1.5.2** Se  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ , o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6 + 2)\vec{i} - (-3 + 2)\vec{j} + (2 - 4)\vec{k} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Como  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ , deduzimos que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são paralelos e a área do paralelogramo  $S$  de lados representados pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é igual a:

$$A(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

## 1.6 Produto Misto

O *Produto Misto*, como o próprio nome sugere, envolve os produtos Interno e Vetorial. Para motivar o conceito, vamos considerar o seguinte problema geométrico:

► **PROBLEMA:** Calcular o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , como ilustrado na Figura 1.48.

O volume do paralelepípedo vem dado por:

$$\text{vol} = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

e por observação da Figura 1.48, encontramos:

$$\text{vol} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot H = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \theta|. \quad (1.15)$$

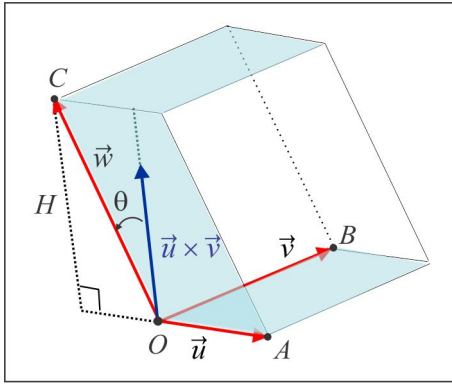


Figura 1.48: Volume do Paralelepípedo.

O que vemos em (1.15) é o volume expresso pelo produto interno dos vetores  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{w}$ , isto é:

$$\text{vol} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}|.$$

Ao número real  $(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$  damos o nome de *Produto Misto* dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , nessa ordem, e anotamos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}.$$

É oportuno ressaltar que o produto misto  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  pode mudar de sinal ao permutarmos os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Por exemplo, notando que  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ , temos:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

### 1.6.1 Propriedades & Consequências do Produto Misto

- (1) Os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares se, e só se, o paralelepípedo degenera-se em uma figura plana e, assim,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .
- (2) O sinal do Produto Misto  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  é o mesmo da base ordenada  $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , no caso em que os vetores não são coplanares.
- (3) Para comprovar que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$ , basta observar que em valor absoluto os produtos mistos são iguais (representam o volume do mesmo paralelepípedo) e que os ternos ordenados  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  e  $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$  têm o mesmo sinal.

(4) **O produto Misto em coordenadas:** Considerando os vetores:

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}, \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

usamos os produtos interno e vetorial em coordenadas e encontramos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

**EXEMPLO 1.6.1** *Sejam os vetores  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .*

(a) Os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI (não coplanares), porque:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

(b) O paralelepípedo de arestas  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  tem volume igual a 7.

(c) As coordenadas do vetor  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  na base  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  são as soluções  $x$ ,  $y$  e  $z$  da equação vetorial:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}. \tag{1.16}$$

A equação (1.16) é equivalente ao sistema algébrico:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$

com solução  $x = 9/7$ ,  $y = -4/7$  e  $z = -3/7$ . Assim, temos a representação:

$$\vec{a} = \frac{9}{7}\vec{u} - \frac{4}{7}\vec{v} - \frac{3}{7}\vec{w}.$$

1. Classifique as afirmações em *verdadeiras* (V) ou *falsas* (F), justificando sua resposta.

(a) ( ) Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são paralelos, então  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .

- (b) ( ) Se  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ , então  $\vec{a}$  ou  $\vec{b}$  é igual a  $\vec{0}$ .
- (c) ( ) Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são perpendiculares, então  $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ .
- (d) ( ) Se  $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ , então  $\vec{a}$  ou  $\vec{b}$  é igual a  $\vec{0}$ .
- (e) ( ) Existem vetores não nulos  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  tais que  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  e  $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ .
- (f) ( ) Se  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  é uma base ortonormal, então  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .
- (g) ( ) Se  $\alpha$  é o plano gerado por  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e  $\beta$  é o plano gerado por  $\vec{c}$  e  $\vec{d}$ , então  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos se, e somente se,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0}$ .
- (h) ( ) Os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  são coplanares se, e somente se,  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ .
- (i) ( ) Se  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  é uma base ortonormal, então  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \pm 1$ .
- (j) ( ) Sempre que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  forem colineares, ter-se-á  $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ .
- (k) ( ) Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são vetores unitários, então  $\vec{a} + \vec{b}$  tem a direção da bissetriz do ângulo  $(\vec{a}, \vec{b})$ .
- (l) ( ) Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são vetores do espaço, então  $\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$ .
- (m) ( ) Três vetores ortogonais são sempre LI.
- (n) ( ) Se  $\|\vec{a}\| = 1$ , então o vetor  $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b}$  tem comprimento  $|\vec{a} \bullet \vec{b}|$ .
- (o) ( ) Se  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base positiva, então  $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\}$  também o é.
- (p) ( ) O conjunto  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}\}$  é uma base apenas quando  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  forem LI.
- (q) ( ) Se  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base ortonormal e  $\vec{a}$  é um vetor, então  $\|\vec{a}\|^2 = (\vec{a} \bullet \vec{u})^2 + (\vec{a} \bullet \vec{v})^2 + (\vec{a} \bullet \vec{w})^2$ .

2. Mostre que as diagonais de um losango são ortogonais.

3. Se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  vetores não nulos e ortogonais, demonstre o [Teorema de Pitágoras](#):

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

4. Se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são dois vetores e  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , mostre que o vetor  $\vec{v} = \vec{b} - \frac{(\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$  é perpendicular ao vetor  $\vec{a}$ .

5. Verifique que a norma goza das seguintes propriedades:

(a)  $\|\vec{u}\| \geq 0$  e  $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ . (O único vetor de norma zero é o vetor nulo.)

(b)  $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$ .

(c)  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ . (Identidade de Polarização)

- (d)  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ . **(Identidade do Paralelogramo)**
6. Descreva passo-a-passo a construção de uma base ortonormal positiva  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , a partir de um vetor não nulo  $\vec{u}$ .
7. Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  três vetores tais que o ângulo entre quaisquer dois deles, nessa ordem, é  $60^\circ$ . Sabendo que  $\|\vec{a}\| = 3$ ,  $\|\vec{b}\| = 2$  e  $\|\vec{c}\| = 6$ , calcule  $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$ .
8. Se  $\|\vec{a}\| = 11$ ,  $\|\vec{b}\| = 23$  e  $\|\vec{a} - \vec{b}\| = 30$ , calcule  $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ .
9. Os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são perpendiculares entre si e o vetor  $\vec{c}$  é tal que  $(\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$  e  $(\vec{c}, \vec{b}) = 60^\circ$ . Sabendo-se que  $\|\vec{a}\| = 3$ ,  $\|\vec{b}\| = 5$  e  $\|\vec{c}\| = 8$ , calcule o produto interno:  $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \bullet (\vec{b} + 3\vec{c})$ .
10. Determine a *projeção ortogonal* do vetor  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  sobre o vetor  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ .
11. Calcule o ângulo entre os vetores  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$  e  $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ .
12. Determine um vetor unitário  $\vec{u}$ , paralelo ao vetor  $2\vec{a} - \vec{b}$ , sendo  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$  e  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .
13. Calcule  $\|\vec{u}\|$  e  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ , sabendo que  $\vec{u} \bullet \vec{v} = 6$ ,  $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$  e  $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/4$  rad.
14. Determine o valor de  $x$ , de modo que  $(x\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \bullet (2\vec{i} + \vec{j}) = 3$ .
15. Dados  $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$  e  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ , ache um vetor unitário  $\vec{w}$  na direção da bissetriz do ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
16. Verifique que os pontos  $A(1, 1, 0)$ ,  $B(3, 1, 0)$  e  $C(1, 3, 0)$  são vértices de um triângulo retângulo e calcule seus ângulos.
17. Dados  $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{w} = -2\vec{j} - \vec{k}$ , calcule os produtos mistos:
- (a)  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  (b)  $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}]$  (c)  $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$  (d)  $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}]$ .
18. Em cada caso, use o produto misto e verifique se os pontos são coplanares ou não.
- (a)  $A(0, 2, -2)$ ,  $B(-1, 0, -2)$ ,  $C(-2, -1, -3)$  e  $D(1, 1, 1)$ .
- (b)  $A(-1, 0, 3)$ ,  $B(-1, -2, 2)$ ,  $C(1, 0, 2)$  e  $D(2, 4, 1)$ .
19. Os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são mutuamente ortogonais e formam, nessa ordem, um terço ordenado positivo. Sabendo que  $\|\vec{u}\| = 4$ ,  $\|\vec{v}\| = 2$  e  $\|\vec{w}\| = 3$ , calcule o produto misto  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .



20. Use o produto vetorial e determine as condições que devem satisfazer os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  para que  $\vec{a} + \vec{b}$  e  $\vec{a} - \vec{b}$  sejam paralelos.
21. Os vetores  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$  e  $\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  são coplanares ou não?
22. Se  $\|\vec{u}\| = 3$  e  $\|\vec{v}\| = 5$ , determine os valores de  $x$  de modo que os vetores  $\vec{u} + x\vec{v}$  e  $\vec{u} - x\vec{v}$  sejam:
- (a) perpendiculares (b) paralelos.
23. Sejam  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$ . Determine um vetor  $\vec{v}$  perpendicular aos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e tal que  $\vec{v} \bullet \vec{c} = 100$ .
24. Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos diretores de um vetor não nulo  $\vec{v}$ , isto é, os ângulos que o vetor  $\vec{v}$  forma com os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente, mostre que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

25. Demostre as seguintes relações:

$$\text{(a)} \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}. \quad \text{(b)} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{z} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{z} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\vec{w}.$$

26. Os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  têm normas 4, 2 e 6, respectivamente, e o ângulo entre quaisquer dois deles, na ordem apresentada, é  $\pi/3$  rad. Calcule  $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$ .
27. Prove as seguintes afirmações:
- (a) Se  $\vec{a} \bullet \vec{v} = \vec{b} \bullet \vec{v}$ ,  $\forall \vec{v}$ , então  $\vec{a} = \vec{b}$ .
- (b) Se  $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b} \times \vec{v}$ ,  $\forall \vec{v}$ , então  $\vec{a} = \vec{b}$ .
- (c) Se  $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$ , então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares.

## 1.7 Regra de Cramer

Daremos a seguir uma breve descrição da Regra de Cramer para resolução de sistemas lineares  $3 \times 3$ . Começamos com dois resultados básicos, que serão utilizados na seqüência.

■ Usando a relação  $[\vec{w}, \vec{z}, \vec{X}] = [\vec{X}, \vec{w}, \vec{z}]$ , com  $\vec{X} = \vec{u} \times \vec{v}$ , vamos demonstrar que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u} \bullet \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{z}) - (\vec{u} \bullet \vec{z}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

**SOLUÇÃO** Temos  $[\vec{w}, \vec{z}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{w}, \vec{z}]$  e considerando  $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v}$ , obtemos do Exercício 25(a), seção 1.4,

$$\begin{aligned} [\vec{w}, \vec{z}, \vec{u} \times \vec{v}] &= [\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] \Leftrightarrow (\vec{w} \times \vec{z}) \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = [(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}] \cdot \vec{z} \\ &\Leftrightarrow (\vec{w} \times \vec{z}) \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = -[\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})] \cdot \vec{z} = -[(\vec{w} \bullet \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \bullet \vec{u})\vec{v}] \cdot \vec{z} \\ &= (\vec{w} \bullet \vec{u})(\vec{v} \bullet \vec{z}) - (\vec{w} \bullet \vec{v})(\vec{u} \bullet \vec{z}) \end{aligned}$$

■ Se  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base do espaço e  $\vec{X}$  um vetor qualquer, vamos mostrar que

$$\vec{X} = \frac{1}{\Delta}[\vec{X}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{u} + \frac{1}{\Delta}[\vec{u}, \vec{X}, \vec{w}]\vec{v} + \frac{1}{\Delta}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{X}]\vec{w}$$

onde  $\Delta = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ .

**SOLUÇÃO** Do Exercício ??, temos:

(i)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{x}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]\vec{w} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{x}$ .

(ii)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{x}) = -(\vec{w} \times \vec{x}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -([\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}]\vec{u} - [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}]\vec{v}),$

de onde resulta que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]\vec{w} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{x} = -[\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}]\vec{u} + [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}]\vec{v}.$$

Se na última igualdade isolarmos  $\vec{x}$  no 1º membro, chegaremos ao resultado.

Consideremos, agora, o sistema linear  $3 \times 3$  :

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = d_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z = d_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (*)$$

e os vetores  $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ ,  $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ ,  $\vec{w} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$  e  $\vec{X} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$ , de

modo que  $\vec{X} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ . Se o determinante

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

é não nulo, então os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  formam uma base do espaço e, portanto, os escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$  são únicos, ou seja, a solução do sistema (\*) é única e esta vem dada por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

onde os determinantes  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  e  $\Delta_z$  são obtidos a partir do  $\Delta$ , do modo seguinte:

$$\Delta_x = \det \begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_y = \det \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & a_3 \\ a_2 & d_2 & b_3 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_z = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & c_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

No caso em que o sistema é homogêneo, isto é,  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , então a única solução do sistema é  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

### REVISANDO O CONTEÚDO

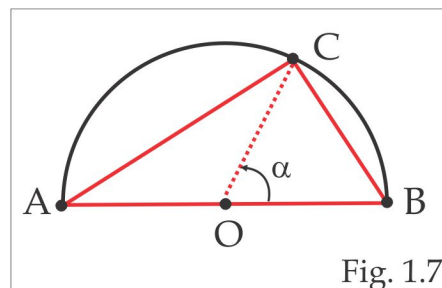
1. Dado um ponto  $P(x, y, z)$ , o que representam, em termos de distâncias, as quantidades:

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{y^2 + z^2} ?$$

E as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  o que medem?

2. Como devem ser os escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$ , para que o ponto  $P(x, y, z)$  esteja sobre:
  - (a) o eixo  $x$
  - (b) o eixo  $y$
  - (c) o eixo  $z$
  - (d) o plano  $xy$
  - (e) o plano  $xz$
  - (f) o plano  $yz$ .
3. Como verificar se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares? Três pontos são sempre coplanares? E três vetores?
4. O que são segmentos orientados equipolentes? Vetores determinados por segmentos orientados equipolentes são iguais?
5. O que é *Combinação Linear* dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ ? E *Base* do espaço  $\mathbb{R}^3$ , o que é?
6. O que são Vetores LI e vetores LD? Vetores colineares são LI ou LD? E coplanares? Qual argumento algébrico se usa para testar a dependência linear entre vetores?
7. O que é  $\|\vec{a}\|$ ? Em que condições se tem  $\|\vec{a}\| = 0$ ?
8. O que é um vetor unitário? Dado um vetor não nulo  $\vec{a}$  quantos vetores unitários e colineares com  $\vec{a}$  existem? Como determiná-los?

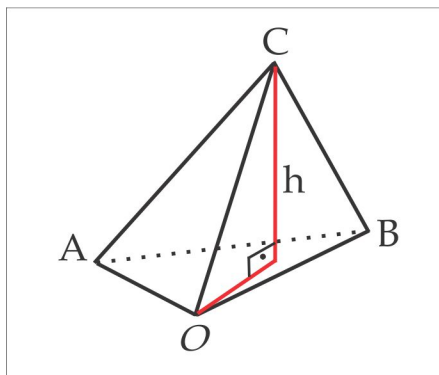
9. Sob que condições três vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  podem ser representados pelos lados de um triângulo?
10. Como verificar se quatro pontos  $A, B, C$  e  $D$  são coplanares ou não?
11. Identifique o plano gerado pelos seguintes pares de vetores: (a)  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$  (b)  $\vec{i}$  e  $\vec{k}$  (c)  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ .
12. Na representação  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  como são denominados os escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$ ? Como você relaciona o vetor  $\vec{a}$  e o ponto  $P(x, y, z)$ ?
13. Como se define o produto interno entre dois vetores? Como usar o produto interno para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos?
14. E o produto vetorial, o que é? Que ente geométrico pode ser calculado com o produto vetorial?
15. Para que serve o produto misto?
16. O que é o *plano gerado* por um par de vetores LI? E a *reta gerada* por um vetor não nulo?
17. O que é uma base ortogonal do espaço? E uma base ortonormal, o que é?
18. Como usar o produto interno para achar as coordenadas de um vetor em uma base ortonormal?
19. O triângulo  $ABC$  está inscrito no semicírculo de raio  $R$ , como ilustra a Figura 1.7 abaixo. Mostre que o triângulo é retângulo no vértice  $C$ .



20. Um vetor não nulo  $\vec{v}$  forma com os eixos  $Ox$  e  $Oy$  os ângulos  $\alpha = 120^\circ$  e  $\beta = 45^\circ$ , respectivamente. Determine o ângulo entre  $\vec{v}$  e o eixo  $Oz$ .
21. Dois ângulos diretores de um vetor  $\vec{v}$  são:  $\alpha = 60^\circ$  e  $\gamma = 120^\circ$ . Se  $\|\vec{v}\| = 2$ , determine as coordenadas do vetor  $\vec{v}$ .
22. Determine os *cosenos diretores* do vetor  $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$ .
23. Determine dois vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , de norma 75, paralelos ao vetor  $\vec{u} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$ .

24. Verifique que os vetores  $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$  e  $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$  são ortonormais e determine as coordenadas do vetor  $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  na base  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ .
25. Sejam  $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$  e  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$ . O conjunto  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base do espaço  $\mathbb{R}^3$ ? Essa base é ortonormal? Ela é ortogonal? É possível escrever o vetor  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$  como combinação linear de  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ ?
26. Se  $\|\vec{u}\| = 4$  e  $\|\vec{v}\| = 3$  e o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e entre  $\vec{u} + \vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$  é  $\alpha$ , calcule  $\cos \alpha$ .
27. Se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores unitários tais que  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ , mostre que  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -3/2$ .
28. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores não nulos e ortogonais, determine o valor de  $x$  de modo que os vetores  $\vec{u} + x\vec{v}$  e  $\vec{u} - \vec{v}$  sejam ortogonais.
29. Se  $\|\vec{u}\| = 1$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$  e  $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/6$ , calcule  $\|(2\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})\|$ .
30. Determine dois vetores de norma 3, ortogonais aos vetores  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ .
31. Determine um vetor  $\vec{v}$  tal que  $\vec{v} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 6$  e  $\vec{v} \times (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 4\vec{k}$ .
32. Qual a área do paralelogramo que tem três vértices consecutivos nos pontos  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(2, 1, 3)$  e  $C(3, 2, -5)$ ?
33. Verifique se os pontos  $A(-1, -3, 4)$ ,  $B(-2, 1, -4)$  e  $C(3, -11, 5)$  são vértices de um triângulo. Em caso afirmativo, classifique o triângulo em retângulo, isóceles ou equilátero e calcule sua área.
34. Considere os vetores  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  e  $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ . Construa uma base ortonormal positiva  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , sendo  $\vec{a}$  paralelo ao vetor  $\vec{u}$  e  $\vec{b}$  paralelo ao vetor  $\vec{v}$ . Determine as coordenadas do vetor  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  na base  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ .
35. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto  $A(2, 1, 6)$  e os três vértices adjacentes nos pontos  $B(4, 1, 3)$ ,  $C(1, 3, 2)$  e  $D(1, 2, 1)$ .
36. Considere o triângulo de vértices  $A(3, 2, 1)$ ,  $B(3, 2, 2)$  e  $C(3, 3, 2)$ . Determine:
- (a) Os ângulos do  $\Delta ABC$ ;
  - (b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado;
  - (c) A área do  $\Delta ABC$ ;
  - (d) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.
37. Dados  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$  e  $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$ , construa uma base ortonormal negativa  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , sendo  $\vec{u}$  paralelo ao vetor  $\vec{a}$  e  $\vec{v}$  coplanar com  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

38. Seja  $x < 0$  e considere os vetores  $\vec{u} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$ ,  $\vec{v} = x\vec{i} - 2x + 2x\vec{k}$  e  $\vec{w} = 2x\vec{i} - x\vec{j} - 2x\vec{k}$ . Mostre que  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base ortogonal negativa. Determine o(s) valor(es)  $x$  que torna(m) a base ortonormal e, em seguida, encontre as coordenadas do vetor  $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$  nessa base ortonormal.
39. Verifique que os pontos  $A(4, 6, 2)$ ,  $B(1, 2, 1)$ ,  $C(3, 3, 3)$  e  $D(7, 4, 3)$  são vértices de um paralelepípedo, calcule o volume do sólido e as coordenadas do ponto  $E$ , sendo  $AE$  uma diagonal interna.
40. Mostre que o volume do tetraedro da figura abaixo é:  $V = \frac{1}{6} [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]$ .




---

**RESPOSTAS & SUGESTÕES**


---

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.1

1. Em alguns casos, uma ilustração geométrica ajuda na conclusão.
  - (a) Para que os vetores  $\vec{AB}$  e  $\vec{CD}$  sejam iguais é necessário e suficiente que os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  sejam equipolentes
  - (b) Segmentos equipolentes determinam o mesmo vetor.
  - (c) Dois vetores são Linearmente Dependentes (LD) quando possuírem representantes paralelos. Tais representantes podem ser colineares ou não.
  - (d) O plano que contém representantes dos vetores  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  também contém pontos do espaço, que são representantes do vetor nulo  $\vec{a}$ .
  - (e) Os pontos não alinhados  $A$ ,  $B$  e  $C$  podem ser determinados de tal forma que os segmentos orientados  $OA$ ,  $OB$  e  $OC$  sejam coplanares. Neste caso, os vetores  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$  são LD.

- (f) Seriam equipolentes se tivessem o mesmo sentido. Por exemplo, os segmentos orientados e não nulos  $AB$  e  $BA$  são colineares, de mesmo comprimento e, contudo, não são equipolentes.
- (g) O quadrilátero de vértices  $A, B, C$  e  $D$  é um paralelogramo.
- (h) Qualquer ponto do espaço é um representante do vetor nulo.
- (i) O quadrilátero de vértices  $A, B, C$  e  $D$  é um paralelogramo, mas, não um quadrado, necessariamente.
- (j) É isso que estabelece o conceito de vetor.
- (k) Os dois vetores LI determinados pelos 3 pontos não colineares geram o plano que contém os três pontos.
- (l) Quaisquer dois vetores (LI ou LD) são sempre coplanares.
- (m) Se não fossem coplanares, seriam geradores do espaço e, portanto, LI.
- (n) Eles podem ser coplanares e não colineares.
2. Recorde-se que  $2\vec{u}$  tem mesma direção e sentido que  $\vec{u}$  e  $-\vec{v}$  tem sentido oposto ao vetor  $\vec{v}$ .
3. Decorre da equipolência dos segmentos orientados  $AD$  e  $BC$ .
4. Observando a Figura 1.12, vemos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

e, somando essas expressões, chegamos ao resultado.

5. (a)  $\overrightarrow{AC}$     (b)  $\overrightarrow{CA}$     (c)  $\overrightarrow{AB}$     (d)  $\overrightarrow{BD}$ .
6. O vetor procurado é  $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$
7.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$ .
8. Seja  $M$  o ponto médio da diagonal  $AC$  e mostremos que  $M$  é ponto médio da diagonal  $DB$ .

Observando a Figura 1.9, vemos que  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$ , e considerando que  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ , resulta  $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ .

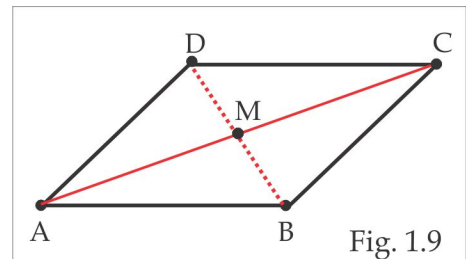
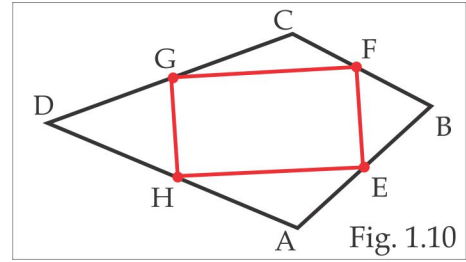


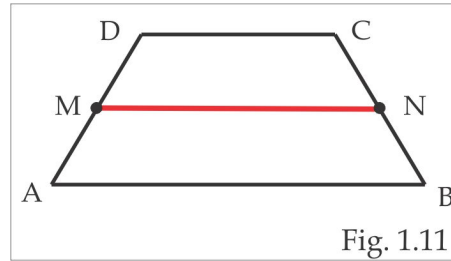
Fig. 1.9

9. No quadrilátero da Figura 1.10,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  são os pontos médios dos lados.

É suficiente mostrar que  $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$  e  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ .  
 Temos  $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ , e, de modo similar, encontramos  $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ .



10. Observe o trapézio da Figura 1.11 abaixo, em que  $M$  e  $N$  são os pontos médios de  $AD$  e  $BC$ , respectivamente.



Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

11. (a) Devemos encontrar escalares  $x$  e  $y$ , tais que  $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{BC}$ . Observando a Figura 1.4, vemos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

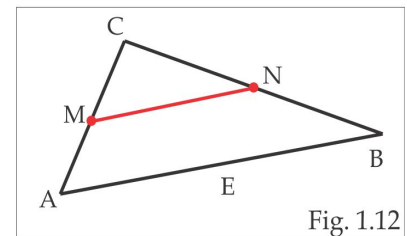
(b)  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  (c)  $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ .

(c)  $-\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD}$ .

12. No triângulo da Figura 1.12,  $M$  e  $N$  são os pontos médios dos lados  $AC$  e  $BC$ , respectivamente.

É suficiente mostrar que  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ . De fato,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$





13. O *baricentro* de um triângulo é, por definição, o encontro das *medianas* do triângulo, como ilustra a Figura 1.14.

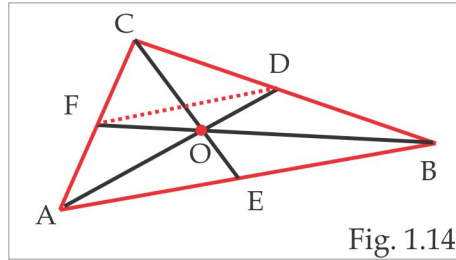


Fig. 1.14

Suponhamos que o ponto  $O$  divida a mediana  $AD$  na razão de 2 para 1 e mostremos que o ponto  $O$  também divide a mediana  $BF$  na mesma razão. De fato, segue do Exercício 12 que  $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DF}$  e, assim:

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DF} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}.$$

14. Do Exercício 13 segue que  $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$  e  $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ . Então:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE}) = \frac{2}{3}[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE})] = \\ &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

15. Na Figura 1.13 ilustramos a situação geométrica, onde vemos que

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}, \text{ e considerando que } \overrightarrow{PA} = \frac{n}{m} \cdot \overrightarrow{AQ},$$

encontramos:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \frac{n}{m} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{n}{m} (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}).$$

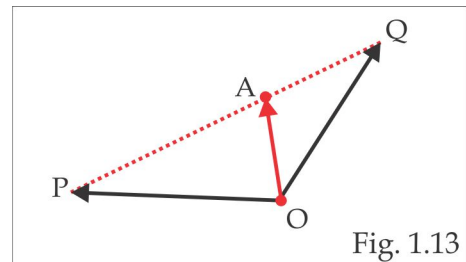


Fig. 1.13

16. Lembramos que  $\vec{a}$ , e  $\vec{b}$  são LI se, e somente se, a equação vetorial  $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$  admite apenas a solução nula  $x = 0$  e  $y = 0$ . Considere, então, uma combinação linear nula

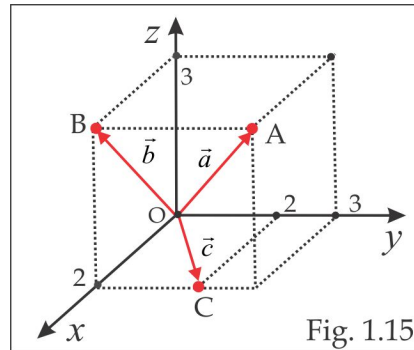
$$x(2\vec{a} + 3\vec{b}) + y(\vec{a} - 6\vec{b}) = \vec{0}$$

e mostre que  $x = 0$  e  $y = 0$ . No caso de três vetores a situação é similar. Três vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , e  $\vec{c}$  são LI se, e somente se, a equação vetorial  $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$  admite apenas a solução nula  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . Recorde-se que uma base é um conjunto constituído de três vetores LI.

17.  $x < 0$  e  $y = 0$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

- (a)  $\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$  (b)  $-15\vec{i} + 2\vec{j} - 22\vec{k}$  (c)  $-5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{15}{2}\vec{k}$  (d)  $-3\vec{i} - 5\vec{k}$ .
- $\vec{v} = -3\vec{u} / \|\vec{u}\| = -\sqrt{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{k}$ .
- O ponto  $B(2, 0, 3)$  jaz no plano  $xz$ , porque tem a ordenada  $y = 0$ , enquanto o ponto  $C(2, 2, 0)$  tem a cota  $z = 0$  e, portanto, jaz no plano  $xy$ . Veja a ilustração geométrica na Figura 1.15.

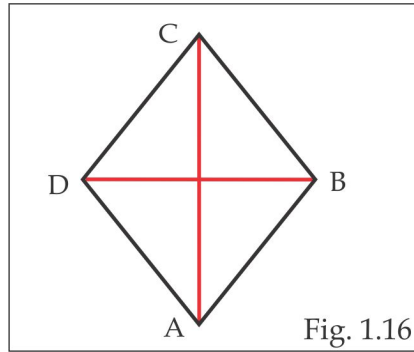


- $\vec{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ;  $\vec{AC} = -4\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$ ;  $\vec{BC} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ .
- $B(4, 6, 8)$ .
- $M(3, 2, 3)$ ,  $\|\vec{PQ}\| = \sqrt{24}$ .
- $\vec{w} = (-\frac{5}{2})\vec{i} + 2\vec{j} + (-\frac{5}{2})\vec{k}$ .
- $D(-8, -2, 7)$ .
- $C(6, -1, 19)$ ;  $D(9, -5, 12)$ .
- (a)  $LI$  (b)  $LD$  (c)  $LI$  (d)  $LD$ .
- $m = 2$  ou  $m = -1$ .
- Com  $m = 4$ , tem-se  $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$ .
- Não.
- $y = 2z$
- (a) Sim. (b) Não.

16. Sim. Tem-se  $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ .
17. Sim, porque os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são *LI*.
18. A base é negativa e  $\vec{v} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{24}{49}\vec{b} + \frac{2}{49}\vec{c}$ .
19.  $\vec{w} = 8\vec{u} + 7\vec{v}$ .
20.  $x \neq 1$  e  $x \neq -2$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 1.3

1. V, F, V, F, F, F, V, V, V, F, V, V, V, V, F, F, V.
2. É suficiente mostrar que os vetores  $\overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{BD}$  são ortogonais (perpendiculares), isto é,  $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \vec{0}$ .  
Veja a ilustração geométrica na Figura 1.16.

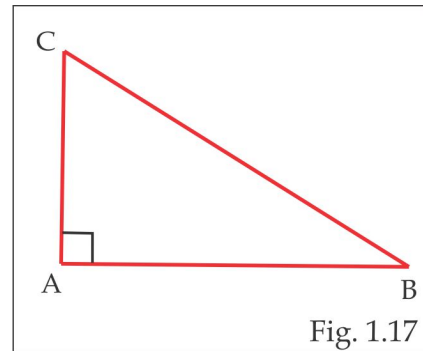


Considere as representações  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  e  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$  e use as propriedades do produto interno para concluir.

3. Da Figura 1.17, vemos que  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  e sendo os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ , então  $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

Temos:

$$\begin{aligned}
 \|\overrightarrow{BC}\|^2 &= \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} \\
 &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \bullet (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\
 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2(\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}) + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\
 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2
 \end{aligned}$$



4. O vetor  $\vec{v}$  será ortogonal ao vetor  $\vec{a}$ , quando  $\vec{v} \bullet \vec{a} = 0$ . Ora,

$$\vec{v} \bullet \vec{a} = \vec{b} \bullet \vec{a} - \frac{(\vec{a} \bullet \vec{b})}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \bullet \vec{a} = \vec{b} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} = 0.$$

5. (a) Considerando  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

(b) Temos:

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|. \quad (1.17)$$

De modo similar, encontramos:

$$\|\vec{v}\| - \|\vec{u}\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad (1.18)$$

Combinando (1.17) e (1.18) chega-se ao resultado.

(c) Consequência direta dos Produtos Notáveis.

(d) Consequência direta dos Produtos Notáveis.

6. **Etapa 1.** Normalizamos o vetor  $\vec{a}$  e obtemos o primeiro vetor básico  $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ .

**Etapa 2.** Usando o produto interno, construímos um vetor  $\vec{b}$ , ortogonal ao vetor  $\vec{a}$  e, em seguida, normalizamos  $\vec{b}$  e obtemos o segundo vetor básico  $\vec{v} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ , ortogonal ao vetor  $\vec{u}$ .

**Etapa 3.** Um terceiro vetor básico, unitário e ortogonal aos vetores  $u$  e  $v$ , é:  $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ .

7. Consequência dos Produtos Notáveis:  $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ .

8.  $\sqrt{85}$ .

9. 20.

10. -62.

11.  $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j} - \frac{4}{3}\vec{k}$ .

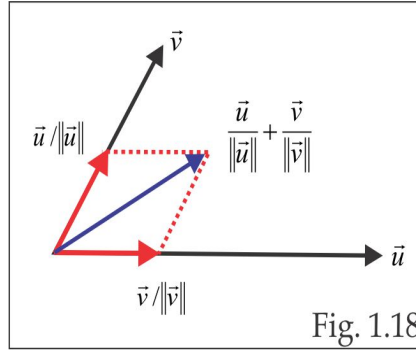
12.  $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$ .

13.  $\vec{u} = -\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j}$ .

14.  $\|\vec{u}\| = 2$  e  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 34$ .

15.  $x = 0$ .

16. O vetor  $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  aponta na direção da bissetriz do ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . O unitário na direção da bissetriz é, portanto,  $\vec{w} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$ . Veja a Figura 1.18.



17.  $\hat{A} = \pi/2$ ;  $\hat{B} = \hat{C} = \pi/4$

18. (a)  $-7$  (b)  $0$  (c)  $7$  (d)  $0$ .

19. (a) coplanares (b) não coplanares.

20. 24.

21. Se  $\vec{a}$  for paralelo a  $\vec{b}$ , então  $\vec{a} + \vec{b}$  será paralelo a  $\vec{a} - \vec{b}$ .

22. Não, porque  $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$ .

23. (a)  $x = \pm 3/5$  (b)  $x \in \mathbb{R}$ , se  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  forem paralelos e  $x = 0$ , caso contrário.

24.  $\vec{v} = 70\vec{i} + 50\vec{j} + 10\vec{k}$ .

25. Decorre das relações:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\|\vec{v}\|}.$$

26. (a) Use coordenadas, desenvolva os dois lados da igualdade e comprove o resultado.

(b) Do item (a), segue que  $\vec{a} \times (\vec{z} \times \vec{w}) = (\vec{a} \cdot \vec{w})\vec{z} - (\vec{a} \cdot \vec{z})\vec{w}$  e considerando  $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v}$  obtemos:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{z} \times \vec{w}) = [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}]\vec{z} - [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}]\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{z} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\vec{w}.$$

27. Da relação

$$\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$$

e dos dados, encontramos  $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = 100$  e, portanto,  $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = 10$ .

28. (a) Se  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$ , então  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{v} = 0$ ,  $\forall \vec{v}$ , e considerando  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ , obtemos:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$

(b) Sabendo que  $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{0}$ ,  $\forall \vec{v}$ , consideramos, sucessivamente,  $\vec{v} = \vec{i}$ ,  $\vec{v} = \vec{j}$  e  $\vec{v} = \vec{k}$ , para deduzir que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  têm as mesmas coordenadas. Logo,  $\vec{a} = \vec{b}$ .

(c) É suficiente mostrar que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ . Para isto, multiplicamos escalarmente a equação  $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$  por  $\vec{w}$  e encontramos:  $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$ , isto é,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .

### QUESTÕES DE REVISÃO

1. A quantidade  $\sqrt{x^2 + y^2}$  representa a distância do ponto  $P(x, y, z)$  ao eixo  $z$ , enquanto a coordenada  $x$  é, em valor absoluto, a distância de  $P$  ao plano  $yz$ .
2. (a)  $y = 0$ ,  $z = 0$  (b)  $x = 0$ ,  $z = 0$  (c)  $x = 0$ ,  $y = 0$  (d)  $z = 0$  (e)  $y = 0$  (f)  $x = 0$ .
3. Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares se os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  forem LD, isto é,  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Sim, três pontos são sempre coplanares, podendo ser colineares ou não. Três vetores podem ser coplanares ou não.
4. Dois segmentos orientados são equipolentes, quando possuírem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento. Segmentos orientados são equipolentes determinam o mesmo vetor.
5. Qualquer expressão do tipo  $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$ , com  $x, y$  e  $z$  escalares, é uma *combinação linear* dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Uma *base* do  $\mathbb{R}^3$  é qualquer conjunto constituído de três vetores não coplanares (LI). Um fato fundamental é que qualquer vetor do espaço se expressa, de modo único, como combinação linear dos vetores da base.
6. Dois vetores são LD quando forem paralelos, isto é, possuírem representantes colineares. Três vetores são LD quando possuírem representantes coplanares, podendo ser colineares ou não. A

dependência linear pode ser investigada a partir da combinação linear nula ou usando produtos entre vetores:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são LD se, e somente se, } \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ são LD se, e somente se, } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0.$$

7. A quantidade  $\|\vec{a}\|$  é a *norma* do vetor  $\vec{a}$  e é igual ao comprimento de qualquer representante do vetor  $\vec{a}$ . Temos que  $\|\vec{a}\| = 0$  se, e somente se,  $\vec{a} = \vec{0}$  (o único vetor de norma zero é o vetor nulo).
8. Um vetor  $\vec{a}$  diz-se *unitário* se  $\|\vec{a}\| = 1$ . Se  $\vec{a}$  é um vetor não nulo, existem dois e somente dois vetores unitários, colineares com  $\vec{a}$ , os quais são dados por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

9. Os vetores  $\vec{a}, \vec{b}$  e  $\vec{c}$  não devem ser colineares e  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ .
10. Se  $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$ , os pontos  $A, B, C$  e  $D$  serão coplanares.
11. Os planos coordenados  $xy, xz$  e  $yz$ , respectivamente.
12. Os escalares  $x, y$  e  $z$  são as coordenadas do vetor  $\vec{a}$  na base  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  e temos  $\vec{a} = \vec{OP}$ .
13. O produto interno entre os vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é o número real definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

onde  $\theta$  é o menor ângulo positivo entre dois representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , com mesma origem. O ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é calculado pela relação:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

No caso em que um dos vetores é nulo, o produto interno é definido com sendo zero.

14. O produto vetorial entre os vetores não paralelos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$ , caracterizado por:

(i) **COMPRIMENTO:**  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| |\sin \theta|.$

(ii) **DIREÇÃO:**  $\vec{u} \times \vec{v}$  é perpendicular ao plano gerado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

(iii) **SENTIDO:** O terço ordenado  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é positivo.

A quantidade  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$  representa a área do paralelogramo cujos lados não paralelos são representantes de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . No caso em que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares (paralelos) define-se o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  como sendo o vetor nulo  $\vec{0}$ .

15. Podemos usar o produto misto para testar a dependência linear entre três vetores e, também, para calcular o volume do paralelepípedo, cujas arestas são representantes de três vetores LI (não coplanares).
16. O *plano gerado* pelos vetores LI  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é o *lugar geométrico* constituído pelos vetores da forma  $x\vec{u} + y\vec{v}$ , com  $x$  e  $y$  números reais. Por outro lado, a *reta gerada* pelo vetor não nulo  $\vec{u}$  é o *lugar geométrico* constituído pelos vetores da forma  $t\vec{u}$ , sendo  $t$  um número real.
17. Uma base *ortogonal* do espaço é qualquer conjunto constituído por três vetores LI, mutuamente ortogonais. Se, além de ortogonais, os três vetores forem unitários (de norma igual a 1) a base denominar-se-á *base ortonormal*. Por exemplo,  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  é uma base ortonormal.
18. Dada uma base ortonormal  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , qualquer vetor  $\vec{a}$  do espaço se expressa, de maneira única, sob a forma:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$

e as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  são dadas por:

$$x = \vec{a} \cdot \vec{u}, \quad y = \vec{a} \cdot \vec{v} \quad \text{e} \quad z = \vec{a} \cdot \vec{w}.$$

19. É suficiente mostrar que  $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$ . Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \bullet (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = \\ &= \overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} \\ &= R^2 - R^2 + R^2 \cos(\pi - \alpha) + R^2 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

20.  $60^\circ$ .

21.  $\vec{v} = \vec{i} \pm \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$ .

22.  $\cos \alpha = 4/13$ ,  $\cos \beta = 3/13$  e  $\cos \gamma = 12/13$ .

23.  $\vec{v} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$  e  $\vec{w} = -\vec{v}$ .

24.  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{7}{\sqrt{3}}\vec{k}$ .



25.  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é uma base não ortogonal. Não sendo ortogonal, não pode ser ortonormal. Temos  $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ .
26.  $\pm 1$  e  $\pm \frac{7}{24}$ .
27. Multiplique a equação  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$  escalarmente por  $\vec{u}$ , por  $\vec{v}$  e depois por  $\vec{w}$  e some os resultados.
28.  $x = (\|\vec{u}\| / \|\vec{v}\|)^2$ .
29.  $9/2$ .
30.  $\vec{v} \pm \frac{3}{\sqrt{11}}(\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$ .
31.  $\vec{v} = \frac{24}{13}\vec{i} + \frac{10}{13}\vec{j}$ .
32.  $A = 10\sqrt{2}$ .
33. Isóceles e  $A = 5\sqrt{185}$ .
34. Primeiro, observe que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais. Considere  $\vec{a} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ ,  $\vec{b} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  e  $\vec{c} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$ .
35.  $V = 15$ .
36. a.  $\hat{A} = 45^\circ$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$  e  $\hat{C} = 45^\circ$     b.  $\text{Proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$     c.  $1/2$     d.  $h = \sqrt{2}/2$ .
37. Considere  $\vec{u} = \vec{a} / \|\vec{a}\|$ ,  $\vec{v} = (\vec{a} + 9\vec{b}) / \|\vec{a} + 9\vec{b}\|$  e  $\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) / \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ .
38.  $x = \pm 1/3$  e  $\vec{v} = \frac{-5}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{10}{3}\vec{w}$ .
39. Basta verificar que  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \neq 0$ . O volume é precisamente o valor absoluto do produto misto. O ponto  $E$  é tal que:
- $$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD},$$
- de modo que  $\text{vol} = 24$  e  $E(3, -3, 3)$ .
40. Recorde-se que o volume do tetraedro é:  $\frac{1}{3}(\text{área da base}) \times h$  e que a área da base pode ser calculada pela norma do produto vetorial.
-





## Introdução

Um plano  $\alpha$  é o lugar geométrico (conjunto de pontos) constituído dos pontos  $P(x, y, z)$  do espaço  $\mathbb{R}^3$ , governados por uma equação do primeiro grau nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad (2.1)$$

sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes reais. Em símbolos escrevemos:

$$P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0.$$

O *Grau de Liberdade* (anota-se  $GL$ ) de uma sistema é o número de variáveis menos o número de equações. No sistema (2.1) temos  $GL = 3 - 1 = 2$  e para encontrar pontos do plano  $\alpha$  escolhemos duas variáveis livres, às quais serão atribuídos valores arbitrários, e a terceira variável é calculada a partir da equação (2.1). Por exemplo, no caso em que o coeficiente  $c$  é não nulo, escolhendo  $x$  e  $y$  como variáveis livres e atribuindo valores  $x = \lambda$  e  $y = \mu$ , obtemos da equação:

$$z = -\frac{d}{c} - \frac{a\lambda}{c} - \frac{b\mu}{c}.$$

Este processo sugere a descrição do plano  $\alpha$  em função dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ , pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = (-a\lambda - b\mu - d) / c \end{cases} \quad (2.2)$$

O mesmo plano  $\alpha$  está descrito pela Equação Cartesiana (2.1) e pelas Equações Paramétricas (2.2). Na forma paramétrica, um ponto  $P(x, y, z)$  do plano  $\alpha$  é encontrado atribuindo-se valores aos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  e calculando-se os correspondentes valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**EXEMPLO 2.0.1** A equação  $x + y = 1$  é do tipo (2.1) e, portanto, representa no espaço  $\mathbb{R}^3$  um certo plano  $\alpha$ . Um fato que nos chama a atenção é que a variável  $z$  não figura na equação e isto indica que  $z$  é uma variável livre e assume qualquer valor real; do ponto de vista gráfico, isso significa que o plano  $\alpha$  é paralelo ao eixo  $Oz$ . Considerando na equação  $x = 1$  e  $z = 0$ , obtemos  $y = 0$  e encontramos o ponto

$A(1,0,0)$  do plano  $\alpha$ ; considerando, agora,  $x = 0$  e  $z = 0$ , encontramos no plano o ponto  $B(0,1,0)$ . Na forma paramétrica, o plano  $\alpha$  é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \mu, \quad \text{com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A Figura 2.1 ilustra graficamente uma porção do plano  $\alpha$  no primeiro diedro ( $1^\circ$  octante). No plano  $xy$

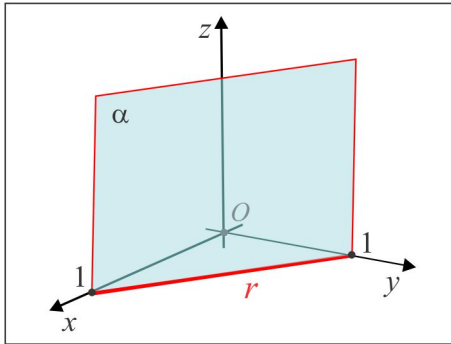


Figura 2.1: O plano  $\alpha : x + y = 1$ .

a equação  $x + y = 1$  representa a reta  $r$  que passa nos pontos  $A(1,0,0)$  e  $B(0,1,0)$  e esta reta é descrita no espaço  $\mathbb{R}^3$  pelo par de equações:

$$x + y = 1 \quad \text{e} \quad z = 0$$

que graficamente corresponde à interseção do plano  $\alpha : x + y = 1$  com o plano  $xy : z = 0$ .

**EXEMPLO 2.0.2** Seja  $\beta$  o plano descrito na forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu, \quad \text{com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Para encontrar pontos do plano  $\beta$ , atribuímos valores aos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ . Por exemplo, com  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$  encontramos o ponto  $A(1,0,0)$ ; já a escolha  $\lambda = 0$  e  $\mu = 1$  nos dá o ponto  $B(0,1,0)$ . O ponto  $C(0,0,1)$  corresponde à escolha  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$ .

(b) Se na expressão que define  $z$  substituirmos  $\lambda$  e  $\mu$  por  $x$  e  $y$ , respectivamente, chegaremos à equação cartesiana do plano  $\beta$ :

$$\beta : x + y + z = 1.$$

(c) As interseções do plano  $\beta$  com os planos coordenados  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$  são as retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , determinadas considerando na equação cartesiana  $z = 0$ ,  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente. Temos, portanto, as retas interseções:

$$r_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_3 : \begin{cases} y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

(d) Ilustração gráfica da porção do plano  $\beta$  no 1º octante.

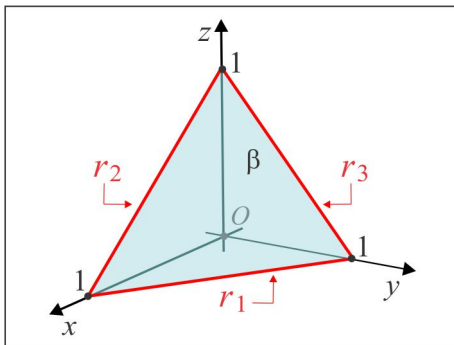


Figura 2.2: O plano  $\beta$  do Exemplo 2.0.2.

## 2.1 O plano no Espaço $\mathbb{R}^3$

Encontrar a equação de um plano torna-se um processo simples, quando conhecemos os elementos necessários que o determinam. Basicamente, um plano é determinado conhecendo-se um ponto por onde ele passa e um vetor normal. Por vetor normal a um plano  $\alpha$  entendemos um vetor  $\vec{n}_\alpha$  que é perpendicular (ortogonal) a qualquer vetor com representante no plano  $\alpha$ .

### 2.1.1 Equação Normal do Plano

A Figura 2.3 ilustra um plano  $\alpha$  passando no ponto  $A$  e normal ao vetor  $\vec{n}_\alpha$ . Um ponto  $P(x, y, z)$  do espaço está sobre o plano  $\alpha$  se, e somente se, os vetores  $\vec{n}_\alpha$  e  $\overrightarrow{AP}$  são ortogonais. Em símbolos, escrevemos:

$$P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \bullet \overrightarrow{AP} = 0. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a *Equação Normal* do plano e conhecendo o ponto  $A(x_A, y_A, z_A)$  e o vetor

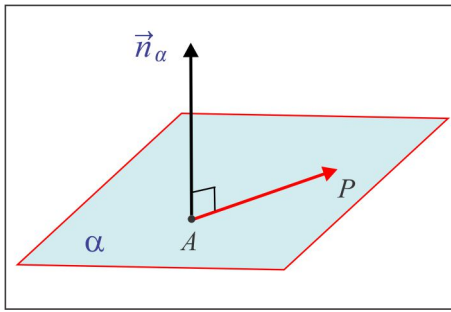


Figura 2.3: Plano Normal a um Vetor.

$\vec{n}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ , temos  $\overrightarrow{AP} = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k}$  e de (2.3) resulta:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) pode ser posta na forma:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2.5)$$

onde  $d = -ax_A - by_A - cz_A$ . A equação (2.5) é a equação cartesiana do plano que passa no ponto  $A$  e é normal ao vetor  $\vec{n}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Ressaltamos que na equação (2.5) os coeficientes de  $x$ ,  $y$  e  $z$  são precisamente as coordenadas do vetor normal.

**EXEMPLO 2.1.1** Qual a equação cartesiana do plano  $\alpha$  que passa no ponto  $A(1, -2, 3)$  e é normal ao vetor  $\vec{n} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ? O ponto  $B(1, 1, 1)$  jaz no plano  $\alpha$ ?

**Solução:** A equação do plano é da forma:

$$x - 3y + 4z + d = 0$$

e resta-nos calcular o valor do coeficiente  $d$ , o qual é obtido por substituição direta do ponto  $A$  na equação. Temos:

$$1 - 3(-2) + 4(3) + d = 0 \Rightarrow d = -19$$

e a equação cartesiana do plano  $\alpha$  é:  $x - 3y + 4z = 19$ . O ponto  $B$  não pertence ao plano, porque suas coordenadas não satisfazem à equação do plano.

**EXEMPLO 2.1.2 (Vetor Normal)** Dado um plano  $\alpha$  de equação cartesiana:

$$\alpha : ax + by + cz = d$$

o vetor  $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  é normal ao plano  $\alpha$ . De fato, considerando no plano um vetor genérico  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , com  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$ , temos  $\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$  e, assim:

$$\begin{aligned}\vec{n} \bullet \vec{v} &= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) \\ &= (ax_2 + by_2 + cz_2) - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= d - d = 0,\end{aligned}$$

de onde segue que  $\vec{n}$  é ortogonal a qualquer vetor com representante no plano  $\alpha$ .

### 2.1.2 Plano determinado por 3 Pontos

Um dos axiomas de geometria plana estabelece que três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$  determinam um plano. Designemos por  $\alpha$  tal plano e consideremos os vetores  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , como ilustra a Figura 2.4.

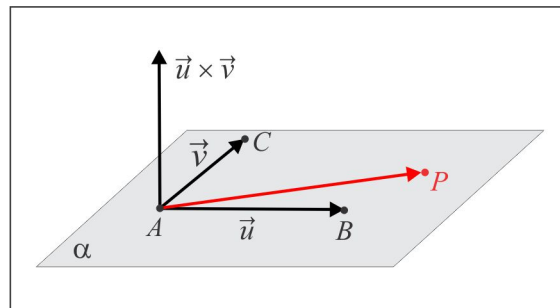


Figura 2.4: Plano determinado por 3 pontos.

**EQUAÇÃO CARTESIANA:** Lembrando que o vetor  $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$  é normal ao plano  $\alpha$ , usamos a equação normal e obtemos:

$$P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{AP} \bullet (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0.$$

Dessa forma, encontramos a equação cartesiana do plano  $\alpha$  a partir do produto misto:

$$[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = 0,$$

e considerando os pontos  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$  e  $C(x_C, y_C, z_C)$ , obtemos a equação na forma matricial:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

**EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS:** Os três vetores  $\vec{AP}$ ,  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$  sendo coplanares, existem parâmetros (números)  $\lambda$  e  $\mu$ , tais que:

$$\boxed{\vec{AP} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}.} \quad (2.6)$$

A equação vetorial (2.6) que representa o plano  $\alpha$  é equivalente ao sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\lambda + (x_C - x_A)\mu \\ y = y_A + (y_B - y_A)\lambda + (y_C - y_A)\mu \\ z = z_A + (z_B - z_A)\lambda + (z_C - z_A)\mu. \end{cases} \quad (2.7)$$

As equações (2.7) descrevem o plano  $\alpha$  em função dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  e recebem o nome de *Equações Paramétricas* do plano  $\alpha$ .

**OBSERVAÇÃO 2.1.3** Uma situação semelhante ocorre quando se conhece um ponto  $A(x_A, y_A, z_A)$  do plano e dois vetores LI  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , paralelos ao plano, como ilustra a Figura 6.5.

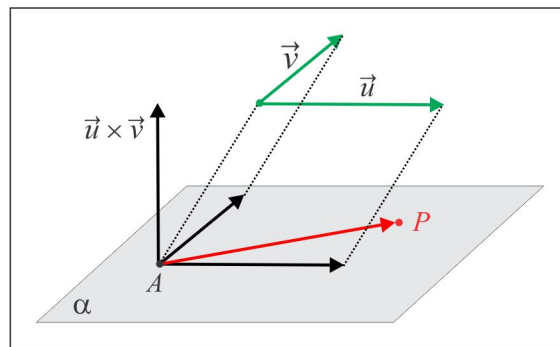


Figura 2.5: Plano determinado por ponto e 2 vetores LI.

Considerando os vetores  $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$  e  $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ , obtemos a equação cartesiana:

$$\boxed{[\vec{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0}$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

**EXEMPLO 2.1.4** De acordo com (2.8), o plano  $\alpha$  que passa nos pontos  $A(1, 0, -1)$ ,  $B(1, 1, 2)$  e  $C(-2, 1, 0)$



é governado pela equação cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e calculando o determinante, encontramos:

$$\alpha : 2x + 9y - 3z = 5.$$

Na forma paramétrica, o plano é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} x = 1 - 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = -1 + 3\lambda + \mu. \end{cases}$$

### 2.1.3 Posição Relativa entre dois Planos

A posição relativa de dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  é estabelecida a partir dos vetores normais  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$ . Na Figura 2.6 ilustramos duas situações em que os planos são: (a) paralelos ou (b) ortogonais.



Figura 2.6: Posição relativa.

- (a) No caso (a) os planos são paralelos (anota-se  $\alpha // \beta$ ) e isto ocorre se, e somente se,  $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}$ .
- (b) No caso (b) os planos são ortogonais (anota-se  $\alpha \perp \beta$ ) e isto ocorre se, e somente se,  $\vec{n}_\alpha \bullet \vec{n}_\beta = 0$ .

A Figura 2.7 ilustra a situação gráfica de dois planos  $\alpha$  e  $\beta$  não paralelos nem ortogonais, onde destacamos que a reta  $r$  interseção de  $\alpha$  e  $\beta$  tem a direção do produto vetorial  $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$ .

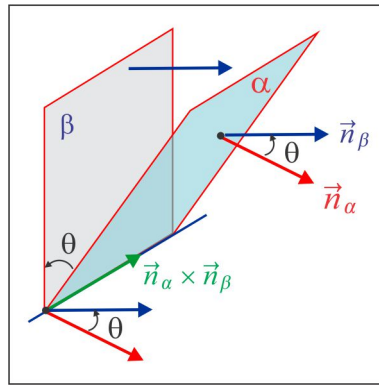


Figura 2.7: O ângulo entre dois planos.

Neste caso, o ângulo  $\theta$  entre os planos é o menor ângulo orientado entre dois vetores normais  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$  e, dessa forma, temos:

$$\cos \theta = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)|. \quad (2.9)$$

Recorde-se que se o vetor  $\vec{n}$  é normal a um plano, então o vetor  $-\vec{n}$  também o é, e daí a necessidade de colocar o módulo na expressão do cosseno.

**EXEMPLO 2.1.5** Vamos analisar as posições relativas entre os planos:

$$\alpha : 2x + y - z = 0, \quad \beta : 4x + 2y - 2z + 3 = 0 \quad e \quad \gamma : x - 2y - z + 1 = 0.$$

**Solução** Primeiro, construímos vetores normais aos planos:

$$\vec{n}_\alpha = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{n}_\beta = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \quad e \quad \vec{n}_\gamma = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

e observamos que  $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$  e daí resulta que  $\vec{n}_\beta // \vec{n}_\alpha$  e, portanto, os planos  $\alpha$  e  $\beta$  são paralelos. Por outro lado:

$$\cos(\alpha, \gamma) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\gamma\|} = \frac{1}{6}$$

e os planos  $\alpha$  e  $\gamma$  não são paralelos e têm uma reta  $r$  em comum, como ilustra a Figura 2.8.

A reta  $r$  interseção de  $\alpha$  e  $\gamma$  é o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$ , cujas coordenadas satisfazem ao sistema (2.10), constituído pelas equações cartesianas dos planos  $\alpha$  e  $\gamma$ :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = -1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ressaltamos que os pontos da reta  $r$  são precisamente as soluções do sistema (2.10), as quais são determinadas observando que o grau de liberdade do sistema é  $G = 3 - 2 = 1$ .

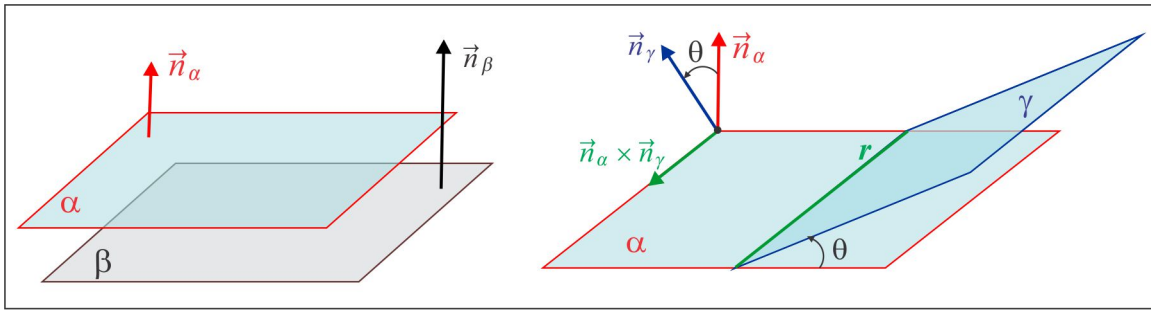


Figura 2.8: A reta  $r$  interseção de  $\alpha$  e  $\gamma$ .

**EXEMPLO 2.1.6** Explorando a reta  $r$  do Exemplo 2.1.5.

- (a) O grau de liberdade do sistema que define a reta  $r$  é igual a 1 e isto nos autoriza atribuir valor a uma das variáveis, considerada livre, e calcular as outras duas a partir do sistema de equações resultante. Cada procedimento deste nos dará um ponto da reta. Por exemplo, considerando  $y = 0$ , chegamos ao sistema  $2 \times 2$ :

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

cuja solução é  $x = 1$  e  $z = 2$ . Assim, encontramos o ponto  $A(-1, 0, 2)$  da reta  $r$ . Considerando, agora,  $x = 0$ , chegamos ao sistema  $2 \times 2$ :

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

com solução  $y = 1/3$  e  $z = 1/3$  e construímos o ponto  $B(0, 1/3, 1/3)$  da reta  $r$ .

- (b) O vetor  $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{5}{3}\vec{k}$  é paralelo à reta  $r$  e agora temos um ponto  $A$  da reta e a direção  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ .

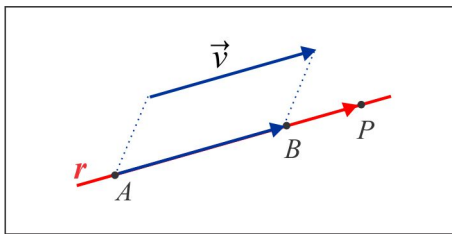


Figura 2.9: A reta  $r$  do Exemplo 2.1.6.

A ilustração gráfica indica que um ponto  $P(x, y, z)$  está sobre a reta  $r$  se, e somente se, os vetores  $\overrightarrow{AP}$  e  $\vec{v}$  são colineares, isto é, existe um *parâmetro*  $t$ , tal que  $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Esta equação vetorial é equivalente ao terno de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 + \frac{1}{3}t \\ z = 2 - \frac{5}{3}t \end{cases} \quad (2.11)$$

que descrevem a reta  $r$ . Cada valor atribuído ao parâmetro  $t$  produz um ponto da reta; o ponto correspondente a  $t = 0$  é precisamente o ponto  $A$  da reta  $r$ , obtido a partir de (2.11) com  $t = 0$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. Classifique as afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando cada resposta.
  - (a) ( ) Um ponto  $A(x, y, z)$  pertence ao eixo  $z$  se, e somente se,  $x = 0$  e  $y = 0$ .
  - (b) ( ) Um ponto  $A(x, y, z)$  pertence ao plano  $xz$  se, e somente se,  $y = 0$ .
  - (c) ( ) Dados dois pontos  $A$  e  $B$ , existe um único plano que os contém.
  - (d) ( ) Um plano  $\alpha$  paralelo aos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é ortogonal aos vetores  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $\vec{v} \times \vec{u}$ .
  - (e) ( ) Se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não estão alinhados, então existe um único plano que os contém.
  - (f) ( ) Dados um ponto  $A$  e um vetor  $\vec{v}$ , existe uma única reta passando por  $A$ , ortogonal a  $\vec{v}$ .
  - (g) ( ) Paralelo ao plano  $xy$ , existe um único plano que contém o ponto  $A(1, 1, 1)$ .
  - (h) ( ) Se  $l$  e  $r$  são duas retas concorrentes, existe um único plano que as contém.
  - (i) ( ) Duas retas não paralelas sempre têm um ponto em comum.
  
2. Enumere a coluna da direita, observando se o ponto pertence ao lugar geométrico.
 

|                  |   |
|------------------|---|
| (1) $A(0, 0, 1)$ | ( ) plano $\alpha : x + y + z - 6 = 0$      |
| (2) $B(0, 1, 0)$ | ( ) plano $xy$                              |
| (3) $C(1, 0, 0)$ | ( ) reta $l : x = t, y = t, z = t$          |
| (4) $D(x, y, 0)$ | ( ) eixo $x$                                |
| (5) $E(0, y, z)$ | ( ) plano $y = 0$                           |
| (6) $F(x, 0, z)$ | ( ) eixo $z$                                |
| (7) $G(1, 2, 3)$ | ( ) interseção dos planos $z = 0$ e $x = 0$ |
| (8) $H(1, 1, 1)$ | ( ) plano $x = 0$                           |

3. Determine as interseções do plano  $\pi : 3x + 2y - z = 5$  com os eixos e com os planos coordenados.
4. Seja  $\pi$  o plano de equações paramétricas:  $x = 4 - \lambda + 2\mu$ ,  $y = 2 + \lambda$  e  $z = 3\lambda - \mu$ .
  - (a) Verifique que o ponto  $A(4, 2, 0)$  jaz no plano  $\pi$ ;
  - (b) Determine dois outros pontos  $B$  e  $C$  do plano  $\pi$ ;
  - (c) Encontre dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  paralelos ao plano  $\pi$ ;
  - (d) Determine a equação cartesiana do plano  $\pi$ .
5. O plano  $\pi$  passa nos pontos  $A(3, 1, 2)$ ,  $B(4, -1, -1)$  e  $C(2, 0, 2)$ . Descreva o plano  $\pi$  nas formas cartesiana e paramétrica.
6. Interprete, geometricamente, as condições abaixo impostas ao plano  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ .
  - (a)  $a = 0$    (b)  $b = 0$    (c)  $c = 0$    (d)  $a = 0$  e  $b = 0$    (e)  $d = 0$ .
7. Determine o plano  $\alpha$  que contém o ponto  $A(2, 1, -1)$  e é ortogonal ao vetor  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ . Os pontos  $B(0, -1, 0)$  e  $C(2, 1, -1)$  jazem nesse plano? Justifique.
8. Determine quatro vetores LD e não colineares, de normas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, paralelos ao plano  $\alpha : 3x + 2y - z = 4$ .
9. Determine o plano que contém o eixo  $Oz$  e passa pelo ponto  $A(4, 3, 1)$ .
10. A equação  $x = 1$  representa: um ponto (em  $\mathbb{R}$ ); uma reta (em  $\mathbb{R}^2$ ); um plano (em  $\mathbb{R}^3$ ). Se  $\alpha$  representa o plano de equação  $x = 1$ , determine:
  - (a) Dois pontos do plano  $\alpha$    (b) um vetor  $\vec{n}$ , normal ao plano  $\alpha$ , de comprimento 3.
11. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto  $A(1, 2, 2)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ .
12. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos  $A(2, -1, 3)$  e  $B(3, 1, 2)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ .
13. Qual valor de  $m$  faz com que o ponto  $A(m, m + 2, 2)$  pertença ao plano  $\pi : 2x - y - 3z + 5 = 0$ ? O plano  $\pi$  passa pela origem? De forma genérica, como deve ser a equação de um plano que passa pela origem?

14. Descreva, de forma genérica, como se determina um vetor de norma  $\lambda$  ortogonal a um plano dado. Imagine o plano dado na forma cartesiana ou na forma paramétrica.
15. Com base no exercício precedente, determine um vetor de comprimento 15, normal ao plano de equações paramétricas  $x = 3 - 2\lambda - \mu$ ,  $y = 1 + \lambda - 2\mu$ ,  $z = -\lambda - \mu$ .
16. O ponto  $A(2, -1, -1)$  é o pé da perpendicular baixada da origem a um plano  $\pi$ . Determine a equação cartesiana do plano  $\pi$ .
17. Seja  $\pi$  o plano de equação  $2x - 5y + 4z = 3$ . Construa uma base ortonormal negativa  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , de modo que  $\vec{u}$  seja normal e  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sejam paralelos ao plano  $\pi$ .
18. Determine a equação do plano que passa nos pontos  $A(1, 2, 1)$  e  $B(1, 3, 2)$  e faz com o plano  $\pi : x + y + 2z = 11$  um ângulo de  $\pi/3$  rad
19. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos  $A(7, 2, -3)$  e  $B(5, 6, -4)$  e é paralelo ao eixo  $x$ .
20. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano  $5x + 2y - 3z + 6 = 0$ .
21. Um plano  $\alpha$  contém o eixo  $Oz$  e é paralelo ao vetor na direção da bissetriz do ângulo entre  $\vec{i}$  e  $\vec{j}$ . Determine a equação e dê uma idéia geométrica da posição do plano  $\alpha$ .
22. Considere os pontos  $A(7, 2, -3)$  e  $B(5, 6, -4)$ . Determine a equação do plano que passa pelo ponto médio e é ortogonal ao segmento  $AB$ .
23. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  as interseções do plano  $\pi : 4x + 8y + z = 16$  com os eixos coordenados. Calcule a área do triângulo  $ABC$ .
24. Verifique se o pares de planos são paralelos ou perpendiculares.

$$(a) \begin{cases} x = 1 - \lambda + 2\mu, & y = 3\lambda - \mu, & z = 2 + 2\lambda - 2\mu \\ x = 2\lambda + 3\mu, & y = 1 + \mu, & z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ 12x + 6y - 12z = 4 \end{cases}$$

25. Determine  $m$  e  $n$  para que os seguintes pares de equações representem planos perpendiculares.

$$(a) \begin{cases} 3x - 5y + mz = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + my + 3z = 1 \\ nx + y - 3z = 6 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -2x + 7y - 3z = 0 \\ x + my + nz = 1 \end{cases}$$

26. Determine  $m$  e  $n$  para que os seguintes pares de equações representem planos paralelos.

$$(a) \begin{cases} nx - 6y - 6z = 0 \\ 2x + my + 3z = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + my + 2z = 0 \\ 3x - y + nz = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} mx + 3y - 2z = 1 \\ 2x - 5y - nz = 0 \end{cases}$$

27. Identifique o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  equidistantes de  $A(-2, 1, -2)$  e  $B(2, -2, 3)$ .

28. Em cada caso, determine a equação do plano que atende às condições especificadas.

(a) Contém o ponto  $A(1, -2, 4)$  e é paralelo ao plano  $xz$ .

(b) Contém o ponto  $B(2, 2, -1)$  e é paralelo ao eixo  $y$  e ao eixo  $z$ .

(c) Contém os pontos  $A(1, -1, -2)$  e  $B(3, 1, 1)$  e é perpendicular ao plano  $x - y + 3z = 5$ .

(d) Contém o ponto  $A(1, 2, 3)$  e é perpendicular aos planos  $2x - y + 3z = 0$  e  $x + 2y + z = 1$ .

29. Em cada caso, determine a posição relativa e o ângulo entre os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

(a)  $\pi_1 : 2x + y - z = 1$

$\pi_2 : 3x - 5y + z = 4$

(b)  $\pi_1 : x + 2y + 3z = 1$

$\pi_2 : 2x + 4y + 6z = 2$

(c)  $\pi_1 : 2x - 2y + 6z = 6$

$\pi_2 : x = -3\lambda - \mu, y = -\mu, z = \lambda$

(d)  $\pi_1 : 3x + 6y + 3z = 27$

$\pi_2 : 2x + 4y + 2z = 14$

30. Se  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os ângulos diretores de um vetor unitário  $\vec{u}$ , mostre que a equação do plano que contém o ponto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  e é normal ao vetor  $\vec{u}$  é:

$$(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \cos \beta + (z - z_0) \cos \gamma = 0.$$

## 2.2 A Reta no Espaço $\mathbb{R}^3$

Dados um ponto  $A(x_A, y_A, z_A)$  e um vetor não nulo  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ , a reta  $r$  que passa no ponto  $A$  e é paralela ao vetor  $\vec{v}$  é governada pelas equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (2.12)$$

as quais decorrem da equação vetorial  $\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$ , sendo  $P(x, y, z)$  um ponto genérico da reta  $r$ . O vetor  $\vec{v}$ , paralelo à reta  $r$ , recebe o nome de *Vetor Diretor* da reta e a cada valor atribuído ao parâmetro  $t$  corresponde um ponto da reta. O ponto correspondente ao valor  $t = 0$  é precisamente o ponto  $A$ .

No caso em que o vetor diretor  $\vec{v}$  possui todas as coordenadas não nulas, eliminando o  $t$  nas equações paramétricas, vemos que a reta  $r$  pode ser descrita sob a forma:

$$r : \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \quad (2.13)$$

conhecida como *Forma Simétrica* da equação da reta.

É oportuno ressaltar que na forma paramétrica (2.12) os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  do parâmetro  $t$  são coordenadas do vetor  $\vec{v}$  paralelo à reta, enquanto na forma simétrica (2.13) os denominadores o são.

Se, por exemplo, a coordenada  $c$  for nula, então o vetor diretor  $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$  e, por conseguinte, a reta  $r$ , será ortogonal ao vetor  $\vec{k}$  e, portanto, ao eixo  $Oz$ . Se duas coordenadas, digamos  $b$  e  $c$ , do vetor diretor são nulas, então o vetor diretor  $\vec{v} = a\vec{i}$  é ortogonal ao plano  $yz$ . O mesmo ocorre com a reta  $r$ , como ilustrado na Figura 2.10.

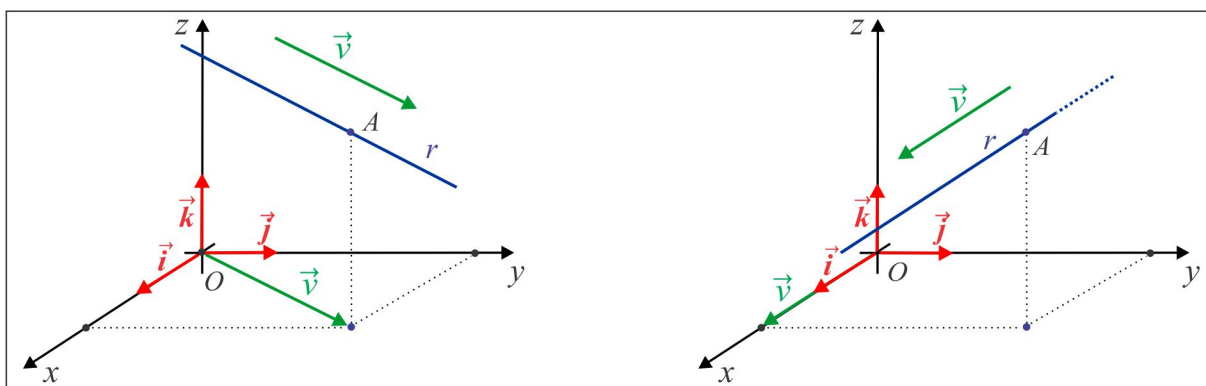


Figura 2.10: Reta no espaço.

**EXEMPLO 2.2.1** Identifiquemos a reta  $r$  que passa no ponto  $A(2, -2, 1)$  e é ortogonal ao plano:

$$\alpha : -x + 2y + z = 0.$$

**Solução** Na Figura 2.11 ilustramos a situação gráfica, onde vemos o vetor  $\vec{n} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  é normal ao plano  $\alpha$  e, conseqüentemente, paralelo à reta  $r$ .

Com o ponto  $A(2, -2, 1)$  da reta e o vetor diretor  $\vec{v} = \vec{n}$ , chegamos às equações paramétricas da reta:

$$x = 2 - t, \quad y = -2 + 2t \quad \text{e} \quad z = 1 + t.$$



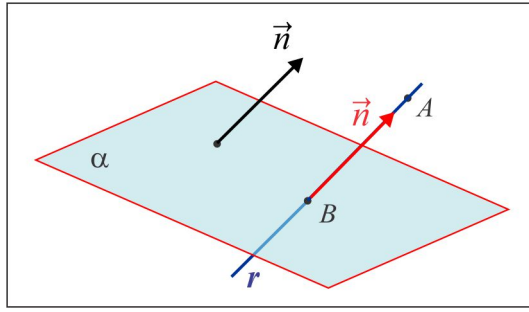


Figura 2.11: Reta  $r$  do Exemplo 2.2.1.

Na forma simétrica, a reta  $r$  é descrita por:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

**EXEMPLO 2.2.2** Construir dois vetores unitários paralelos à reta  $r$  interseção dos planos:

$$\alpha : x + y + z = 1 \quad e \quad \beta : -2x + y - 3z = 2.$$

**Solução** Um vetor  $\vec{v}$  paralelo à reta  $r$  pode ser determinado de duas formas:

(i) Considerando os vetores  $\vec{n}_\alpha$  e  $\vec{n}_\beta$  normais aos planos  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, e em seguida fazendo

$$\vec{v} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta.$$

(ii) Considerando dois pontos  $A$  e  $B$  sobre a reta  $r$  e fazendo  $\vec{v} = \vec{AB}$ .

Os vetores unitários paralelos à reta  $r$  são  $\vec{u} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ . Um cálculo direto nos dá:

$$\vec{v} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = -4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad e \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{26}.$$

### 2.2.1 Posição Relativa Reta $\times$ Plano

A posição de uma reta  $r$  em relação a um plano  $\alpha$  é determinada a partir do vetor diretor  $\vec{v}$  da reta e do vetor normal  $\vec{n}_\alpha$  do plano. Destacamos três situações ilustradas na Figura 2.12.

(a) A reta  $r$  é paralela ao plano  $\alpha$  (anotamos  $r // \alpha$ ). Neste caso,  $\vec{v} \perp \vec{n}_\alpha$  e teremos  $\vec{v} \bullet \vec{n}_\alpha = 0$ .

(b) A reta  $r$  é perpendicular ao plano  $\alpha$  ( $r \perp \alpha$ ). Neste caso,  $\vec{v}$  é paralelo a  $\vec{n}_\alpha$  e teremos  $\vec{v} \times \vec{n}_\alpha = \vec{0}$ .

(c) A reta  $r$  forma com plano  $\alpha$  um ângulo  $\theta$ , com  $0 < \theta < \pi/2$ . Neste caso,  $\cos \theta = |\cos(\vec{v}, \vec{n}_\alpha)|$

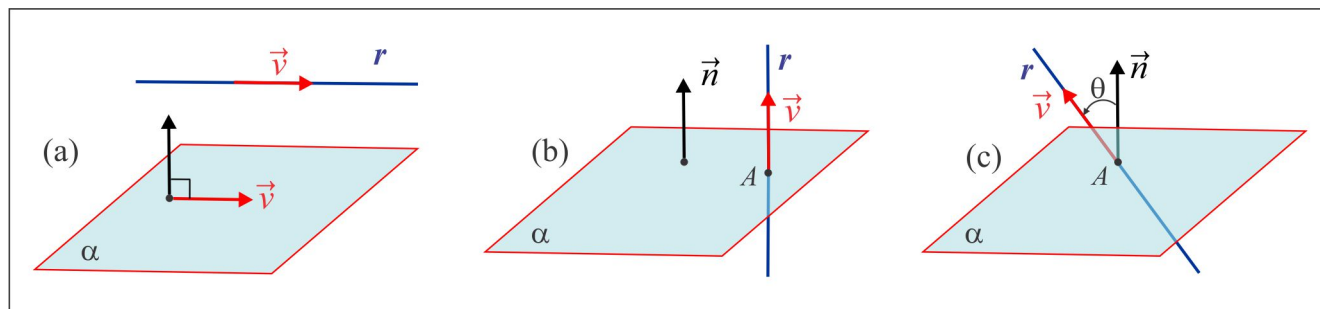


Figura 2.12: Posição relativa RetaxPlano.

Nos casos (b) e (c) a reta "fura" o plano no ponto  $A$  e anotamos  $r \cap \alpha = \{A\}$ .

**EXEMPLO 2.2.3** Encontrar o ponto onde a reta  $r$  fura o plano  $\alpha$ , sendo:

$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = z \quad e \quad \alpha : x+y+z=4.$$

**Solução** Temos  $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{n}_\alpha = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , de modo que o ângulo  $\theta$  entre a reta  $r$  e o plano  $\alpha$  é tal que:

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}_\alpha}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Na forma paramétrica a reta  $r$  é descrita por:

$$r : x = 1 + 2t, \quad y = -1 + t \quad e \quad z = t$$

e substituindo as expressões de  $x$ ,  $y$  e  $z$  na equação do plano, encontramos:

$$(1 + 2t) + (-1 + t) + t = 4,$$

de onde resulta  $t = 1$  e, por conseguinte,  $x = 3$ ,  $y = 0$  e  $z = 1$ . O ponto de interseção da reta com o plano é, portanto,  $A(3, 0, 1)$ .

1. Verifique que o ponto  $A(1, -1, 1)$  é a interseção da reta  $r : x = t, y = -t, z = t$  com o plano  $\alpha : 3x - 2y + z = 6$ .
2. Determine as equações dos eixos coordenados na forma paramétrica e como interseção de dois planos.

3. Identifique as interseções da reta  $r : x = 3 + 2t, y = -1 + 5t, z = 2 - t$  com os planos e eixos coordenados.
4. Verifique que a reta  $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$  está contida no plano  $\pi : x - 2y + z = 6$ .
5. A reta  $l$  passa no ponto  $A(1, 2, 2)$  e é paralela ao vetor  $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ . Determine as equações da reta  $l$  nas formas:
- (a) vetorial      (b) paramétrica      (c) simétrica.
6. Determine as equações paramétricas da reta que passa nos pontos  $A(0, 2, 3)$  e  $B(5, 0, 6)$ .
7. Considere a reta de equação vetorial  $\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}), t \in \mathbb{R}$ . Escreva as equações da reta na forma (i) simétrica e (ii) paramétrica.
8. Determine a equação vetorial do segmento de reta que une os pontos  $A$  e  $B$ .
9. Descreva a reta  $x = 2 - s, y = 4, z = 3s$  como interseção de dois planos.
10. Encontre dois planos ortogonais cuja interseção é a reta  $r : x = -1 - 2t, y = -1 + 9t, z = 7t$ .
11. Obtenha as equações paramétricas e vetorial da reta
- $$l : x - 1 = \frac{5y + 4}{2} = -6z + 9.$$
12. Em cada caso, obtenha um vetor unitário paralelo à reta  $r$ .
- (a)  $r : x = 1 - 2t, y = -5 + t, z = 2 + 4t$       (b)  $r : x - 1 = -z/7; y = 3$ .
13. Determine as equações da reta que passa pela origem e é perpendicular às retas:
- $$r_1 : x = 2 + t, y = 3 + 5t, z = 5 + 6t \quad r_2 : x = 1 + 3s, y = s, z = -7 + 2s.$$
14. Seja  $r$  a reta interseção dos planos  $\pi_1 : x + y + z = 0$  e  $\pi_2 : 2x + 3y - z = 4$ . Descreva a reta  $r$  na forma paramétrica.
15. Determine as equações paramétricas da reta  $r$  paralela aos planos  $3x + 3y + z = -1$  e  $x + y - z = 0$  e que passa no ponto  $A(-1, 1, 0)$ .

16. Decomponha o vetor  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  nas direções  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , sendo  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respectivamente, paralelo e perpendicular à reta

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{3} = z+1.$$

17. Determine o plano que contém as retas  $r_1$  e  $r_2$ , sendo

$$r_1 : \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : x=1+8t, y=5-6t, z=-1-2t.$$

18. Determine as equações paramétricas da reta  $r$  que passa no ponto  $A(1, 2, -1)$ , é paralela ao plano  $x+y=5$  e perpendicular ao vetor  $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ .

19. Encontre, na forma paramétrica, a reta bissetriz do ângulo agudo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} 4x-3y-65=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} 7x-24y+55=0 \\ z=0. \end{cases}$$

20. Em cada caso, estude a posição da reta  $r$  em relação ao plano  $\pi$ . Determine o ângulo entre  $r$  e  $\pi$  e, caso exista, o ponto onde a reta *fura* o plano.

(a)  $r : x = -8 + 15t, y = 5 - 9t, z = 0$      $\pi : 3x + 5y = 1$

(b)  $r : x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$      $\pi : x = 5 - 2\lambda, y = 1 - \lambda + 4\mu, z = 2 + \lambda - 2\mu$

(c)  $r : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = 1 + s$      $\pi : x = 1 - \lambda - 4\mu, y = -2 + 2\lambda - 8\mu, z = 1 + \lambda - \mu$

(d)  $r : \vec{OP} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1)$      $\pi : x - 2y - 4z + 5 = 0.$

21. Considere a reta  $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{2}$  e o plano  $\pi : x - 3y + 6z + 7 = 0$ . Determine, caso exista, o(s) valor(es) de  $m$  de modo que:

(a)  $r$  seja paralela a  $\pi$     (b)  $r$  esteja contida em  $\pi$     (c)  $r$  intercepte  $\pi$  em um ponto.

22. Determine os valores de  $m$  e  $c$  para que a reta  $r : \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{5-z}{2}$  e o plano  $\pi : 3x - 2y + cz + 1 = 0$  sejam perpendiculares e encontre o ponto onde a reta intercepta o plano.

23. Encontre a reta que passa no ponto  $A(3, 6, 4)$ , é paralela ao plano  $\pi : x - 3y + 5z = 6$  e intercepta o eixo  $Oz$ .

24. Qual valor de  $\lambda$  faz com que o ângulo entre as retas

$$r_1 : 1 + \lambda t, y = 1 + 3t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 1 + 2t, y = -3 - t, z = -1 + 2t$$

seja  $\pi/4$ ?

25. Considere os pontos  $A(2, -4, 6)$ ,  $B(-4, 2, 2)$  e  $C(1, -1, 0)$ . Encontre, na forma paramétrica, a reta mediatriz do segmento  $AB$ , que passa no ponto  $C$ .

## 2.3 Distâncias

Nesta seção abordaremos distância de um ponto a um plano, de um ponto a uma reta e distância entre duas retas, além de algumas consequências.

### 2.3.1 Distância de Ponto a Plano

Consideremos um plano  $\alpha : ax + by + cz + d = 0$  e seja  $A(x_0, y_0, z_0)$  um ponto do espaço. Se o ponto  $A$  está sobre o plano, é claro que a distância do ponto  $A$  ao plano  $\alpha$  é zero. Se não, pelo ponto  $A$ , consideramos a reta  $r$  ortogonal ao plano  $\alpha$  e seja  $B$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $A$  ao plano  $\alpha$ , isto é, a interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ , como ilustrado na Figura 2.13.

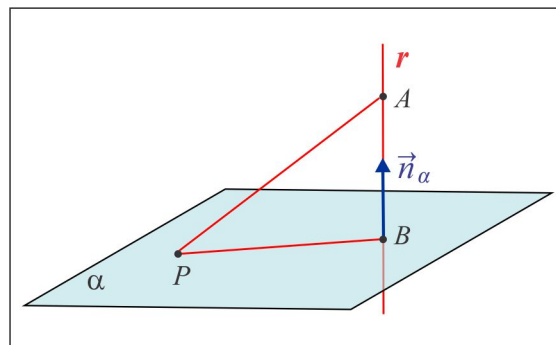


Figura 2.13: Distância de Ponto a Plano.

A distância do ponto  $A$  ao plano  $\alpha$ , é dada por:

$$\text{dist}(A; \alpha) = \|\overrightarrow{AB}\| \quad (2.14)$$

onde o ponto  $B$  é a interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ .

Com o objetivo de encontrar uma fórmula prática para o cálculo da distância, deixe  $P(x_1, y_1, z_1)$  ser um ponto qualquer do plano e observemos que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é a projeção ortogonal do vetor  $\overrightarrow{AP}$  sobre

o vetor normal  $\vec{n}_\alpha$ , isto é:

$$\vec{AB} = \text{Proj}_{\vec{n}_\alpha} \vec{AP} = (\vec{AP} \bullet \vec{n}_\alpha) \frac{\vec{n}_\alpha}{\|\vec{n}_\alpha\|^2} \quad (2.15)$$

e de (2.15) resulta:

$$\|\vec{AB}\| = \frac{|\vec{AP} \bullet \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{n}_\alpha\|}.$$

Ora,  $\vec{n}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  e considerando que o ponto  $P$  jaz no plano  $\alpha$ , então  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$  e, dessa forma, chegamos à seguinte fórmula da distância de ponto a plano:

$$\text{dist}(A; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (2.16)$$

**EXEMPLO 2.3.1** De acordo com (2.16), a distância do ponto  $A(1, -1, 2)$  ao plano  $\alpha : 2x + y - z = 4$  é:

$$\text{dist}(A; \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

### CONSEQUÊNCIAS

**(1) Distância entre dois Planos Paralelos:** Se  $\alpha$  e  $\beta$  são dois planos paralelos, a distância entre eles é calculada da seguinte forma: escolhemos um ponto  $A$  em um dos planos, digamos  $\alpha$ , e calculamos a distância do ponto  $A$  ao plano  $\beta$ . Assim:

$$\text{dist}(\alpha; \beta) = \text{dist}(A; \beta).$$

**EXEMPLO 2.3.2** Calcular a distância entre os plano paralelos:

$$\alpha : x - y + 2z = -1 \quad e \quad \beta : 2x - 2y + 4z = 3.$$

**Solução** Consideremos sobre o plano  $\alpha$  o ponto  $A(0, 1, 0)$ , de modo que:

$$\text{dist}(\alpha; \beta) = \text{dist}(A; \beta) = \frac{|0 - 2 + 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

**(2) Distância de uma Reta a um Plano:** No caso em que uma reta  $r$  é paralela a um plano  $\alpha$ , a distância da reta ao plano é medida pela distância de um ponto  $A$  da reta ao plano, isto é:

$$\text{dist}(r; \alpha) = \text{dist}(A; \alpha).$$

Se a reta não é paralela ao plano, ela fura o plano num determinado ponto e é natural definir, neste caso, a distância como sendo zero.

### 2.3.2 Distância de Ponto a Reta

A Figura 2.14 ilustra uma reta  $r$ , com vetor diretor  $\vec{v}$ , e um ponto  $P$  livremente escolhido sobre a reta. A distância do ponto  $A$  à reta  $r$  é definida por:

$$\text{dist}(A; r) = \|\vec{AB}\|, \quad (2.17)$$

onde o ponto  $B$  é o pé da perpendicular baixada do ponto  $A$  à reta  $r$ .

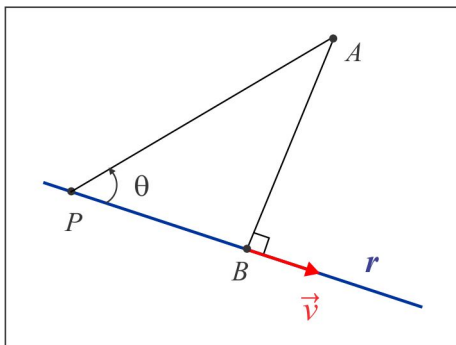


Figura 2.14: Distância de Ponto a Reta.

O processo geométrico para encontrar o ponto  $B$  consiste no seguinte:

- (i) Encontrar o plano  $\alpha$  que passa no ponto  $A$  e é ortogonal à reta  $r$ .
- (ii) O ponto  $B$  é o ponto de interseção da reta  $r$  com o plano  $\alpha$ .

Outra forma de encontrar o ponto  $B$  consiste em considerar um ponto móvel (partícula)  $Q(t)$  sobre a reta  $r$  e observar que a partícula  $Q$  atinge o ponto  $B$  no instante  $t_0$  em que  $\vec{AQ} \bullet \vec{v} = 0$ . O ponto  $B$  é precisamente  $Q(t_0)$ .

Uma fórmula para a distância do ponto  $A$  à reta  $r$  é facilmente deduzida a partir da Figura 2.14. De fato, temos:

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AP}\| |\text{sen } \theta| = \frac{\|\vec{AP}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen } \theta|}{\|\vec{v}\|},$$

de onde resulta a fórmula da distância do ponto  $A$  à reta  $r$ :

$$\text{dist}(A; r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}. \quad (2.18)$$

**EXEMPLO 2.3.3** Calcular a distância do ponto  $A(2, 1, -3)$  à reta  $r : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$ .

**Solução** Inicialmente, observamos que  $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$  é paralelo à reta  $r$  e que o ponto  $P(0, -1, 2)$  está sobre a reta. Temos  $\overrightarrow{AP} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$  e um cálculo direto nos dá:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 12\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Usando a fórmula da distância (2.18), encontramos:

$$\text{dist}(A; r) = \frac{\sqrt{(-17)^2 + (12)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} \approx 5.59.$$

**EXEMPLO 2.3.4** Considere o ponto  $A$  e a reta  $r$  do Exemplo (2.3.3). Encontrar o ponto  $B$  da reta mais próximo do ponto  $A$ .

**Solução** Na forma paramétrica, a reta  $r$  é descrita por:

$$x = 2t, \quad y = -1 + 3t \quad \text{e} \quad z = 2 + t,$$

e um ponto genérico da reta  $r$  é da forma  $Q(2t, -1 + 3t, 2 + t)$  Temos:

$$\overrightarrow{AQ} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2(-2 + 2t) + 3(-2 + 3t) + (5 + t) = 0$$

e resolvendo a última equação encontramos  $t = 5/14$  e, conseqüentemente,  $B(5/7, 1/14, 33/14)$ . Assim,  $\overrightarrow{AB} = (\frac{18}{14})\vec{i} + (\frac{13}{14})\vec{j} + (\frac{78}{14})\vec{k}$  e a distância do ponto  $A$  à reta  $r$  é, portanto:

$$\text{dist}(A; r) = \|\overrightarrow{AB}\| \approx \frac{78.217}{14} \approx 5.586 \approx 5.59.$$

**EXEMPLO 2.3.5 (Distância de Ponto a Reta no Plano  $xy$ .)** O plano  $xy$  é descrito pela equação  $z = 0$ , de modo que uma reta no plano  $xy$ , inserida no espaço  $\mathbb{R}^3$ , é descrita pelo par de equações cartesianas:  $ax + by + c = 0$ ,  $z = 0$  que graficamente corresponde à interseção do plano  $\alpha : ax + by + c = 0$  com o plano  $xy : z = 0$ . Admitindo  $b \neq 0$ , a reta pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -(c/b) - (a/b)t \\ z = 0 \end{cases}$$

com vetor diretor  $\vec{v} = \vec{i} - (a/b)\vec{j} + 0\vec{k}$ , e considerando  $A(x_0, y_0, z_0)$  um ponto do espaço e o ponto  $P(0, -c/b, 0)$  sobre a reta, temos:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (y_0 + \frac{c}{b} + \frac{ax_0}{b})\vec{k}$$



e aplicando a fórmula (2.18), da distância de ponto a reta, encontramos:

$$\text{dist}(A; r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.19)$$

### 2.3.3 Distância entre duas Retas

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  duas retas no espaço com vetores diretores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ , respectivamente, e vejamos as posições relativas entre elas.

- (i) As retas  $r_1$  e  $r_2$  são ditas *Concorrentes* se elas têm um único ponto em comum. Neste caso, existe um único plano que as contem e a distância entre elas é zero, como ilustra a Figura 2.15. O ângulo  $\theta$  entre elas é tal que  $\cos \theta = |\cos(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)|$ .
- (ii) As retas  $r_1$  e  $r_2$  são ditas *Paralelas* se elas estão em um mesmo plano e não têm ponto em comum, como na Figura 2.16. Neste caso:

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(A; r_2)$$

sendo  $A$  um ponto livremente escolhido sobre a reta  $r_1$ . O ângulo entre elas é  $\theta = 0$ .

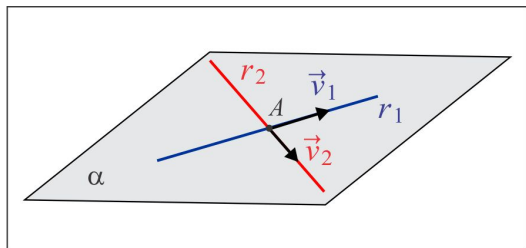


Figura 2.15: Retas Concorrentes.

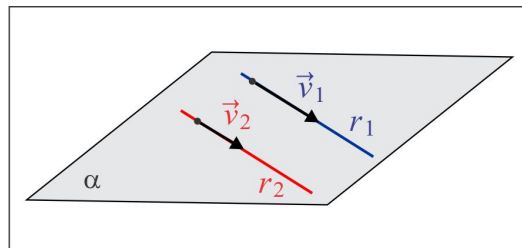


Figura 2.16: Retas Paralelas.

- (iii) A Figura 2.17 ilustra duas retas  $r_1$  e  $r_2$  situadas em planos distintos e sem ponto em comum. Elas são denominadas retas *Reversas* e observamos que a reta  $r_1$  jaz no plano  $\alpha$ , enquanto a reta  $r_2$  fura esse plano no ponto  $B$ .

No caso (iii) em que as retas são reversas, a distância entre elas é definida com base no seguinte princípio:

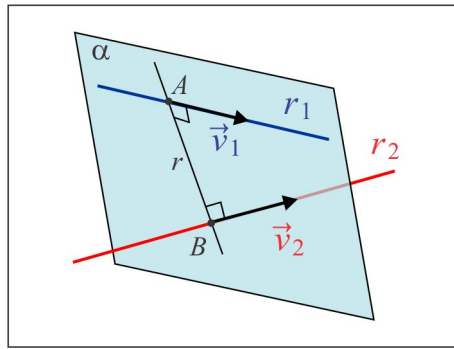


Figura 2.17: Retas Reversas.

Existe uma única reta  $r$  ortogonal às retas  $r_1$  e  $r_2$  simultaneamente e interceptando ambas nos pontos  $A$  e  $B$ , como ilustrado na Figura 2.17.

Com base nesse princípio, definiremos a distância entre as retas reversas  $r_1$  e  $r_2$  pela relação:

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

e para deduzir uma fórmula prática para o cálculo da distância, observemos a Figura 2.18 abaixo:

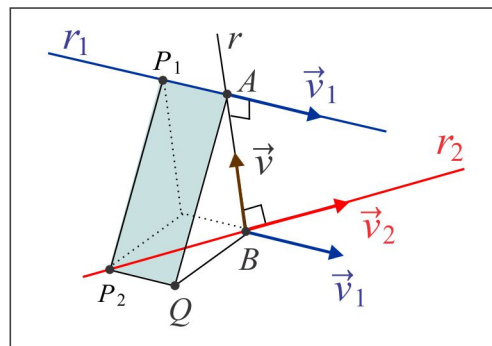


Figura 2.18: Distância entre Retas Reversas.

onde  $P_1$  e  $P_2$  são pontos livremente escolhidos sobre as retas  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, e  $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ . Temos que  $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{P_1P_2}$  e, portanto:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\text{Proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{AQ}\| = \|\text{Proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{P_1P_2}\|$$

de onde resulta a fórmula da distância:

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}. \quad (2.20)$$

É oportuno ressaltar que a fórmula (2.20) também se aplica ao caso em que as retas são concorrentes. Neste caso, o vetor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  é ortogonal a  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  e, sendo assim,  $\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$ .

**EXEMPLO 2.3.6** Para as retas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = -2 + 2s \\ y = 4 - s \\ z = 3 - 4s \end{cases}$$

temos:

- (i) A distância entre as retas é zero. De fato, consideremos os pontos  $P_1(1, 2, 0) \in r_1$  e  $P_2(-2, 4, 3) \in r_2$  e os vetores diretores  $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$ . Um cálculo direto nos dá:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -5\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0}$$

e isto indica que as retas não são paralelas (em princípio elas podem ser concorrentes ou reversas). É fácil ver que  $\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$  e da fórmula da distância resulta que  $\text{dist}(r_1; r_2) = 0$ . Logo, as retas são concorrentes.

- (ii) Para encontrar o ponto comum às retas  $r_1$  e  $r_2$ , notamos que a abscissa do ponto de interseção é  $x = 1 - t$ , na reta  $r_1$ , e  $x = -2 + 2s$ , na reta  $r_2$ , de modo que:

$$1 - t = -2 + 2s \Leftrightarrow t = 3 - 2s.$$

Por outro lado,  $y = 2 + t$  na reta  $r_1$  e  $y = 4 - s$  na reta  $r_2$  e no ponto comum teremos:

$$2 + t = 4 - s \Leftrightarrow 2 + (3 - 2s) = 4 - s \Leftrightarrow s = 1 \Leftrightarrow t = 1.$$

O ponto de interseção  $A(0, 3, -1)$  é obtido considerando  $t = 1$  na reta  $r_1$  ou  $s = 1$  na reta  $r_2$ .

**EXEMPLO 2.3.7** Vamos comprovar que as retas:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = -s \\ y = 1 + s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$$

são reversas e encontrar o ponto  $A \in r_1$  e o ponto  $B \in r_2$ , tais que o segmento  $AB$  seja ortogonal às retas  $r_1$  e  $r_2$ , ao mesmo tempo. Ressaltamos que  $\text{dist}(r_1; r_2) = \|\overrightarrow{AB}\|$ .

**Solução** Os pontos genéricos (partículas)  $P(t, t, t)$  e  $Q(-s, 1 + s, 2 + 2s)$  sobre as retas  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, passam pelos pontos  $A$  e  $B$  nos instantes  $t$  e  $s$ , tais que:

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}_2 = 0 \quad (2.21)$$

e resolvendo sistema (2.21) encontramos  $t = 4/7$  e  $s = -9/14$  e, assim, obtemos os pontos:

$$A(4/7, 4/7, 4/7) \quad \text{e} \quad B(9/14, 5/14, 5/7).$$

A distância entre as retas é:

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{14}.$$

1. Descreva, de forma breve, como você decide quando duas retas são:

(a) coincidentes      (b) paralelas      (c) concorrentes      (d) reversas.

2. Em cada caso, verifique se as retas  $r_1$  e  $r_2$  são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas.

Determine o ângulo e, caso exista, a interseção entre elas.

- |  |   |
|--|---|
| (a) $r_1 : x = 1, y = t, z = 1$                | $r_2 : x = s, y = 0, z = 1$                       |
| (b) $r_1 : x - 3 = \frac{z - 2}{7}; y = 4$     | $r_2 : \frac{x - 6}{2} = \frac{z - 4}{14}; y = 8$ |
| (c) $r_1 : x = 1 + 3t, y = 2 + 5t, z = 2 + 7t$ | $r_2 : x = 7 + 6s, y = 12 + 10s, z = 6 + 14s$     |
| (d) $r_1 : x + 1 = \frac{y - 1}{2}; z = 5$     | $r_2 : x = 1 + 4s, y = 5 + 2s, z = 2 + 3s$        |
| (e) $r_1 : x = 1, y = 3 - s, z = 5 + 2s$       | $r_2 : x = -4 + 5t, y = 3 + 2t, z = -2 + 3t$      |

3. Mostre que as retas

$$r_1 : x = 2 + 3t, y = 1 + 2t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{2} = z + 1$$

são paralelas e determine o plano  $\pi$  que as contém.

4. Mostre que as retas

$$r_1 : \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{2} = z \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x - 3}{5} = y - 1 = \frac{z}{3}$$

são concorrentes e determine o plano  $\pi$  que as contém.

5. Considere a reta  $r_1 : x = 2 + 3t, y = t, z = -t$ . Determine duas retas  $r_2$  e  $r_3$ , de modo que  $r_1$  e  $r_2$  sejam reversas e  $r_1$  e  $r_3$  concorrentes.
6. Calcule a distância do ponto  $A(1, 2, 2)$  ao plano  $\pi$  que passa pelos pontos  $B(-1, 0, 0)$ ,  $C(1, 0, 1)$  e  $D(-2, 3, 0)$ .
7. Certa reta  $r$  jaz no plano  $\pi : x - y + z = 7$ , passa no ponto  $A(3, -3, 1)$  e é ortogonal à reta  $l : x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$ . Ache as equações da reta  $r$  e sua distância à origem.
8. Considere as retas reversas

$$r_1 : x = -1 + t, y = -3 + 2t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : x = -2 + s, y = 1 + s, z = s.$$

Determine um ponto  $A$  na reta  $r_1$  e um ponto  $B$  na reta  $r_2$ , de modo que a reta que passa por  $A$  e  $B$  intercepta  $r_1$  e  $r_2$  ortogonalmente.

9. Verifique que os planos  $\pi_1 : x + 2y - z = 21$  e  $\pi_2 : -2x - 4y + 2z = 10$  são paralelos e encontre o plano  $\alpha$  eqüidistante de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
10. Encontre o ponto do plano  $\alpha : x + 3y - z + 6 = 0$  mais próximo do ponto  $A(1, 1, 3)$ .
11. Identifique o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$  cuja distância ao plano  $x - y = 0$  é igual a 9.
12. Dado um ponto  $P_0$ , a equação  $\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$  representa o plano que passa por  $P_0$  e é normal ao vetor  $\vec{n}$ . Identifique o lugar geométrico descrito pela desigualdade  $\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} > 0$ .
13. Determine sob que condições os pontos  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  estão do mesmo lado do plano  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ .
14. Seja  $r$  a reta interseção dos planos  $\alpha : 2x - y + z = 6$  e  $\beta : x - y = 1$ . Encontre o ponto da reta  $r$  mais próximo do ponto  $A(1, 2, 1)$  e calcule  $\text{dist}(A; r)$ .
15. Calcule a altura do tetraedro de vértices  $A(1, 6, 2)$ ,  $B(2, 3, 0)$ ,  $C(-2, -3, 4)$  e  $D(0, 6, 0)$ , baixada do vértice  $A$ .
16. Considere o ponto  $A(1, 2, -1)$  e determine o ponto  $B$ , simétrico de  $A$ , em relação:
  - (a) à reta  $r : x = 1 + t, y = t, z = 1$
  - (b) ao plano  $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ .

17. Seja  $r$  a reta determinada pela interseção dos planos  $\pi_1 : x + 2y - z = 1$  e  $\pi_2 : 2x - y + z = 0$ . Encontre a reta que passa pelo ponto  $A(1, 0, 1)$  e intercepta  $r$  ortogonalmente.
18. Seja  $r$  a reta interseção dos planos:  $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$  e  $\beta : x - y - 1 = 0$ . Encontre o ponto da reta  $r$  mais próximo de  $P_0(1, 2, 1)$  e calcule  $\text{dist}(P_0; r)$ .

## 2.4 Interseção de três planos

Consideremos três planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  com vetores normais  $\vec{n}_\alpha$ ,  $\vec{n}_\beta$  e  $\vec{n}_\gamma$ , respectivamente, e suponhamos que esses planos não sejam paralelos (nem coincidentes!). Os planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem ter um único ponto comum, podem ter uma reta em comum ou podem não ter ponto algum em comum. Há dois casos a considerar:

- (1) Se  $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] \neq 0$ , então os planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  se interceptam em um único ponto  $P$ , como ilustra a Figura 2.19, cujas coordenadas podem ser encontradas pela Regra de Cramer, por Escalonamento ou qualquer outro método.
- (2) No caso em que  $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ , então ou eles se interceptam segundo uma reta ou eles não têm ponto em comum. Para verificar se eles têm uma reta em comum, primeiro encontramos, caso exista, a reta  $r$  interseção entre dois deles, por exemplo, entre  $\alpha$  e  $\beta$ , e em seguida testamos se essa reta está contida no plano  $\gamma$ . Caso afirmativo a reta  $r$  será a interseção dos 3 planos, como ilustrado na Figura 2.20.

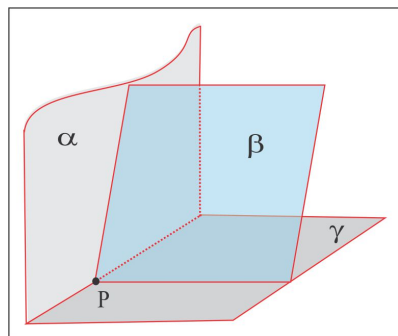


Figura 2.19:  $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$ .

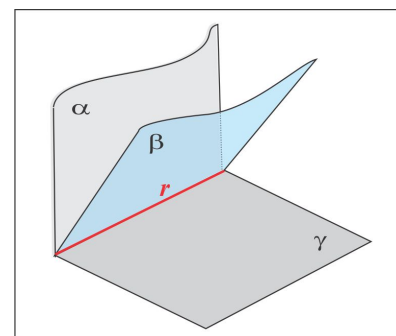


Figura 2.20:  $\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$ .

As Figuras 2.21 e 2.22 ilustram os casos em que  $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$  e os três planos não se interceptam, embora exista uma reta comum a dois deles, esta reta é paralela ao terceiro plano.

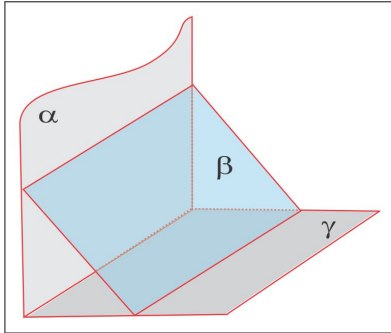


Figura 2.21:  $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$ .

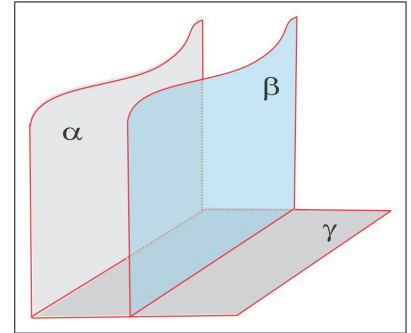


Figura 2.22:  $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$ .

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.4

---

1. Se os planos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  se interceptam dois a dois segundo uma reta, é verdade que os três planos têm uma reta em comum?
  2. Discuta e determine, caso exista, a interseção entre os planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ .
 

|                               |                            |                            |
|-------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (a) $\pi_1 : x + y + z = 0$   | $\pi_2 : x + 2y + z = 1$   | $\pi_3 : x + y + 3z = 2$   |
| (b) $\pi_1 : x + y - 4z = 0$  | $\pi_2 : x - y = 0$        | $\pi_3 : x + 2y - 6z = 0$  |
| (c) $\pi_1 : x + 2y - z = 0$  | $\pi_2 : 2x + 4y - 2z = 2$ | $\pi_3 : 3x - y + z = 0$   |
| (d) $\pi_1 : x + 2y + z = 0$  | $\pi_2 : 2x + 4y - z = -1$ | $\pi_3 : x + 2y = 0$       |
| (e) $\pi_1 : x + y + z = 0$   | $\pi_2 : -x + 2y - z = -4$ | $\pi_3 : 3x + y + 3z = 0$  |
| (f) $\pi_1 : 2x - y + z = -1$ | $\pi_2 : 3x + y + z = 1$   | $\pi_3 : 6x + 2y + 2z = 0$ |
-

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. V, V, F, V, V, F, V, V, F.
2. De cima para baixo, a seqüência é: 7, 4, 8, 3, 6, 1, 2 e 5.
3. O plano  $\pi$  intercepta os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente nos pontos  $A(5/3, 0, 0)$ ,  $B(0, 5/2, 0)$  e  $C(0, 0, -5)$ . A interseção com o plano  $xy$  é a reta  $r_1 : x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$ ,  $y = t$ ,  $z = 0$ ; com o plano  $xz$  a reta  $r_2 : x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t$ ,  $y = 0$ ,  $z = t$ ; e com o plano  $yz$  a reta  $r_3 : x = 0$ ,  $y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t$ ,  $z = t$ .
4. (a) O ponto  $A(4, 2, 0)$  corresponde aos valores  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$ .  
 (b) Com as escolhas  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ , encontramos o ponto  $B(3, 3, 3)$  e considerando  $\lambda = 0$  e  $\mu = 1$ , obtemos o ponto  $C(6, 2, -1)$ .  
 (c)  $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  e  $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}$ , correspondentes construídos com os coeficientes dos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$ , respectivamente.  
 (d)  $\pi : x - 5y + 2z + 6 = 0$ .
5. (a) o ponto  $A$  é obtido com  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$ ; (b) com  $\lambda = 1$  e  $\mu = 0$ , obtemos  $B(3, 3, 3)$  e com  $\lambda = 0$  e  $\mu = 1$  obtemos  $C(6, 2, -1)$ ; (c)  $\vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$  e  $\vec{AC} = 2\vec{i} - \vec{k}$ ; (d)  $\pi : x - 5y + 2z + 6 = 0$ .
6. (a) paralelo ao eixo  $Ox$ ; (b) paralelo ao eixo  $Oy$ ; (c) paralelo ao eixo  $Oz$ ; (d) paralelo ao plano  $xy$ ; (e) passa pela origem.
7.  $x - y + z - 4 = 0$  ou  $x = 3 + \lambda - \mu$ ,  $y = 1 - 2\lambda - \mu$ ,  $z = 2 - 3\lambda$ .
8. (a) paralelo ao eixo  $x$  (b) paralelo ao eixo  $y$  (c) paralelo ao eixo  $z$  (d) paralelo ao plano  $xy$  (e) passa pela origem.
9.  $\alpha : x - 2y + 3z + 3 = 0$ ,  $B \notin \alpha$  e  $C \in \alpha$ .
10. Dados  $A, B, C, D$  e  $E$  em  $\alpha$ , construímos :  $\vec{v}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ ,  $\vec{v}_2 = \frac{2\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$ ,  $\vec{v}_3 = \frac{3\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}$  e  $\vec{v}_4 = \frac{4\vec{AE}}{\|\vec{AE}\|}$ .
11.  $3x - 4y = 0$ .
12. (a) qualquer ponto do tipo  $(1, y, z)$  está no plano; (b)  $\vec{n}_\alpha = 3\vec{i}$ .



13.  $x = 1 + 2\lambda + \mu$ ,  $y = 2 + \lambda - \mu$ ,  $z = 2 - \lambda - 2\mu$ ; ou  $x - y + z = 1$ .
14.  $9x - y + 7z - 40 = 0$ .
15.  $m = 3$  e o plano não passa pela origem. Um plano que contém a origem é do tipo  $ax + by + cz = 0$ .
16. Dado  $\pi : ax + by + cz + d = 0$ , seja  $\vec{v} = \frac{\lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .
17.  $\vec{n} = \frac{15}{\sqrt{35}}(-3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$ .
18.  $2x - y + z = 1$ .
19.  $\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k})$ ,  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{k})$  e  $\vec{w} = \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})$ .
20.  $y + 4z + 10 = 0$ .
21.  $x = \lambda + 2\mu$ ,  $y = -\lambda - 5\mu$ ,  $z = \lambda$  ou  $5x + 2y - 3z = 0$ .
22.  $\alpha : x - y = 0$ .
23.  $2x - 4y + z + \frac{15}{2} = 0$ .
24. (a) perpendiculares (b) paralelos.
25. (a)  $m = 6$  (b)  $m + 2n = 9$  (c)  $7m - 3n = 2$ .
26. (a)  $m = 3$ ,  $n = -4$  (b)  $m = -2/3$ ,  $n = 3$  (c)  $m = -6/5$ ,  $n = -10/3$ .
27. o plano  $4x - 3y + 5z = 4$  que passa no ponto médio e é ortogonal ao segmento  $AB$ .
28. (a)  $y + 2 = 0$  (b)  $x - 2 = 0$  (c)  $9x - 3y - 4z - 20 = 0$  (d)  $7x - y - 5z + 10 = 0$ .
29. (a) ortogonais, com reta comum  $r : x = \frac{9}{13} + \frac{4}{13}t$ ,  $y = -\frac{5}{13} + \frac{5}{13}t$ ,  $z = t$  (b) coincidentes (c) paralelos (d) paralelos.
30. Basta observar que  $\vec{u} = (\cos \alpha)\vec{i} + (\cos \beta)\vec{j} + (\cos \gamma)\vec{k}$  e que a equação do plano é:  $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$ .

---

### ESCREVENDO PARA APRENDER 2.2

1. Teste as coordenadas do ponto  $A$  nas equações da reta e do plano.

2. Eixo  $Ox$  :  $x = t$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ; Eixo  $Oy$  :  $x = 0$ ,  $y = t$ ,  $z = 0$ ; Eixo  $Oz$  :  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = t$ .  
O eixo  $Ox$  pode ser visto como interseção dos planos  $y = 0$  e  $z = 0$ .

3. A reta intercepta os planos  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , respectivamente nos pontos  $A(7, 9, 0)$ ,  $B(\frac{17}{5}, 0, \frac{9}{5})$  e  $C(0, -\frac{17}{2}, \frac{7}{2})$ . Não há interseção com os eixos coordenados.

4. Na forma paramétrica, temos:  $r : x = 3 + 2t$ ,  $y = -2 + 3t$  e  $z = -1 + 4t$ , de modo que:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= (3 + 2t) - 2(-2 + 3t) + (-1 + 4t) \\ &= 2t - 6t + 4t + 6 = 6. \end{aligned}$$

5. (a)  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$ ; (b)  $x = 1 + 3t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 2 + t$  (c)  $\frac{x-1}{3} = 2 - y = z - 2$ .

6.  $x = 5t$ ,  $y = 2 - 2t$ ,  $z = 3 + 3t$ .

7. (a)  $x - 1 = 2 - y = z - 3$  (b)  $x = 1 + t$ ,  $y = 2 - t$ ,  $z = 3 + t$ .

8.  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ou  $P = (1 - t)A + tB$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

9.  $\alpha : 7x + 2z + 7 = 0$ ;  $\beta : y = 4$ .

10.  $\alpha : 7x + 2z + 7 = 0$ ,  $\beta : 18x + 53y - 63z + 71 = 0$ .

11.  $x = 1 + t$ ,  $y = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t$ ,  $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}t$  e  $\overrightarrow{OP} = (1, -4/5, 3/2) + t(\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} - \frac{1}{6}\vec{k})$ .

12. (a)  $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$  (b)  $\vec{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\vec{i} - 7\vec{k})$ .

13.  $x = 4t$ ,  $y = 16t$ ,  $z = -14t$ .

14.  $r : x = -4t$ ,  $y = 1 + 3t$ ,  $z = -1 + t$ .

15.  $r : x = -1 - 4t$ ,  $y = 1 + 4t$ ,  $z = 0$ .

16. Além da condição  $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ , os vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{v}$  devem ser coplanares. Considerando  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  e  $\vec{b} = \frac{20}{17}\vec{i} + \frac{19}{17}\vec{j} + \vec{k}$ , encontramos  $\vec{v} = -\frac{3}{14}\vec{a} + \frac{17}{14}\vec{b}$ .

17.  $8x + 5y + 17z - 16 = 0$ .

18.  $r : x = 1 - t$ ,  $y = 2 + t$ ,  $z = -1 - t$ .

19. As retas  $r_1$  e  $r_2$  concorrem no ponto  $A(23, 9, 0)$ , com vetores diretores  $\vec{v}_1 = -3\vec{i} + 4\vec{j}$  e  $\vec{v}_2 = -24\vec{i} + 7\vec{j}$ , respectivamente. O vetor:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

é paralelo à reta  $r$  bissetriz do ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$ , a qual é descrita por:

$$r : \overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}.$$

20. (a)  $r \subset \pi$  (b)  $r \perp \pi$ ;  $A(3, 2, 2)$  (c)  $r // \pi$  (d)  $r // \pi$ .

21. (a)  $m = 5$  (b) não existe um tal  $m$  (c)  $m \neq 5$ .

22.  $m = -6$ ,  $c = 1$ ;  $A(-1, 1, 4)$ .

23.  $r : x = 3t$ ,  $y = 6t$ ,  $z = 1 - 4t$ .

24.  $\lambda = 4$  ou  $\lambda = 52$ .

25.  $r : x = -1 + 2t$ ,  $y = -1$ ,  $z = 4 - 4t$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 2.3

- Usar os vetores diretores e a distância.
- (a) concorrentes em  $A(1, 0, 1)$  e  $(r_1, r_2) = \pi/2$  (b) paralelas (c) paralelas (d) reversas e  $\cos(r_1, r_2) = \frac{8}{\sqrt{145}}$ ; (e) concorrentes em  $A(1, 5, 1)$  e  $\cos(r_1, r_2) = \frac{4}{\sqrt{190}}$ .
- $\pi : 2x - 4y + 2z = 0$ .
- $\pi : 5x - 4y - 7z = 11$ .
- $r_2 : x = t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $z = t$ ;  $r_1 : x = 2$ ,  $y = t$ ,  $z = t$ .
- $\text{dist}(A; \pi) = 4/\sqrt{46}$ .
- $x = 3 - 5t$ ,  $y = -3 - 2t$ ,  $z = 1 + 3t$ ;  $\text{dist}(O; r) = \sqrt{\frac{343}{19}}$ .
- $A(7/2, 6, 9/2)$  e  $B(3, 6, 5)$ .
- $\alpha : x + 2y - z = 8$ .

10.  $(4/11, -10/11, 40/11)$ .
11. Os planos  $x - y = \pm 9\sqrt{2}$ .
12. O conjunto dos pontos do lado do plano para o qual  $\vec{n}$  aponta.
13. As expressões  $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$  e  $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$  devem ter o mesmo sinal.
14.  $P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$ ,  $\text{dist}(P_0; r) = \sqrt{42}/3$ .
15.  $15/7$ .
16. (a)  $B(5, 0, 3)$  (b)  $B(5/3, -4/3, 5/3)$ .
17.  $x = 1 + 31t$ ,  $y = -23t$ ,  $z = 1 + 20t$ .
18.  $A(8/3, 5/3, 7/3)$ ;  $\text{dist}(P_0; r) = \text{dist}(P_0; A) = \sqrt{14}/3$ .

---

**ESCREVENDO PARA APRENDER 2.4**

1. Não
  2. (a) O ponto  $P(-2, 1, 1)$  (b) A reta  $x = 2t$ ,  $y = 2t$ ,  $z = t$ . Nos casos (c), (d), (e) e (f) não há interseção.
-



## Introdução

Fixemos em um mesmo plano um eixo  $L$  (eixo de rotação) e uma reta  $g$ , denominada geratriz, e suponhamos que o ângulo  $\theta$  entre o eixo  $L$  e a geratriz  $g$  seja tal que  $0 < \theta < \pi/2$ . A superfície produzida pela rotação de  $2\pi$  rad da geratriz  $g$  em torno do eixo  $L$  recebe o nome de *Cone de Revolução* e está ilustrado na Figura 3.1. O ponto  $V$  de interseção do eixo  $L$  com a geratriz  $g$  é o *Vértice* do cone. As curvas **CIRCUNFERÊNCIA**, **ELIPSE**, **HIPÉRBOLE** e **PARÁBOLA** apresentadas neste capítulo são obtidos como interseção de um cone de revolução com um plano e, por essa razão, denominadas **CÔNICAS**.

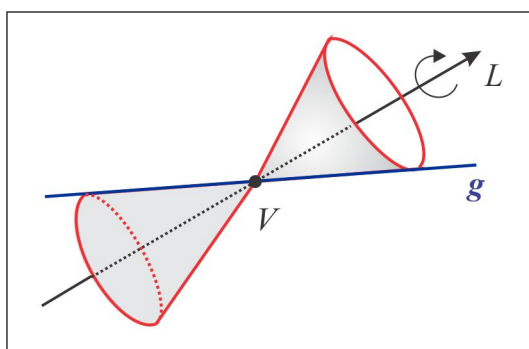


Figura 3.1: O Cone de Revolução.

A cônica resultante da interseção depende da posição do plano. Se o plano é perpendicular ao eixo do cone, a cônica resultante é uma circunferência; se o plano é paralelo ao eixo, a cônica é uma hipérbole; se o plano é paralelo à geratriz, a cônica é uma parábola; finalmente, se o plano não é paralelo nem perpendicular ao eixo e nem paralelo à geratriz, a cônica resultante é uma elipse.

Uma situação particularmente simples é aquela em que o eixo de rotação é o eixo  $Oy$  e a geratriz é a reta  $y = ax$  do plano  $xy$ . A Figura 3.2 ilustra as cônicas determinadas no cone por planos.

- (a) No caso (a), o plano é perpendicular ao eixo de rotação e a cônica interseção é uma circunferência.
- (b) No caso (b), o plano faz com o eixo  $L$  um ângulo  $0 < \theta < \pi/2$ , e a cônica interseção é uma elipse.
- (c) No caso (c), o plano é paralelo à geratriz e a cônica interseção é uma parábola.
- (d) No caso (d), o plano é paralelo ao eixo de rotação e a cônica interseção é uma hipérbole.

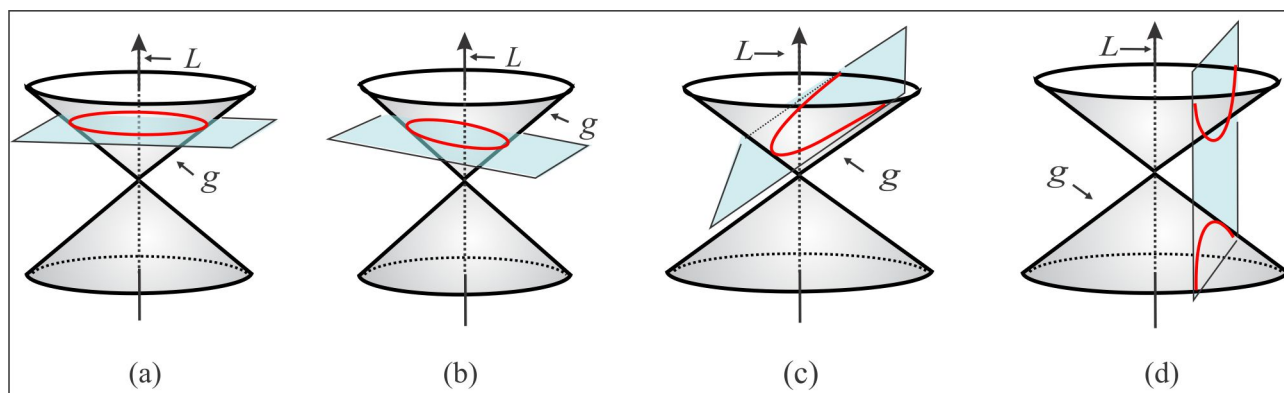


Figura 3.2: As cônicas.

Em Geometria Analítica existem duas questões fundamentais:

- (i) Dada uma equação em duas variáveis

$$F(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

determinar sua interpretação ou representação gráfica.

- (ii) Dada uma figura (condição geométrica), determinar sua equação ou representação analítica.

A totalidade dos pontos  $P(x, y)$  do plano  $xy$  que satisfazem a equação (3.1) leva o nome de *Lugar Geométrico* da equação. Por exemplo, a equação  $y = ax + b$  representa no plano  $xy$  uma reta, enquanto no espaço  $\mathbb{R}^3$  ela representa um plano paralelo ao eixo  $Oz$ , como ilustra a Figura 3.3.

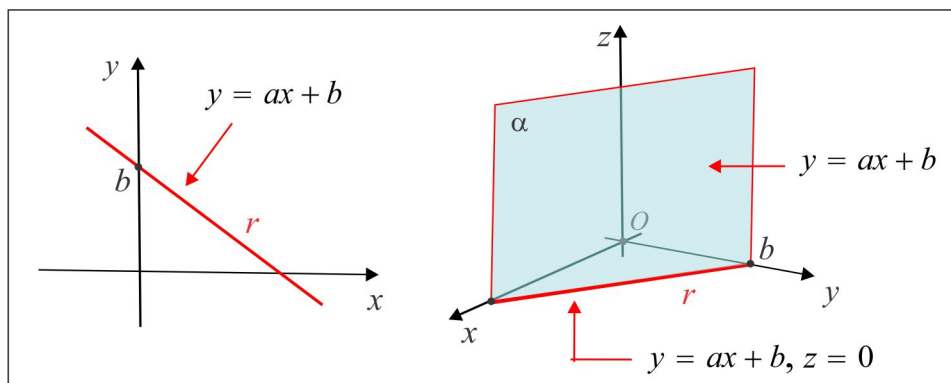


Figura 3.3: O Lugar Geométrico descrito por  $y = ax + b$ .

Ressaltamos que a mesma equação  $y = ax + b$  representa dois entes geométricos distintos, a depender da configuração ( $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) onde a equação está inserida.

### 3.1 A circunferência

Uma *Circunferência* no plano  $xy$  é o lugar geométrico constituído dos pontos  $P(x, y)$ , cuja distância a um ponto fixo, denominado *Centro* da circunferência, é constante. Essa constante recebe o nome de *Raio* da circunferência.

Na dedução da *Equação Reduzida*, vamos adotar para centro o ponto  $C(x_0, y_0)$  e representar por  $R$  o raio da circunferência. Se  $P(x, y)$  é um ponto genérico da curva, a equação que traduz o conceito é:

$$\text{dist}(P, C) = R \quad (3.2)$$

e, em coordenadas, a equação (3.2) assume a forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3.3)$$

A Figura 3.4 ilustra graficamente a circunferência de centro  $C(x_0, y_0)$ , governada pela equação (3.3).

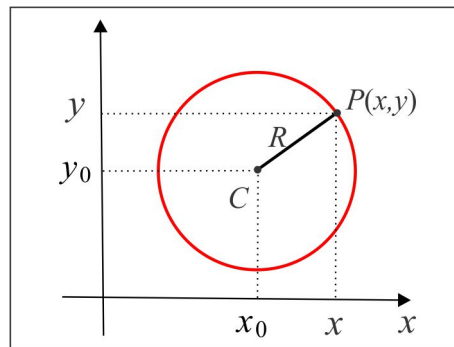


Figura 3.4: A Circunferência  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ .

**EXEMPLO 3.1.1** A circunferência de raio  $R = 5$  e centro  $C(-2, 1)$  é descrita pela equação:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20.$$

**EXEMPLO 3.1.2** Encontrar o centro e o raio da circunferência descrita pela equação:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

**Solução** Observamos que a equação não está na forma reduzida e é necessário ajustá-la usando o processo de completar quadrados, que tem sua origem nos produtos notáveis. Para transformar a expressão  $\lambda^2 \pm 2a\lambda$  em uma diferença de quadrados, procedemos da seguinte forma:

$$\lambda^2 \pm 2a\lambda = \lambda^2 \pm 2a\lambda + a^2 - a^2 = (\lambda \pm a)^2 - a^2 \quad (3.4)$$

e, assim, temos:

(i) com  $a = 1$  e  $\lambda = x$ , encontramos:  $x^2 - 2x = x^2 - 2 \times 1 \times x = (x - 1)^2 - 1$ .

(ii) com  $a = 2$  e  $\lambda = y$ , encontramos:  $y^2 + 4y = y^2 + 2 \times 2 \times y = (y + 2)^2 - 4$ .

A equação da circunferência, após o completamento dos quadrados, se escreve sob a forma reduzida:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad (3.5)$$

e comparando com (3.3), vemos que a circunferência (3.5) tem centro no ponto  $C(1, -2)$  e raio  $R = 2$ .

**OBSERVAÇÃO 3.1.3** Qualquer circunferência do plano  $xy$  pode ser descrita por uma equação do 2º grau em  $x$  e  $y$ , da forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \quad (3.6)$$

Ressaltamos, contudo, que nem toda equação do tipo (3.6) representa uma circunferência. De fato:

(i) A equação  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$  é do tipo (3.6), com  $a = -4$ ,  $b = -2$  e  $c = 5$ , e representa o ponto isolado  $C(2, 1)$ , já que a equação é equivalente a:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0,$$

de onde resulta  $x - 2 = 0$  e  $y - 1 = 0$  (uma soma de quadrados é zero se, e somente se, cada parcela é igual a zero).

(ii) Já a equação  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15 = 0$ , também do tipo (3.6), com  $a = 6$ ,  $b = -2$  e  $c = 15$ , é equivalente a  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = -5$ , a qual não tem solução real e, portanto, não representa lugar geométrico algum do plano  $xy$ .

**EXEMPLO 3.1.4 (Parametrizando a Circunferência)** Dado um ponto  $P(x, y)$  na circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

deixe  $t$  representar o ângulo entre o raio  $CP$  e o eixo  $Ox$ , como ilustra a Figura 3.5.

Usando relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos t \\ y - y_0 = R \sin t \end{cases}$$

e, assim, descrevemos a circunferência na forma parametrizada:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi. \end{cases}$$



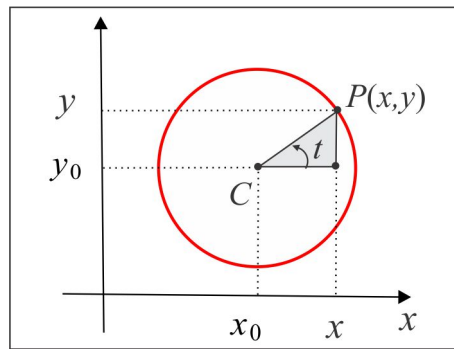


Figura 3.5: A Circunferência do Exemplo 3.1.4.

**EXEMPLO 3.1.5 (Reta Tangente)** Encontrar a reta tangente à circunferência  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ , no ponto  $A(3/2, -2 + \sqrt{3}/2)$ .

**Solução** A Figura 3.6 ilustra a situação gráfica e o raciocínio por trás do método é a ortogonalidade entre a reta tangente  $T$  e a reta que passa no centro da circunferência e no ponto de tangência.

A reta  $r$  que passa no centro  $C$  e no ponto de tangência  $A$  tem declividade  $m_r = \sqrt{3}$  e a reta tangente, por ser ortogonal à reta  $r$ , tem declividade  $m_T = -1/\sqrt{3}$  e é descrita por:

$$y = -2 + \sqrt{3}/2 + (-1/\sqrt{3})(x - 3/2) \Leftrightarrow y = -x/\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}.$$

A reta tangente  $T$  é governada pela equação

$$T : x + \sqrt{3}y = 3 - 2\sqrt{3}.$$

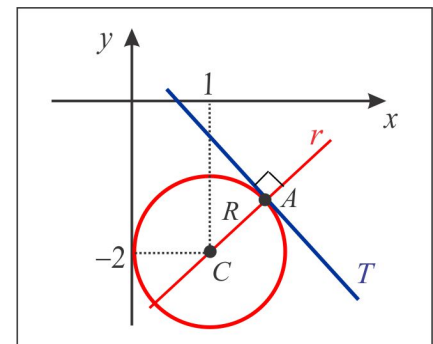


Figura 3.6: Reta Tangente

1. Em cada caso, obtenha a equação e esboce o gráfico da circunferência.

- (a) Centro  $C(-2, 1)$  e raio  $r = 5$ .
- (b) Passa pelos pontos  $A(5, 1)$ ,  $B(4, 2)$  e  $C(-2, 2)$ .
- (c) O centro está sobre a reta  $y = x - 1$  e corta o eixo  $Ox$  nos pontos  $A(-1, 0)$  e  $B(3, 0)$ .
- (d) Passa pelos pontos  $A(1, 2)$  e  $B(1, -2)$  e tem raio  $R = 2$ .

- (e) Circunscrita ao triângulo formado pelas retas  $x + y = 8$ ,  $2x + y = 14$  e  $3x + y = 22$ .
- (f) Um diâmetro é o segmento que une os pontos  $A(0, -1)$  e  $B(-2, -3)$ .
2. Determine a equação da circunferência de raio 5, tangente à reta  $3x + 4y = 16$  no ponto  $A(4, 1)$ .
3. Determine a equação da circunferência de centro  $C(1, 2)$  e tangente à reta  $r : x - 2y + 8 = 0$ .
4. Calcule o comprimento da corda da circunferência  $x^2 + y^2 = 25$  que jaz sobre a reta  $x - 7y + 25 = 0$ .

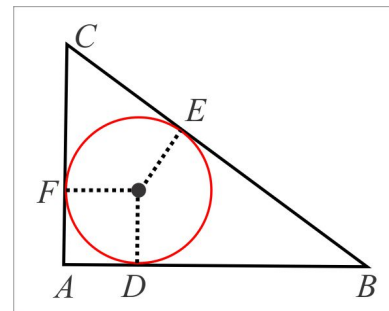
5. **O RAIOS DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA**

A figura ao lado ilustra uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo  $ABC$ . Mostre que:

(a)  $\|\vec{AD}\| = \|\vec{AF}\|$ ,  $\|\vec{BD}\| = \|\vec{BE}\|$  e  $\|\vec{CE}\| = \|\vec{CF}\|$ .

(b) O raio da circunferência é:

$$\frac{1}{2} \left( \|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\| - \|\vec{BC}\| \right)$$



6. **O INCENTRO** Considere o triângulo determinado pelas retas  $y = x$ ,  $x + y = 2$  e  $y = 0$ .

- (a) Determine as equações das bissetrizes do triângulo.
- (b) Encontre o ponto de interseção das bissetrizes. Este ponto leva o nome de *Incentro* do triângulo.
- (c) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo. O centro da circunferência é o incentro do triângulo.

**VOCÊ SABIA?** Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices de um triângulo, o incentro é o ponto  $I$ , determinado a partir da relação:

$$\vec{OI} = \frac{a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC}}{a + b + c}$$

sendo  $a = \|\vec{BC}\|$ ,  $b = \|\vec{AC}\|$  e  $c = \|\vec{AB}\|$ .

7. Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo determinado pelas retas:

$$r_1 : 4x - 3y = 65, \quad r_2 : 7x - 24y + 55 = 0 \quad \text{e} \quad r_3 : 3x + 4y = 5.$$

8. Uma haste de  $30\text{cm}$  move-se com seus extremos apoiados em dois fios perpendiculares. Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto médio da haste.

9. Determine o centro e o raio da circunferência descrita na forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

**CURIOSIDADE!** A equação da circunferência que passa por três pontos não colineares  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$  e  $C(x_C, y_C, z_C)$  pode ser posta na forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e esta forma é muito útil para testar se quatro pontos estão ou não sobre uma mesma circunferência.

## 3.2 A Elipse

Antes de formalizar o conceito de elipse como lugar geométrico, faremos uma interpretação da equação modelo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0. \quad (3.7)$$

Seja  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  e consideremos os pontos  $F_1(c, 0)$  e  $F_2(-c, 0)$ . Se as coordenadas  $x$  e  $y$  de um ponto móvel  $P(x, y)$  satisfazem à equação (3.7), vamos mostrar que a quantidade:

$$\operatorname{dist}(F_1; P) + \operatorname{dist}(F_2; P)$$

é sempre constante e igual a  $2a$ . De fato, considerando que  $b^2 = a^2 - c^2$ , (3.7) resulta:

$$\begin{aligned} b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \Leftrightarrow (a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 x^2 + a^2 c^2 + 2a^2 cx + a^2 y^2 &= 2a^2 cx + a^4 + c^2 x^2 \\ \Leftrightarrow a^2 \left[ (x + c)^2 + y^2 \right] &= (a^2 + cx)^2, \end{aligned}$$

e da última igualdade, encontramos:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx. \quad (3.8)$$

Procedendo de forma similar, substituindo  $2a^2cx$  por  $-2a^2cx$ , obtemos:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (3.9)$$

Adicionando membro a membro as equações (7.12) e (7.13), obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \boxed{\text{dist}(F_1, P) + \text{dist}(F_2, P) = 2a.}$$

### 3.2.1 Conceito & Equação Reduzida

Uma *Elipse* no plano  $xy$  é o lugar geométrico constituído dos pontos  $P(x, y)$ , cuja soma das distâncias a dois ponto fixos  $F_1$  e  $F_2$ , denominados *Focos* da elipse, é constante.

$$\|\vec{F_1P}\| + \|\vec{F_2P}\| = \text{cte}.$$

Os raios  $F_1P$  e  $F_2P$  são os *Raios Focais* do ponto  $P$  e o ponto médio dos focos é o *Centro* da elipse. A distância entre os focos recebe o nome de *Distância Focal* da elipse.

Na dedução da *Equação Reduzida* vamos considerar duas situações dentro do mesmo modelo padrão.

■ **MODELO 1** Neste primeiro modelo, vamos considerar os focos  $F_1(c, 0)$  e  $F_2(-c, 0)$  sobre o eixo  $Ox$  e admitir que a soma dos raios focais seja igual  $2a$ , isto é:

$$\boxed{\text{dist}(F_1; P) + \text{dist}(F_2; P) = 2a.} \quad (3.10)$$

Com esses dados, mostraremos que a elipse é descrita pela equação (3.7). Observando a Figura 3.7

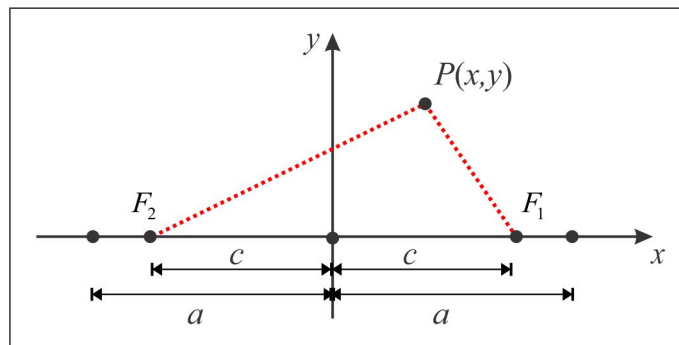


Figura 3.7: Os Focos da Elipse.

vemos, como consequência da Desigualdade Triangular, que:

$$2c = \text{dist}(F_1; F_2) \leq \text{dist}(F_1; P) + \text{dist}(F_2; P) = 2a,$$

de onde resulta que  $c \leq a$ . A partir da equação (3.10) que traduz o conceito, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(F_1; P) + \text{dist}(F_2; P) &= 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (cx + a^2)^2 &= a^2 \left[(x+c)^2 + y^2\right] \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

e se fizermos  $b^2 = a^2 - c^2$ , obteremos da última igualdade a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \quad (3.11)$$

■ **MODELO 2** Agora, suponhamos que os focos sejam os pontos  $F_1(0, c)$  e  $F_2(0, -c)$  do eixo  $Oy$ , e que a soma dos raios focais seja  $2a$ . Procedendo como no primeiro caso, considerando  $b^2 = a^2 - c^2$ , obtemos a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.} \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Gráficos & Elementos Principais

No traçado do gráfico devemos observar alguns itens e como referência vamos adotar a elipse descrita pela equação (3.11).

► **SIMETRIA** Se em (3.11) trocarmos  $x$  por  $-x$  ou  $y$  por  $-y$  a equação permanece inalterada. Graficamente isto significa que a elipse é simétrica em relação aos eixos coordenados e em relação à origem.

► **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS**

(a) A interseção com o eixo  $Ox$  é determinada considerando  $y = 0$  na equação. Encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a.$$

Assim, a elipse intercepta o eixo  $Ox$  nos pontos:  $A_1(a, 0)$  e  $A_2(-a, 0)$ .

(b) De modo similar, considerando  $x = 0$ , obtemos:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b.$$

Assim, a elipse toca o eixo  $Oy$  nos pontos  $B_1(0, b)$  e  $B_2(0, -b)$ .

► **POSIÇÃO DA ELIPSE** A posição da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  é determinada comparando-se os denominadores dos termos  $x^2$  e  $y^2$ . O maior denominador é associado à variável correspondente ao eixo sobre o qual estão os focos.

► **GRÁFICOS** A Figura 3.8 abaixo ilustra os gráficos das elipses nas duas situações.

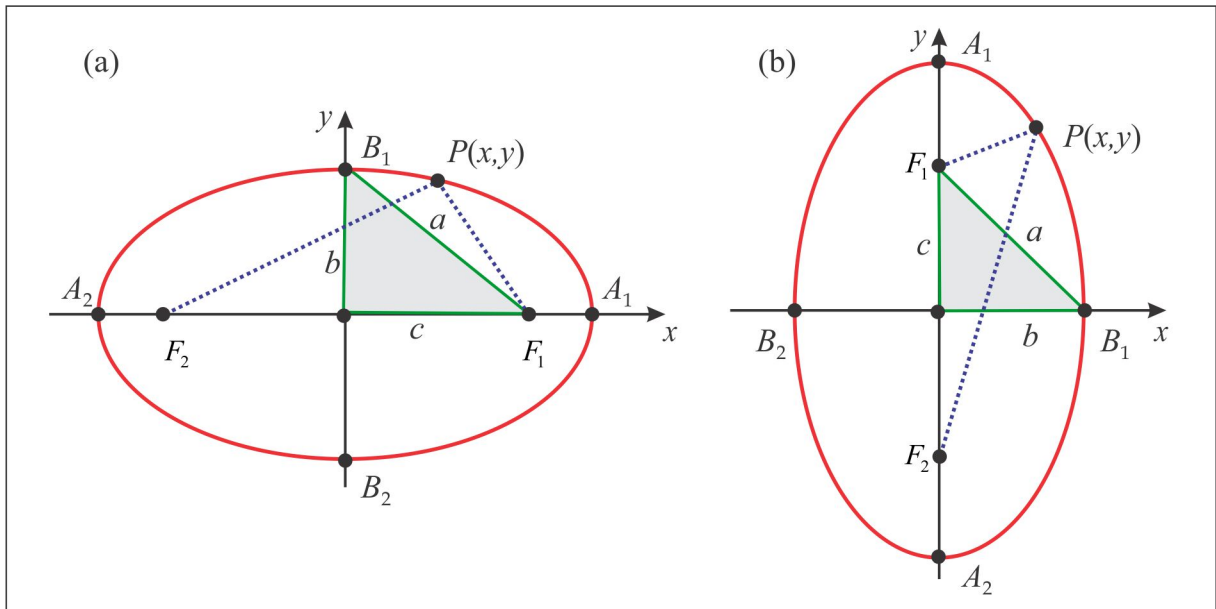


Figura 3.8: A Elipse: (a) Focos  $F(\pm c, 0)$  (b) Focos  $F(0, \pm c)$ .

► **ELEMENTOS PRINCIPAIS** Em uma elipse, os seguintes elementos devem ser destacados:

- (a) Os Focos:  $F(\pm c, 0)$  ou  $F(0, \pm c)$ .
- (b) O Centro: ponto médio dos focos:  $C(0, 0)$ .
- (c) Os Vértices:  $A_1(a, 0)$  e  $A_2(-a, 0)$ ;  $B_1(0, b)$  e  $B_2(0, -b)$ .
- (d) O Eixo maior:  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$ , onde estão localizados os Focos.
- (e) O Eixo menor:  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ .

(f) O Eixo Focal: reta que contém os focos.

(g) Os Raios Focais do ponto  $P(x, y)$ : os segmentos de reta  $F_1P$  e  $F_2P$ .

(h) A Excentricidade:  $e = c/a$ . Observamos que  $0 < e < 1$ , já que  $b < a$ , e a excentricidade mede o *achatamento* da cônica. De fato:

(i)  $e \simeq 1 \Leftrightarrow c \simeq a \Leftrightarrow b \simeq 0$  (elipse é mais *achatada*).

(ii)  $e \simeq 0 \Leftrightarrow c \simeq 0 \Leftrightarrow b \simeq a$  (elipse é menos *achatada*). Uma circunferência é uma elipse de excentricidade  $e = 0$ .

### 3.2.3 Translação da Elipse

Assim como ocorre com a circunferência, no caso em que o centro da elipse é o ponto  $C(x_0, y_0)$ , sua equação assume a forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.13)$$

e as coordenadas dos focos e dos vértices também sofrem alterações. A mudança de variável (translação):  $\bar{x} = x - x_0$  e  $\bar{y} = y - y_0$  leva a equação (3.13) à forma padrão:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

de uma elipse com focos  $\bar{F}(\pm c, 0)$  e vértices  $\bar{A}(\pm a, 0)$  e  $\bar{B}(0, \pm b)$ . Imaginemos  $a > b$ , de modo que os focos estarão sobre a reta horizontal  $y = y_0$ , paralela ao eixo  $Ox$ , como ilustra a Figura 3.9.

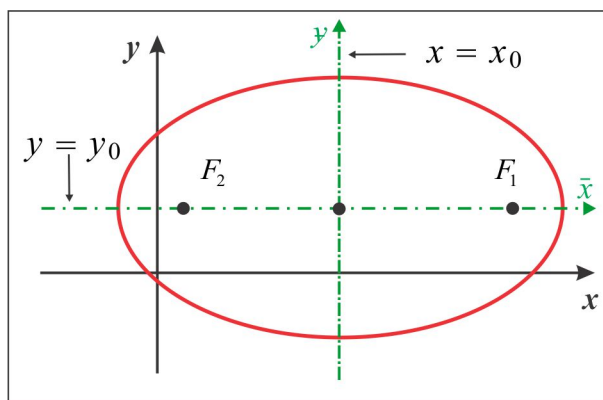


Figura 3.9: Translação da Elipse.

Neste caso, a elipse tem os seguintes elementos:

$$\text{Focos: } F(x_0 \pm c, y_0) \quad | \quad \text{Vértices: } A(x_0 \pm a, y_0) \quad \text{e} \quad B(x_0, y_0 \pm b)$$

No caso em que  $a < b$ , o que indica que o eixo focal é a reta vertical  $x = x_0$ , teremos:

$$\text{Focos: } F(x_0, y_0 \pm c) \quad | \quad \text{Vértices: } A(x_0 \pm a, y_0) \quad \text{e} \quad B(x_0, y_0 \pm b).$$

**EXEMPLO 3.2.1** *Suponhamos que certa elipse tenha centro  $C(1, 2)$  e que seus focos estejam sobre a reta  $x = 1$ , distantes 4 unidades um do outro. Temos que  $2c = 4$ , de modo que  $c = 2$ , e considerando que  $x_0 = 1$  e  $y_0 = 2$ , deduzimos que os focos são  $F_1(1, 4)$  e  $F_2(1, 0)$  e a equação é da forma:*

$$\frac{(x-1)^2}{b^2} + \frac{(y-2)^2}{a^2} = 1.$$

*Se, por exemplo, a cônica tem um vértice no ponto  $A_1(3, 2)$ , então  $b = 2$  e da relação  $a^2 = b^2 + c^2$ , deduzimos que  $a^2 = 8$ . A equação da elipse é:*

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1.$$

*Os outros vértices são:  $A_2(-1, 2)$ ,  $B_1(1, 2 + \sqrt{8})$  e  $B_2(1, 2 - \sqrt{8})$*

**ESCREVENDO PARA APRENDER 3.2**

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos, vértices, excentricidade, centro e eixos*) e esboce o gráfico da elipse caracterizada por:
  - (a) Focos  $F_1(3, 0)$ ,  $F_2(-3, 0)$  e soma dos raios focais igual a 12.
  - (b) Dois vértices em  $B_1(3, -4)$  e  $B_2(3, 4)$  e distância focal igual a 4.
  - (c) Vértices em  $A_1(-5, 0)$ ,  $A_2(5, 0)$ ,  $B_1(0, -4)$  e  $B_2(0, 4)$ .
  - (d) Focos sobre o eixo  $y$ , distância focal igual a 8 e excentricidade  $e = 2/3$ .
  - (e) Centro  $C(2, -1)$  e passa nos pontos  $A(-3, -1)$  e  $B(2, 3)$ .
  - (f) Focos  $F_1(-2, -2)$ ,  $F_2(2, 2)$  e soma dos raios focais igual a 12.
  
2. Determine a equação e a excentricidade da elipse que tem seu centro na origem, um dos vértices no ponto  $B_1(0, -7)$  e passa no ponto  $A(\sqrt{5}, 14/3)$ .

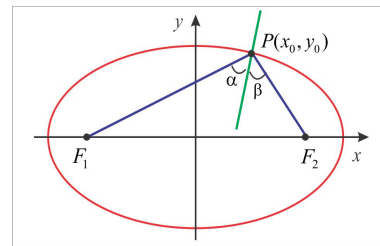


3. Determine as retas tangentes à elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , com declividade  $m = 1$ .
4. Um arco tem a forma de uma semi-elipse com 48 metros de largura na base e 20 metros de altura. Determine o comprimento de uma viga colocada a 10 metros da base, paralelamente a mesma.
5. O teto de um corredor de 20 m de largura tem a forma de uma semi-elipse e a altura no centro é 18 m. Se a altura das paredes laterais é 12 m, determine a altura do teto a 4 m de uma das paredes.
6. Identifique o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  cuja soma das distâncias aos pontos  $F_1(4, -1)$  e  $F_2(4, 7)$  é igual a 12.
7. Determine a equação da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados e que passa nos pontos  $A(-6, 4)$ ,  $B(-8, 1)$ ,  $C(2, -4)$  e  $D(8, -3)$ .
8. Determine o centro e os focos da elipse  $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$ .
9. Determine a interseção entre a elipse de vértices  $(\pm 5, 0)$  e  $(0, \pm 1)$  e a circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ .
10. Determine os focos e o centro da elipse descrita pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

11. **PROPRIEDADE FOCAL DA ELIPSE**

A figura ao lado mostra a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , com focos nos pontos  $F_1$  e  $F_2$ . Sabendo que a declividade da reta normal no ponto  $P(x_0, y_0)$  vem dada por  $m_N = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$ , mostre que a reta normal à elipse no ponto  $P(x_0, y_0)$  é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais do ponto  $P$ .



12. Determine as retas tangentes traçadas do ponto  $A(3, -1)$  à elipse  $2x^2 + 3y^2 + x - y = 5$ .
13. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  os focos da elipse  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ,  $a < b$ , e seja  $r$  uma reta tangente à elipse. Mostre que

$$\text{dist}(F_1; r) \cdot \text{dist}(F_2; r) = a^2.$$

### 3.3 A Hipérbole

Assim como fizemos no estudo da elipse, agora faremos uma interpretação da equação modelo da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0. \quad (3.14)$$

Seja  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  e consideremos os pontos  $F_1(c, 0)$  e  $F_2(-c, 0)$ . Se  $P(x, y)$  é um ponto móvel cujas coordenadas  $x$  e  $y$  satisfazem à equação (3.14), mostremos que a quantidade:

$$|\text{dist}(F_1, P) - \text{dist}(F_2, P)|$$

é sempre constante e igual a  $2a$ . Inicialmente observamos que a variável  $x$  que figura na equação (3.14) não pode assumir valores entre  $-a$  e  $a$ . De fato, se  $|x| < a$ , então  $x^2 < a^2$  e teríamos:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < 0,$$

que não possui solução real para  $y$ . Logo, devemos ter  $|x| \geq a$  e, portanto, há dois casos a considerar:

(i) Se  $x \geq a$ , então  $cx \geq a^2$ , já que  $c > a$ , e considerando que  $b^2 = c^2 - a^2$ , segue de (3.14) que:

$$\begin{aligned} b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\ \Leftrightarrow -a^2x^2 - a^2c^2 + 2a^2cx - a^2y^2 &= 2a^2cx - a^4 - c^2x^2 \\ \Leftrightarrow a^2[(x - c)^2 + y^2] &= (a^2 - cx)^2, \end{aligned}$$

e da última igualdade, resulta:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = |a^2 - cx| = cx - a^2. \quad (3.15)$$

Procedendo de forma similar, substituindo  $2a^2cx$  por  $-2a^2cx$ , encontramos:

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |a^2 + cx| = a^2 - cx \quad (3.16)$$

e subtraindo membro a membro as equações (3.15) e (3.16), obtemos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -2a. \quad (3.17)$$

(ii) Se  $x \leq -a$ , então  $a^2 + cx \leq 0$  e, neste caso, encontramos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3.18)$$

Combinando (3.17) e (3.18), obtemos:  $|\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| = 2a$ .

### 3.3.1 Conceito & Equação Reduzida

Uma *Hipérbole* no plano  $xy$  é o lugar geométrico constituído dos pontos  $P(x, y)$ , cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$ , denominados *Focos* da hipérbole, é, em valor absoluto, constante. Os raios  $F_1P$  e  $F_2P$  são os *Raios Focais* do ponto  $P$  e o ponto médio dos focos é o *Centro* da hipérbole. A distância entre os focos recebe o nome de *Distância Focal* da hipérbole. Em símbolos, temos:

$$|\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| = \text{cte.} \quad (3.19)$$

Vamos deduzir a *Equação Reduzida* em duas situações particulares.

■ **MODELO 1:** Neste primeiro modelo, vamos considerar os focos  $F_1(c, 0)$  e  $F_2(-c, 0)$  sobre o eixo  $Ox$  e admitir que a diferença dos raios focais seja, em valor absoluto, igual a  $2a$ , isto é:

$$|\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| = 2a. \quad (3.20)$$

Inicialmente observamos que  $c > a$ , tendo em vista que:

$$2a = |\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| \leq \text{dist}(F_1; F_2) = 2c$$

e de (3.20), resulta:

$$\begin{aligned} |\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| &= 2a \\ \Leftrightarrow \text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P) &= \pm 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow -cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (cx + a^2)^2 &= a^2[(x+c)^2 + y^2] \\ \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Se fizermos  $b^2 = c^2 - a^2$ , obteremos da última igualdade a equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.21)$$

■ **MODELO 2:** Agora, vamos considerar os focos  $F_1(0, c)$  e  $F_2(0, -c)$ , sobre o eixo  $Oy$ , e diferença dos raios focais, em valor absoluto, igual a  $2a$ . Procedemos de forma similar ao caso anterior e encontramos a equação reduzida:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (3.22)$$

com  $c^2 = a^2 + b^2$ .

### 3.3.2 Gráficos & Elementos Principais

Assim como ocorreu com a elipse, para o traçado do gráfico da hipérbole vamos observar algumas características da cônica.

► **SIMETRIA** O gráfico da hipérbole é simétrico em relação aos eixos  $Ox$  e  $Oy$  e também em relação à origem. A equação não é alterada por uma mudança no sinal das variáveis  $x$  ou  $y$ .

► **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS** A hipérbole (3.21) não intercepta o eixo  $Oy$ , tendo em vista que:

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1$$

e esta última equação não tem solução real para  $y$ . Já a hipérbole (3.22) não intercepta o eixo  $Ox$ , já que a equação  $-x^2/a^2 = 1$  não tem solução real para  $x$ .

(a) A interseção da hipérbole definida por (3.21) com o eixo  $Ox$ , é determinada considerando  $y = 0$  na equação. Encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a.$$

Assim, a hipérbole intercepta o eixo  $Ox$  nos vértices:  $A_1(a, 0)$  e  $A_2(-a, 0)$ .

(b) Já a hipérbole definida por (3.22) intercepta o eixo  $Oy$  nos vértices  $B_1(0, a)$  e  $B_2(0, -a)$ , determinados considerando  $x = 0$  na equação:

$$-\frac{0^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = a^2 \Leftrightarrow y = \pm a.$$

► **POSICÃO DA HIPÉRBOLE** Em uma hipérbole pode ocorrer  $a > b$ ,  $a < b$  ou  $a = b$  e a posição é determinada pelos sinais dos coeficientes nas variáveis  $x$  e  $y$ . A variável com sinal positivo corresponde ao eixo sobre o qual estão os focos.

► **GRÁFICOS** As Figuras 3.10 e 3.11 abaixo ilustram os gráficos das hipérbolas nas duas situações.

► **ELEMENTOS PRINCIPAIS** Em uma hipérbole, destacamos os seguintes elementos:

(a) Os Focos:  $F(\pm c, 0)$ , no caso (3.21), e  $F(0, \pm c)$ , no caso (3.22).

(b) O Centro:  $C(0, 0)$ , nos dois casos. (ponto médio dos focos)

(c) Os Vértices:  $A(\pm a, 0)$ , no caso (3.21), e  $B(0, \pm a)$ , no caso (3.22).

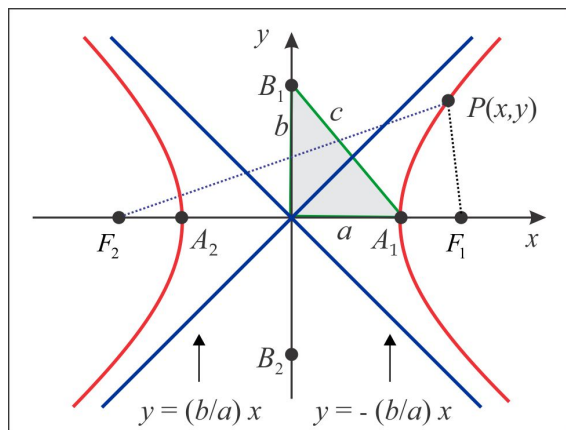


Figura 3.10:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

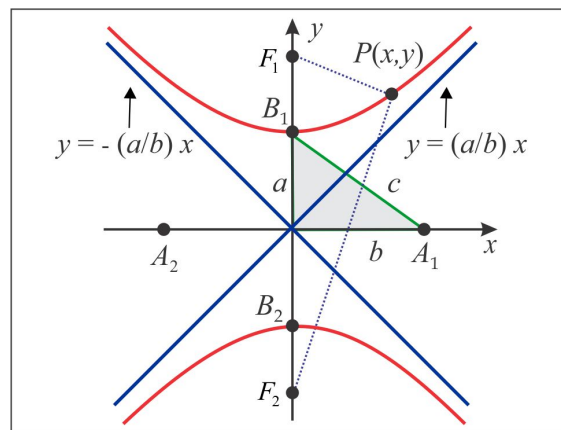


Figura 3.11:  $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .

- (d) O Eixo Focal: O segmento  $F_1F_2$ .
- (e) O Eixo Transverso: a porção do Eixo Focal entre os vértices (o segmento  $A_1A_2$  ou  $B_1B_2$ ).
- (f) O Eixo Conjugado: segmento  $B_1B_2$  perpendicular ao Eixo Transverso, na hipérbole (3.21) e  $A_1A_2$  na hipérbole (3.22).
- (f) Os Raios Focais do ponto  $P(x, y)$ :  $F_1P$  e  $F_2P$ .
- (g) A Excentricidade: O número  $e = c/a$  é maior que 1 mede o *achatamento* da cônica. No caso em que  $e \approx 1$ , a hipérbole aproxima-se das semiretas com origem nos focos.

► COMPORTAMENTO NO INFINITO Para maior clareza, vamos nos concentrar na hipérbole (3.21) e vejamos como se comporta o gráfico, à medida que a variável  $x$  aumenta ou diminui arbitrariamente (este comportamento do  $x$  é indicado simbolicamente por:  $x \rightarrow +\infty$ , no deslocamento para a direita, ou  $x \rightarrow -\infty$ , no deslocamento para a esquerda). Temos:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \leq \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow |y| \leq \frac{b}{a}|x| \Leftrightarrow -\frac{b}{a}|x| \leq y \leq \frac{b}{a}|x|.$$

Isto nos diz que o gráfico da hipérbole jaz entre as retas  $y = \pm(b/a)x$ . Além disso, se  $P(x, y)$ ,  $y \geq 0$ , é um ponto móvel sobre a hipérbole, se deslocando para direita ( $x \rightarrow +\infty$ ) e  $r$  é a reta de equação  $y = (b/a)x$ , então de acordo com a fórmula (??), da distância de ponto à reta, temos:

$$\text{dist}(P; r) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{c} \left| bx - b\sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{c} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{a^2b}{c} \left| \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right|. \quad (3.23)$$

Um fato básico é que uma fração, com numerador constante, aproxima-se de zero à medida em que o denominador cresce arbitrariamente; com isto em mente, deduzimos a partir de (3.23) que a hipérbole aproxima-se da reta  $y = (b/a)x$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ . Da mesma forma, quando  $x \rightarrow -\infty$  a hipérbole aproxima-se da reta  $y = -(b/a)x$ . No caso em que  $y < 0$ , a hipérbole aproxima-se da reta  $y = (b/a)x$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ , e da reta  $y = -(b/a)x$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ . Por esta razão, as retas  $y = \pm(b/a)x$  recebem o nome de *Assíntotas da Hipérbole*. No caso da hipérbole (3.22), as assíntotas são as retas  $x = \pm(b/a)y$ , o que nos dá  $y = \pm(a/b)x$ .

**EXEMPLO 3.3.1** Qual a equação da hipérbole com focos  $F_1(2, 0)$  e  $F_2(-2, 0)$  e um vértice no ponto  $A_1(1, 0)$ ?

**Solução:** O centro da hipérbole é a origem e o eixo focal é o eixo  $Ox$ . Como  $a = 1$  e  $c = 2$ , segue que  $b^2 = c^2 - a^2 = 3$  e a equação é:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

**EXEMPLO 3.3.2** Identificar a cônica descrita pela equação:

$$-9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 29.$$

**Solução:** O primeiro passo é escrever a equação na forma padrão (3.21) ou (3.22). Efetuando o completamento dos quadrados, encontramos:

$$-9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \quad \text{ou} \quad -\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

e a translação:  $\bar{x} = x + 1$  e  $\bar{y} = y - 2$ , de centro  $\bar{O}(-1, 2)$ , nos remete ao padrão (3.22):

$$-\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

com  $a = 2$  e  $b = 3$ , ilustrada no Figura 3.12.

Temos  $c = \sqrt{13}$  e na tabela abaixo mostramos os elementos da hipérbole no sistema auxiliar  $\bar{x} \bar{y}$  e no sistema original  $xy$ . A passagem de um sistema para o outro é por meio das equações de translação.

| Elementos  | Sistema $\bar{x} \bar{y}$   | Sistema $xy$  |
|------------|-----------------------------|---|
| Centro     | $\bar{C}(0, 0)$             | $C(-1, 2)$  |
| Vértices   | $\bar{V}(0, \pm 3)$         | $B_1(-1, 5)$ e $B_2(-1, -1)$                        |
| Focos      | $\bar{F}(0, \pm\sqrt{13})$  | $F_1(-1, 2 + \sqrt{13})$ e $B_2(-1, 2 - \sqrt{13})$ |
| Assíntotas | $\bar{y} = \pm(3/2)\bar{x}$ | $3x - 2y = -7$ e $3x + 2y = 1$                      |
| Eixo Focal | $\bar{x} = 0$               | $x = -1$  |

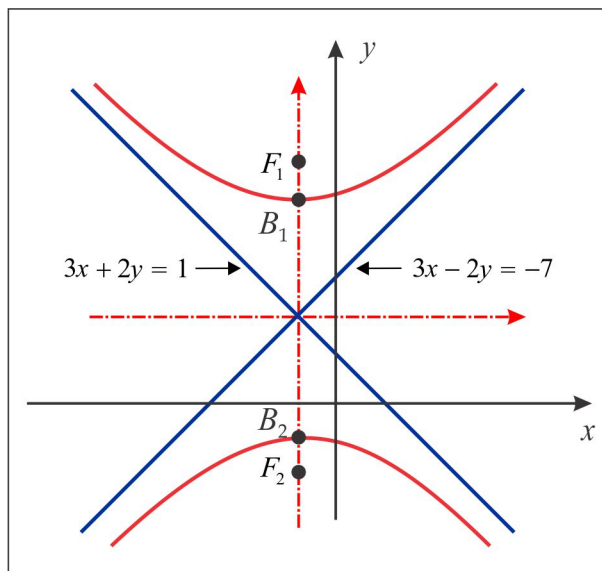


Figura 3.12: Hipérbole do Exemplo 3.3.2

**EXEMPLO 3.3.3 (hipérbole transladada)** O centro de uma hipérbole está no ponto  $C(x_0, y_0)$  e a distância focal é igual a  $2c$ . Considerando o comprimento do eixo transverso igual a  $2a$ , há dois casos a considerar:

(i) O eixo focal é paralelo ao eixo  $Ox$  e, neste caso, a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

com assíntotas:

$$\pm bx - ay = \pm bx_0 - ay_0$$

obtidas de  $\bar{y} = \pm (b/a)\bar{x}$ , a partir da mudança de variável:  $\bar{x} = x - x_0$  e  $\bar{y} = y - y_0$ .

(ii) O eixo focal é paralelo ao eixo  $Oy$  e, neste caso, a equação da hipérbole é:

$$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

com assíntotas:

$$\pm ax - by = \pm ax_0 - by_0$$

obtidas de  $\bar{y} = \pm (a/b)\bar{x}$ , a partir da mudança de variável:  $\bar{x} = x - x_0$  e  $\bar{y} = y - y_0$ .

► HIPÉRBOLES CONJUGADAS As hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em que o eixo transverso de uma coincide com o eixo conjugado da outra denominam-se *Hipérboles Conjugadas*. Elas possuem as mesmas assíntotas e na Figura 3.13 ilustramos duas hipérboles conjugadas, em que iniciamos a construção desenhando o retângulo de lados  $2a$  e  $2b$ , cujas diagonais se encontram ao longo das assíntotas das hipérboles.

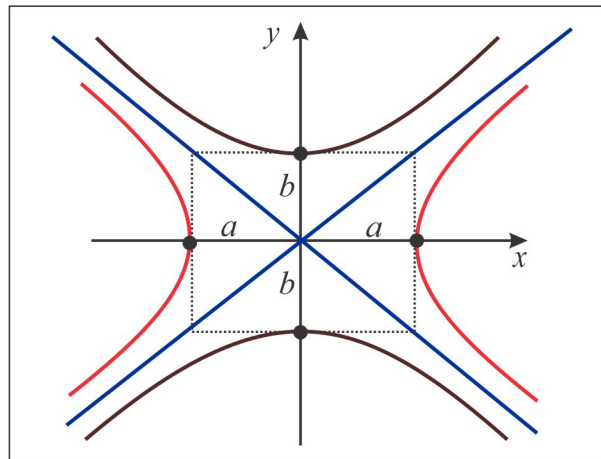


Figura 3.13: Hipérboles Conjugadas.

### 3.3.3 Hipérbole Equilátera

Agora, vamos considerar hipérboles descritas por uma equação do tipo:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad -x^2 + y^2 = b^2, \quad (3.24)$$

inserida no Modelo 1 ou Modelo 2, com  $a = b$ , e denominadas *Hipérboles Equiláteras*.

Como motivação, vamos considerar a hipérbole de focos  $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  e  $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e vértices  $V_1(1, 1)$  e  $V_2(-1, -1)$ , ilustrada na Figura 3.14, cujo eixo focal é a reta  $y = x$  e eixo conjugado de comprimento  $2a = 2\sqrt{2}$ . A partir da definição obtemos, após as simplificações:

$$|\text{dist}(F_1, P) - \text{dist}(F_2, P)| = 2a \Leftrightarrow xy = 1.$$



A equação  $xy = 1$  pode ser inserida no modelo (3.24) por meio da mudança de variável:

$$\begin{cases} \bar{x} = (\frac{\sqrt{2}}{2})x + (\frac{\sqrt{2}}{2})y \\ \bar{y} = -(\frac{\sqrt{2}}{2})x + (\frac{\sqrt{2}}{2})y \end{cases} \quad (3.25)$$

De fato, resolvendo (3.25) encontramos:  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$  e  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$  e daí resulta:

$$xy = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1. \quad (3.26)$$

A última equação em (3.26) é do tipo (3.24), com  $a = \sqrt{2}$ , e a mudança de variável (3.25) corresponde a uma rotação do sistema  $xy$  de um ângulo de  $\pi/4$  rad ou  $45^\circ$ , como ilustra a Figura 3.14.

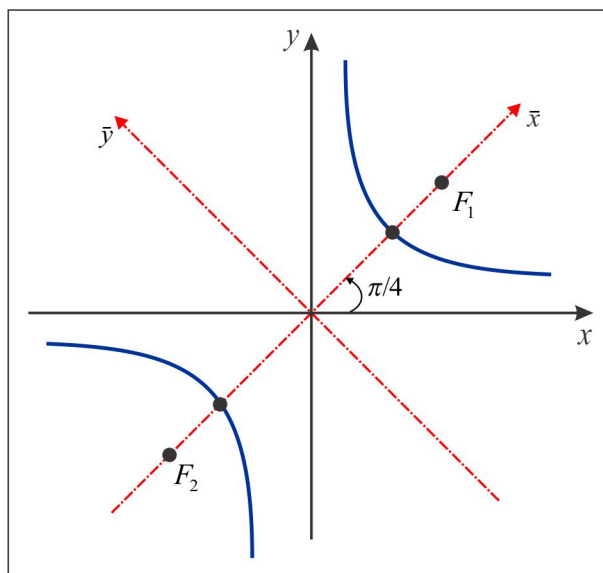


Figura 3.14: Hipérbole Equilátera  $xy = 1$ .

Considerando como motivação a hipérbole equilátera  $xy = 1$ , vamos estudar o lugar geométrico descrito pela equação:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (3.27)$$

sendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  parâmetros constantes e  $x \neq -d/c$ . Faremos uma análise do comportamento da cônica a partir da noção intuitiva de limite. Adotaremos como modelo a equação

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0 \quad (3.28)$$

sendo  $k$  uma constante não nula. Há dois casos a considerar, dependendo do sinal da constante  $k$ .

► 1º CASO  $k > 0$ : Neste caso,  $x$  e  $y$  têm mesmo sinal e isto indica que a hipérbole é constituída de um ramo no primeiro quadrante ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ) e outro no terceiro quadrante ( $x < 0$ ,  $y < 0$ ). Para esboçar o gráfico com alguma precisão, é necessário estudar como se comporta a variável  $y$ , à medida que  $x$  se aproxima de zero (indicamos  $x \rightarrow 0$ ), quando  $x$  cresce arbitrariamente, com valores positivos (indicamos  $x \rightarrow +\infty$ ) e quando  $x$  decresce arbitrariamente, com valores negativos (indicamos  $x \rightarrow -\infty$ ). A aproximação de  $x$  para zero pode ocorrer com valores positivos, isto é, pela direita ( $x \rightarrow 0^+$ ) ou pela esquerda, com valores negativos ( $x \rightarrow 0^-$ ).

Vejam os comportamentos da fração  $k/x$  em várias situações, levando em conta o sinal de  $x$  e da fração  $k/x$ , onde aproveitamos o momento para apresentar a notação simbólica para o limite.

(a) Como  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , o gráfico da hipérbole  $y = k/x$  não toca o eixo  $Ox$  nem o eixo  $Oy$ .

(b) Quando  $x \rightarrow +\infty$ , então  $y \rightarrow 0^+$ . Traduzimos esta afirmação da seguinte forma: quando  $x$  cresce arbitrariamente, com valores positivos, então a fração  $y = k/x$  é positiva, mas, arbitrariamente próxima de zero. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{k}{x} \right) = 0^+.$$

(c) Quando  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow 0^-$ . Aqui a fração  $y = k/x$  é negativa e próxima de zero.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{k}{x} \right) = 0^-.$$

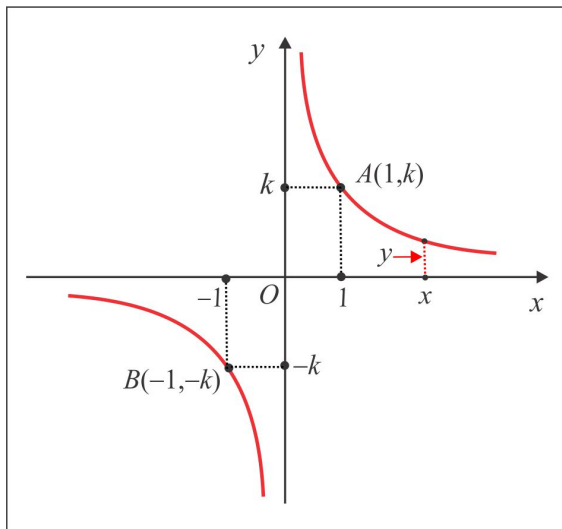
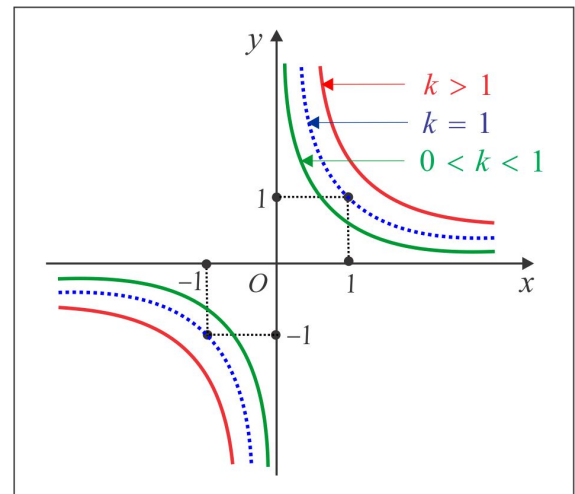
(d) Quando  $x \rightarrow 0^+$ , então  $y \rightarrow +\infty$ , ao longo do eixo vertical. Quando  $x$  é positivo e próximo de zero, a fração  $y = k/x$  é arbitrariamente grande.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{k}{x} \right) = +\infty.$$

(e) Quando  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow -\infty$ , ao longo do eixo vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{k}{x} \right) = -\infty.$$

Com estas informações, vamos esboçar o gráfico da hipérbole  $y = k/x$ ,  $x \neq 0$ ,  $k > 0$ , que se assemelha ao da hipérbole de equação  $xy = 1$ , como ilustrado nas Figuras 3.15 e 3.16.

Figura 3.15:  $xy = k$ ,  $k > 0$ .Figura 3.16:  $xy = k$ ,  $k > 0$ .

Quando  $x \rightarrow 0$  ou  $x \rightarrow \pm\infty$ , vemos que o gráfico da hipérbole aproxima-se do eixo  $Oy$  ou do eixo  $Ox$  e, portanto, o eixo  $Ox$ , de equação  $y = 0$ , e o eixo  $Oy$ , de equação  $x = 0$ , são as assíntotas da hipérbole.

► **2º CASO**  $k < 0$ : Este é o caso em que  $x$  e  $y$  têm sinais opostos e o gráfico da hipérbole tem um ramo no 2º quadrante ( $x < 0$ ,  $y > 0$ ) e outro no 4º quadrante ( $x > 0$ ,  $y < 0$ ). O comportamento do  $y$  segue o mesmo ritual do 1º Caso, com algumas modificações nos sinais.

- (a) Como  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , o gráfico da hipérbole  $y = k/x$  não toca o eixo  $Ox$  nem o eixo  $Oy$ .  
 (b) Quando  $x \rightarrow +\infty$ , então  $y \rightarrow 0^-$ . Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{k}{x} \right) = 0^-.$$

- (c) Quando  $x \rightarrow -\infty$ , então  $y \rightarrow 0^+$ . Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{k}{x} \right) = 0^+.$$

- (d) Quando  $x \rightarrow 0^+$ , então  $y \rightarrow -\infty$ , ao longo do eixo vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{k}{x} \right) = -\infty.$$

(e) Quando  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow +\infty$ , ao longo do eixo vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{k}{x} \right) = +\infty.$$

Os eixos  $Ox$  e  $Oy$  são as assíntotas da hipérbole e o gráfico está ilustrado nas Figuras 3.17 e 3.18.

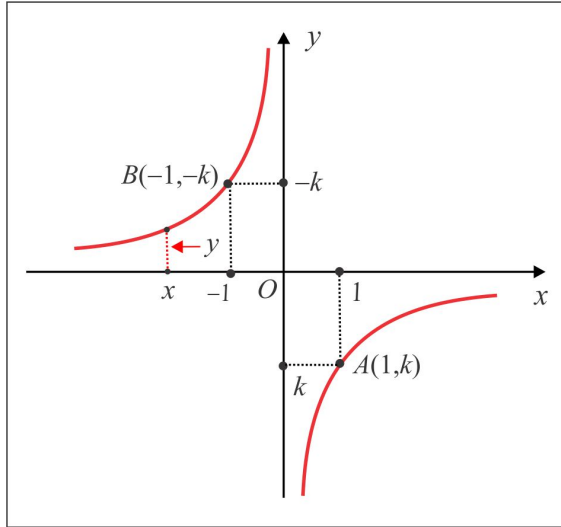


Figura 3.17:  $xy = k$ ,  $k < 0$ .

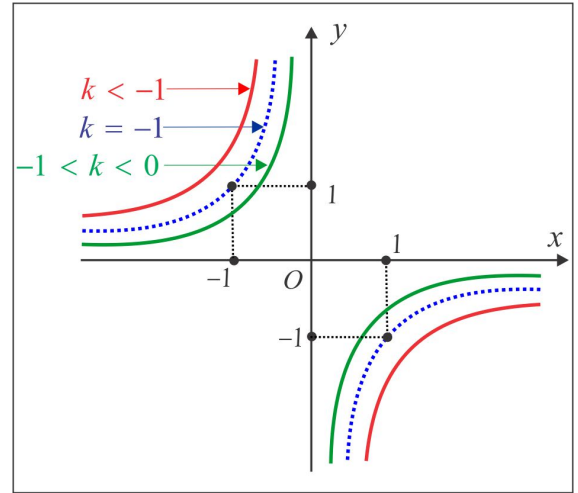


Figura 3.18:  $xy = k$ ,  $k < 0$ .

**CASO GERAL:** O caso geral (3.27) se reduz ao Caso 1 ou 2, por meio de uma mudança de variável (translação). Vejamos o passo-a-passo até à equação final  $\bar{y} = k/\bar{x}$ . Temos:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} \left( \frac{x + b/a}{x + d/c} \right) = \frac{a}{c} \left[ \frac{(x + d/c) + b/a - d/c}{x + d/c} \right] = \frac{a}{c} \left( 1 + \frac{b/a - d/c}{x + d/c} \right).$$

Daí resulta a equivalência:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow y - \frac{a}{c} = \frac{k}{x + d/c} \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{k}{\bar{x}}$$

com  $\bar{x} = x + d/c$ ,  $\bar{y} = y - a/c$  e  $k = (bc - ad)/c^2$ .

**EXEMPLO 3.3.4** Vamos identificar a hipérbole governada pela equação:

$$y = \frac{2x - 4}{x - 1}.$$

Inicialmente observamos que  $x \neq 1$  e que a equação da hipérbole é equivalente a:

$$y - 2 = \frac{-2}{x - 1}$$

e com a translação  $\bar{x} = x - 1$  e  $\bar{y} = y - 2$  a equação assume a forma do Caso 2, com  $k = -2$ :

$$\bar{y} = -\frac{2}{\bar{x}}.$$

As assíntotas são as retas  $\bar{x} = 0$  e  $\bar{y} = 0$ , isto é,  $x = 1$  e  $y = 2$ . As interseções com os eixos  $Ox$  e  $Oy$  são os pontos  $A(2, 0)$  e  $B(0, 4)$ , respectivamente. O gráfico tem o aspecto da Figura 3.19.

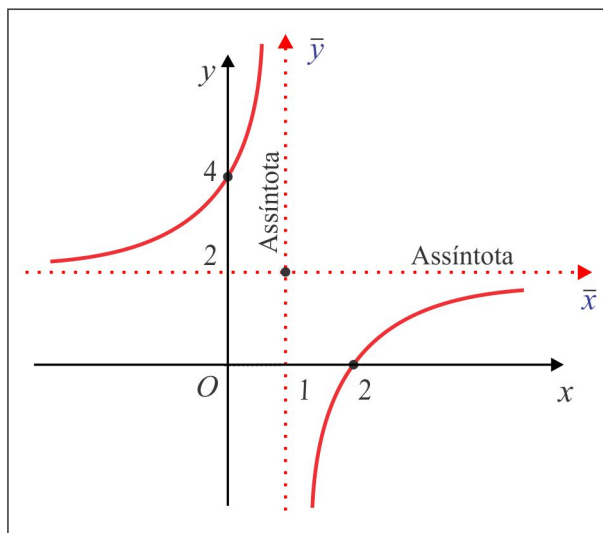


Figura 3.19: Hipérbole Equilátera  $y = \frac{2x - 4}{x - 1}$ .

► **SOBRE A NOTAÇÃO DE LIMITE** Vamos destacar alguns aspectos decorrentes da expressão:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b.$$

- (i) Lê-se: "limite de  $y$ , quando  $x$  tende para  $a$ , é igual a  $b$ ."
- (ii) Na expressão não está especificado se  $x$  está á direita ou à esquerda de  $\underline{a}$ ; ela relata que  $x$  está arbitrariamente próximo de  $a$ , sem contudo, atingir o valor  $\underline{a}$ .
- (iii) Para especificar que  $x$  tende para  $\underline{a}$  da esquerda para a direita, isto é, com valores menores do que  $a$ , anotamos:  $x \rightarrow a^-$ . A expressão  $\lim_{x \rightarrow a^-} y = b$  indica um *limite lateral à esquerda*. Da mesma forma,  $\lim_{x \rightarrow a^+} y = b$  indica que  $y$  estará arbitrariamente próximo de  $\underline{b}$ , quando  $x$  estiver à direita (maior do que) e arbitrariamente próximo de  $\underline{a}$  e indica um *limite lateral à direita*.

- (iv) Por fim, o limite de  $y$  quando  $x \rightarrow a$  existe e tem valor  $\underline{b}$  se, e somente se, os limites laterais no ponto  $\underline{a}$  forem iguais a  $\underline{b}$ , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} y = b \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} y = b. \quad (3.29)$$

A equivalência (3.29) é um argumento bastante utilizado na investigação da existência de limite.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos, vértices, excentricidade, centro, eixos e assíntotas*) e esboce o gráfico da hipérbole caracterizada por:
  - (a) Focos  $F_1(5, 0)$ ,  $F_2(-5, 0)$  e diferença dos raios focais igual a 6.
  - (b) Focos  $F_1(2, -7)$ ,  $F_2(2, 5)$  e diferença dos raios focais igual a 5.
  - (c) Vértices em  $A_1(2, -1)$ ,  $A_2(2, 7)$  e excentricidade  $e = 3/2$ .
  - (d) Vértices em  $A_1(0, -2)$ ,  $A_2(0, 2)$ , não corta o eixo  $x$  e tem assíntotas  $y = \pm 2x$ .
  - (e) Focos  $F_1(-2, 2)$ ,  $F_2(2, -2)$  e vértices  $V_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  e  $V_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .
2. Calcule a área do triângulo determinado pela reta  $9x + 2y = 24$  e pelas assíntotas da hipérbole  $9x^2 - 4y^2 = 36$ .
3. Um triângulo tem a base fixa e o produto das inclinações dos lados variáveis é sempre igual a
  4. Se a base é o segmento que une os pontos  $A(3, 0)$  e  $B(-3, 0)$ , identifique o lugar geométrico descrito pelo vértice oposto à base.
4. Determine a equação da hipérbole com centro na origem, um vértice no ponto  $V_1(6, 0)$  e tendo a reta  $4x - 3y = 0$  como uma das assíntotas.
5. Ache a excentricidade, o centro, os focos e as assíntotas da hipérbole  $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$ .
6. Se  $e$  é a excentricidade da hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , mostre que os raios focais de um ponto  $P_0(x_0, y_0)$  da hipérbole têm comprimento  $|ex_0 \pm a|$ . Determine os comprimentos dos raios focais do ponto  $P_0(6, 5)$  sobre a hipérbole  $5x^2 - 4y^2 = 80$ .
7. O centro de uma hipérbole está na origem, seu eixo transversal jaz sobre o eixo  $y$  e um dos focos é o ponto  $F_1(5, 0)$ . Se a excentricidade da hipérbole é  $e = 3$ , determine sua equação e suas assíntotas.

8. Se  $\alpha$  é o ângulo agudo de inclinação de uma assíntota da hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , mostre que a excentricidade da hipérbole é  $\sec \alpha$ .
9. Esboce no mesmo sistema de coordenadas as curvas  $x^2 - y^2 = k$  para os seguintes valores de  $k$ :  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  e  $2$ .
10. Esboce o gráfico e encontre as assíntotas da hipérbole equilátera:  $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$ .

### 3.4 A Parábola

Iniciamos com a parábola de equação  $y = ax^2$ ,  $a \neq 0$ , cujo gráfico é tangente ao eixo  $Ox$  na origem. A concavidade do gráfico (para cima ou para baixo) depende do sinal do coeficiente  $a$ , como ilustram as Figuras 3.20 e 3.21. No caso  $a > 0$ , temos  $y = ax^2 \geq 0$ ,  $\forall x$ , e a origem é um ponto de mínimo do gráfico, enquanto no caso  $a < 0$  ocorre  $y = ax^2 \leq 0$ ,  $\forall x$ , e a origem é um ponto de máximo do gráfico.

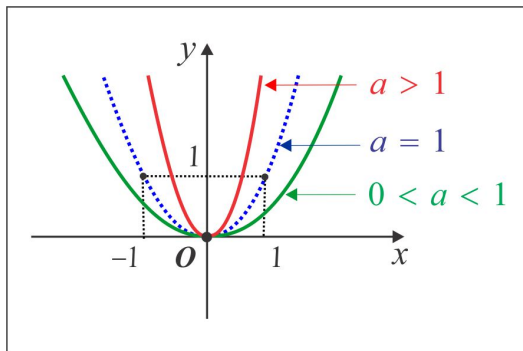


Figura 3.20:  $y = ax^2$ ,  $a > 0$

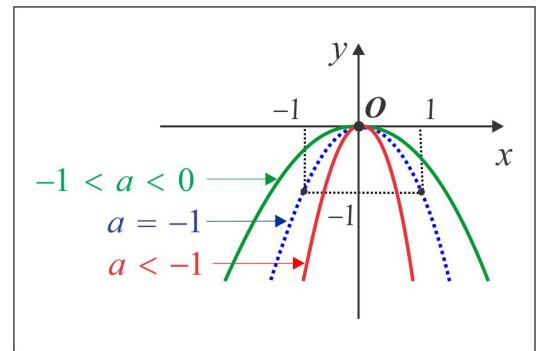


Figura 3.21:  $y = ax^2$ ,  $a < 0$

O caso geral  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , será reduzido ao caso apresentado por meio de uma simples translação. Vejamos um exemplo como modelo.

**EXEMPLO 3.4.1** Esboçar o gráfico da parábola descrita pela equação:  $y = 2x^2 - 4x + 4$ .

**Solução:** Efetuando o completamento do quadrado, obtemos a equação:

$$y = 2(x - 1)^2 + 2$$

e por meio da mudança  $\bar{x} = x - 1$  e  $\bar{y} = y - 2$  chegamos à equação reduzida:  $\bar{y} = 2\bar{x}^2$ . O ponto de mínimo do gráfico é a nova origem  $\bar{O}(1, 2)$  e para dar maior fidelidade ao gráfico ilustrado na Figura 3.22, é aconselhável determinar as possíveis interseções com os eixos  $Ox$  e  $Oy$ .

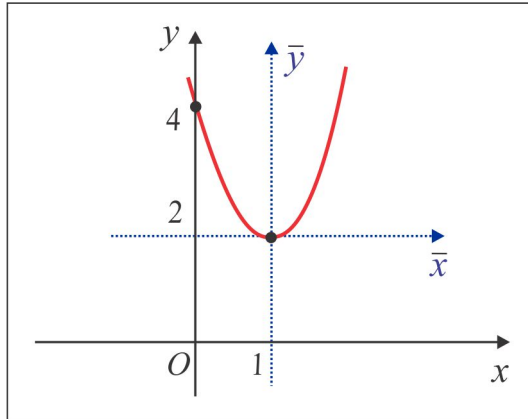


Figura 3.22: Parábola  $y = 2x^2 - 4x + 4$ .

- (i) Interseção com o eixo  $Oy$ : Considerando na equação original  $x = 0$  (recorde-se que nos pontos do eixo  $Oy$  tem-se  $x = 0$ ), encontramos  $y = 4$  e a interseção com o eixo  $Oy$  é o ponto  $A(0, 4)$ .
- (ii) Interseção com o eixo  $Ox$ : Fazendo  $y = 0$  na equação original (recorde-se que nos pontos do eixo  $Ox$  tem-se  $y = 0$ ), chegamos à equação do 2º grau  $2x^2 - 4x + 4 = 0$ , sem raiz real, já que o discriminante é  $\Delta = -16 < 0$ . Portanto, o gráfico não toca o eixo  $Ox$ .

**EXEMPLO 3.4.2** No caso geral da parábola  $y = ax^2 + bx + c$ , imitando o que foi feito no Exemplo 3.4.1, encontramos:

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad (3.30)$$

onde  $\Delta = b^2 - 4ac$  é o discriminante. Se fizermos  $x = -b/2a$  em (3.30), obtemos  $y = -\Delta/4a$  e o ponto extremo (máximo ou mínimo)  $V(-b/2a, -\Delta/4a)$  é o vértice da parábola (nova origem). A parábola intercepta o eixo  $Oy$  no ponto  $B(0, c)$  e com o eixo  $Ox$  pode haver interseção ou não. Se o discriminante  $\Delta < 0$ , não há interseção com o eixo  $Ox$ ; se  $\Delta = 0$  a parábola intercepta o eixo  $Ox$  no ponto  $A(-b/2a, 0)$ ; se  $\Delta > 0$ , a parábola intercepta o eixo  $Ox$  nos pontos  $A(x, 0)$  de abscissa  $x = \left( -b \pm \sqrt{\Delta} \right) / 2a$ , que são precisamente as raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**EXEMPLO 3.4.3 (Rotação da Parábola)** A equação  $x = ay^2$ ,  $a \neq 0$ , também representa parábolas. Houve uma permuta entre as variáveis  $x$  e  $y$  e, graficamente, essa permuta corresponde a uma rotação de  $90^\circ$  ( $\pi/2$  rad) no sistema de coordenadas. A Figura 3.23 ilustra os gráficos, nos casos  $a = \pm 1$ .



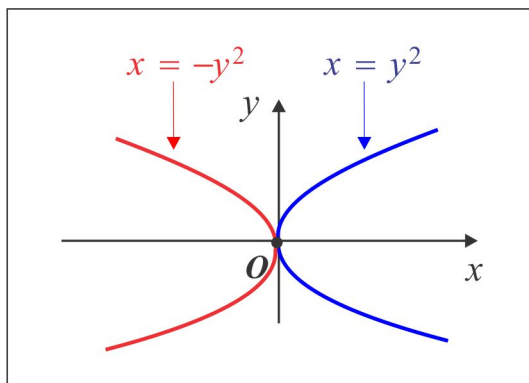


Figura 3.23: Parábolas  $x = \pm y^2$ .

### 3.4.1 O Foco e a Diretriz da Parábola

Fixemos no plano  $xy$  um ponto  $F$  e uma reta  $r$ . Denomina-se *Parábola de Foco  $F$  e Diretriz  $r$*  ao lugar geométrico constituído dos pontos  $P(x, y)$  equidistantes do ponto  $F$  e da reta  $r$ , isto é:

$$\text{dist}(F; P) = \text{dist}(P; r). \quad (3.31)$$

A reta que passa no foco e é perpendicular à diretriz recebe o nome de *Eixo Focal*. A partir da equação geral (3.31) vamos encontrar a equação cartesiana da parábola, em alguns casos especiais. Para isto, fixemos um parâmetro real  $p > 0$ .

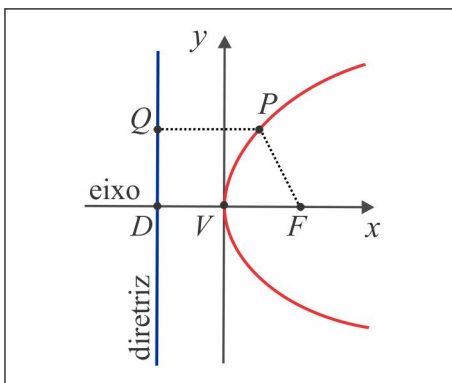
■ **MODELO 1:** O foco é o ponto  $F(p, 0)$  e a diretriz é a reta  $x = -p$ , ortogonal ao eixo  $Ox$ . A Figura 3.24 ilustra graficamente a situação, onde destacamos os pontos:

- (i)  $F(p, 0)$  e  $P(x, y)$  respectivamente, o foco e um ponto genérico da parábola.
- (ii)  $Q(-p, y)$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $P$  à diretriz.
- (iii)  $D(-p, 0)$  ponto de interseção do eixo da parábola (eixo  $Ox$ ) com a diretriz.

O vértice da parábola é o ponto médio do segmento  $DF$  que, neste caso, coincide com a origem.

Notando que  $\text{dist}(P; r) = \text{dist}(P, Q)$ , obtemos a partir de (3.31):

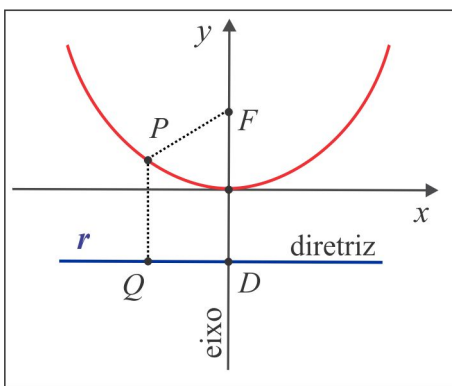
$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \sqrt{(x + p)^2}$$

Figura 3.24: Parábola  $y^2 = 4px$ .

e após as simplificações chegamos à equação cartesiana da parábola.

$$y^2 = 4px$$

■ **MODELO 2:** O foco é o ponto  $F(0, p)$  e a diretriz é a reta  $y = -p$ , orthogonal ao eixo  $Oy$ .

Figura 3.25: Parábola  $x^2 = 4py$ .

A Figura 3.25 ilustra graficamente este caso, onde destacamos os pontos  $Q(x, -p)$  e  $D(0, -p)$ . Mais uma vez o vértice é a origem e a equação (3.31) neste caso é:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}.$$

Simplificando a última equação, obtemos:

$$x^2 = 4py.$$

Nas Figuras 3.26 e 3.27 ilustramos as variantes dos Modelos 1 e 2, onde trocamos  $p$  por  $-p$ :

(i) Foco  $F(-p, 0)$  e diretriz  $x = p$ . Neste caso, a parábola é descrita por:  $y^2 = -4px$ .

(ii) Foco  $F(0, -p)$  e diretriz  $y = p$ . Neste caso, a parábola é descrita por:  $x^2 = -4py$ .

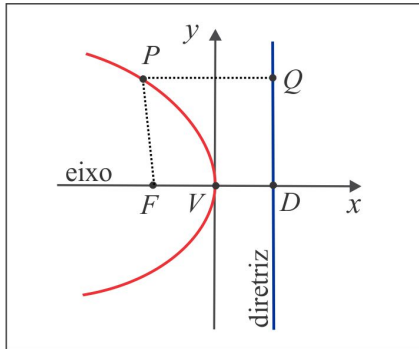


Figura 3.26:  $y^2 = -4px$ ,  $p > 0$

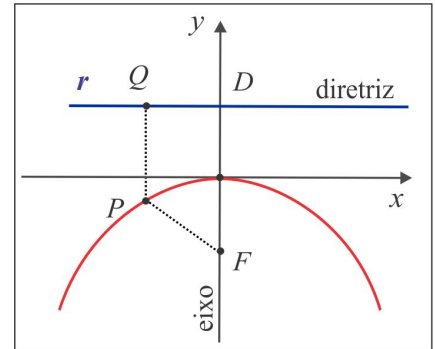


Figura 3.27:  $x^2 = -4py$ ,  $p > 0$

**EXEMPLO 3.4.4** Olhando a parábola  $y^2 = x$  sob a forma padrão:

$$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$$

com  $p = 1/4$ , deduzimos que ela tem foco no ponto  $F(1/4, 0)$ , vértice está na origem e a diretriz é a reta vertical  $y = -1/4$ .

### 3.4.2 Translação da Parábola

Com a mudança de variável

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

a equação quadrática:

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0), \quad p > 0 \quad (3.33)$$

torna-se  $\bar{x}^2 = \pm 4p\bar{y}$  e representa a parábola do Modelo 1 e sua variante, ilustradas na Figura 3.28 e caracterizadas por:

(a) vértice  $V(x_0, y_0)$ , Foco  $F(x_0, y_0 + p)$  e diretriz  $r : y = y_0 + p$ .

(b) vértice  $V(x_0, y_0)$ , Foco  $F(x_0, y_0 - p)$  e diretriz  $r : y = y_0 - p$ .

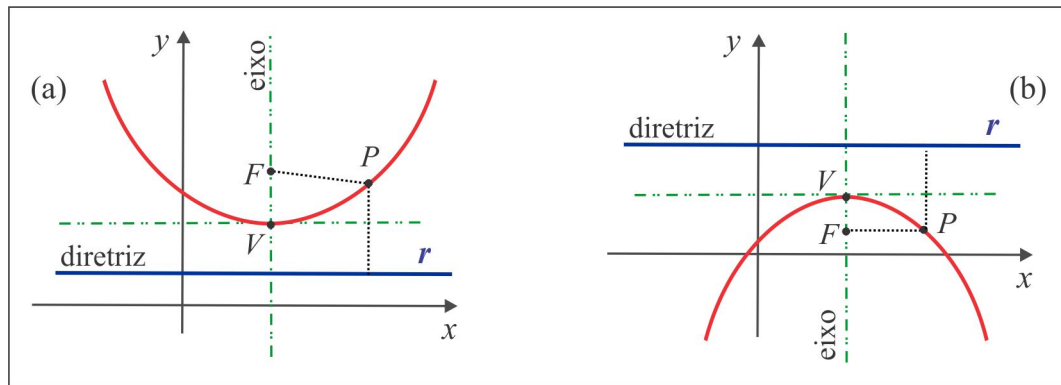


Figura 3.28: Parábola Transladada:  $(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$ .

Com a mesma mudança de variável (3.32) a equação:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0), \quad p > 0$$

torna-se  $\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$  e representa a parábola do Modelo 2 e sua variante, ilustradas na Figura 3.29 e caracterizadas:

- (a) vértice  $V(x_0, y_0)$ , Foco  $F(x_0 + p, y_0)$  e diretriz  $r : x = x_0 - p$ .  
 (b) vértice  $V(x_0, y_0)$ , Foco  $F(x_0 - p, y_0)$  e diretriz  $r : x = x_0 + p$ .

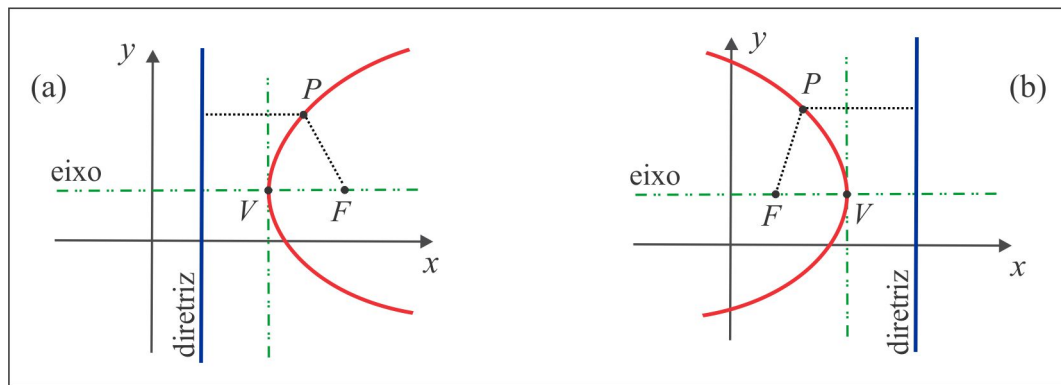


Figura 3.29: Parábola Transladada:  $(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$ .

**EXEMPLO 3.4.5** Encontrar o foco e a diretriz da parábola:  $y = 2x^2 - 4x + 4$ .

**Solução:** Vamos enquadrar a parábola em um dos modelos apresentados. Temos:

$$y - 2 = 2(x - 1)^2 \Leftrightarrow \bar{y} = 2\bar{x}^2 \quad \text{ou} \quad \bar{x}^2 = 4(1/8)\bar{y}$$

Vemos que a parábola é do Modelo 2, com  $p = 1/8$  e assim, no sistema  $\bar{x} \bar{y}$ , a parábola tem foco  $\bar{F}(0, 1/8)$  e diretriz  $\bar{y} = -1/8$ . Notando que  $y = \bar{y} + 2$  e  $x = \bar{x} + 1$ , deduzimos que no sistema original  $xy$ , a parábola tem foco  $F(1, 17/8)$  e diretriz  $y = -17/8$ .

**EXEMPLO 3.4.6 (A diretriz não é horizontal nem vertical)** Determinar a equação da parábola com foco  $F(0, 0)$  e diretriz  $r : x + y = 2$ . Qual o vértice da parábola?

**Solução:** A Figura 3.30 ilustra a situação gráfica, onde  $P(x, y)$  é um ponto genérico da parábola.

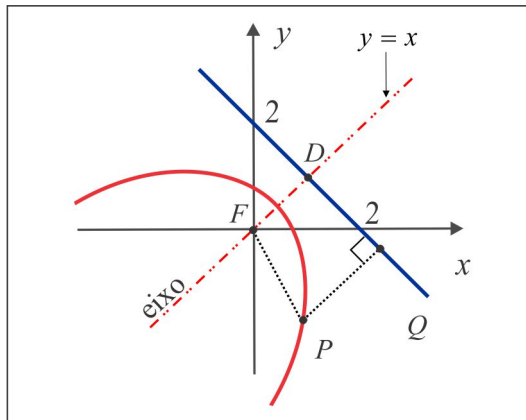


Figura 3.30: Parábola do Exemplo 3.4.6

Usando a fórmula da distância (2.19) e o conceito (3.31), obtemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{(x + y - 2)^2}{2}$$

e, após as simplificações, encontramos:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y = 4.$$

O eixo da parábola é a reta  $y = x$ , que intercepta a diretriz  $x + y = 2$  no ponto  $D(1, 1)$  e como o vértice o ponto médio do segmento  $DF$ , encontramos  $V(1/2, 1/2)$ .

1. Encontre a equação, os elementos principais (*foco, vértice, excentricidade, eixo e diretriz*) e esboce o gráfico da parábola caracterizada por:

(a) Foco  $F(3, 0)$  e diretriz  $r : x + 3 = 0$ .

- (b) Foco  $F(0, -2)$  e diretriz  $r : y = 2$ .
  - (c) Foco  $F(-2, 0)$  e diretriz  $r : x = 4$ .
  - (d) Foco  $F(-4, 1)$  e diretriz  $r : y = 3$ .
  - (e) Vértice  $V(2, 0)$  e foco  $F(0, 0)$ .
  - (f) Vértice  $V(4, -1)$ , eixo focal  $r : y = -1$  e passa no ponto  $P(3, -3)$ .
  - (g) Foco  $F(0, 0)$  e diretriz  $r : x + y = 2$ .
  - (h) Vértice  $V(-2, 3)$  e foco  $F(1, 3)$ .
  - (i) Eixo paralelo ao eixo  $y$  e passa nos pontos  $A(4, 5)$ ,  $B(-2, 11)$  e  $C(-4, 21)$ .
  - (j) Vértice na reta  $2y - 3x = 0$ , eixo paralelo ao eixo  $x$  e passa nos pontos  $A(3, 5)$  e  $B(6, -1)$ .
2. Mostre que a circunferência com centro no ponto  $C(4, -1)$  e que passa no foco da parábola  $x^2 + 16y = 0$  é tangente à diretriz da parábola.
3. Identifique a trajetória de uma partícula em movimento, em que a distância da partícula à reta  $r : x + 3 = 0$  é sempre duas unidades maior que sua distância ao ponto  $(1, 1)$ .

---

### 3.5 Equação Geral do 2º Grau em Duas Variáveis

A equação geral do 2º grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.34)$$

pode representar qualquer uma das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole ou parábola) mas, também, pode representar um reta ou um par de retas. Tudo depende dos valores dos coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Para identificar a natureza da cônica podemos usar a regra prática do *identificador*  $\Delta$ . De fato: suponhamos que uma determinada cônica seja descrita pela equação (3.1) e seja  $\Delta = B^2 - 4AC$ .

- (a) Se  $\Delta = 0$ , então a cônica é uma parábola;
- (b) Se  $\Delta < 0$ , então a cônica é uma elipse;
- (c) Se  $\Delta > 0$ , então a cônica é uma hipérbole.

A única informação que essa regra nos dá é sobre a natureza da cônica. Uma maneira mais eficiente de identificá-la consiste em efetuar mudanças de coordenadas (translação e/ou rotação) e escrever a equação na forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \text{Circunferência:} & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ \text{Elipse:} & \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \\ \text{Parábola:} & x^2 = 4py \quad \text{ou} \quad y^2 = 4px \\ \text{Hipérbole:} & \pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

De forma geral, podemos dizer que a translação "elimina" os termos  $Dx$  e  $Ey$  do 1º grau, enquanto a rotação tem a finalidade de "eliminar" o termo  $Bxy$  da equação. A seguir apresentamos, de modo sucinto, como essas operações atuam na equação da cônica.

Do ponto de vista geométrico, são necessários 5 pontos para se determinar uma cônica e, no caso da parábola, 4 pontos são suficientes, tendo em vista que, nesse caso,  $B^2 - AC = 0$ . Se, por exemplo,  $A \neq 0$  então a equação (3.34) se reduz a

$$x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

onde  $B' = B/A$ ,  $C' = C/A$  ... etc, e essa última equação contém 5 coeficientes a determinar. No caso em que a cônica tem seus eixos paralelos aos eixos coordenados, temos  $B = 0$  e, neste caso, quatro pontos são suficientes.

### 3.5.1 Translação de Eixos

A Figura 3.31 ao lado mostra as coordenadas de um ponto  $P(x, y)$  em dois sistemas de coordenadas: o sistema original  $xOy$  e o sistema  $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$ , obtido após a translação. Considerando o ponto  $\bar{O}(x_0, y_0)$ , é fácil deduzir que as coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do ponto  $P$ , no novo sistema de coordenadas, são determinadas pelas equações:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0. \end{cases}$$

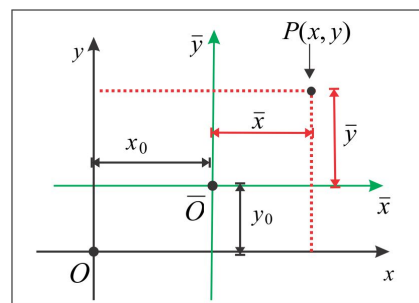


Figura 3.31: Translação de Eixos

**EXEMPLO 3.5.1 (Identificando uma Cônica)** Consideremos a cônica de equação

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 37 = 0.$$

Completando os quadrados, a equação se escreve:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 8x + 16) - 64 + 37 &= 0 \iff \\ 9(x-1)^2 + 4(y+4)^2 &= 36 \iff \\ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação representa a elipse com focos  $F(0, \pm\sqrt{5})$  e centro no ponto  $\bar{O}(1, -4)$ .

**TEOREMA 3.5.2 (Translação da Elipse)** Se  $A$  e  $C$  têm mesmo sinal e  $\lambda = AE^2 + CD^2 - 4ACF > 0$ , a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.35)$$

representa uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$ .

**Demonstração** Não há perda de generalidade em admitir que os coeficientes  $A$  e  $C$  são ambos positivos e, sendo assim, a equação (3.35) é equivalente a:

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F = 0$$

ou ainda:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}. \quad (3.36)$$

A última equação se expressa sob a forma padrão da elipse:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{b^2} = 1$$

considerando  $a^2 = \lambda/4A^2C$  e  $b^2 = \lambda/4AC^2$ . ■

**TEOREMA 3.5.3 (Translação da Hipérbole)** Se  $A$  e  $C$  têm sinais opostos, a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.37)$$

ou representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados  $Ox$  e  $Oy$  ou representa um par de retas concorrentes.

**Demonstração:** Não há perda de generalidade em admitir  $A > 0$  e  $C < 0$ . Completando os quadrados em (3.37) chegamos à equação:

$$\frac{(x + D/2A)^2}{1/A} - \frac{(y + E/2C)^2}{-1/C} = \lambda, \quad (3.38)$$



com  $\lambda = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4C^2} - F$  Supondo  $\lambda > 0$ , a equação (3.38) se escreve sob a forma:

$$\frac{(x + D/2A)^2}{a^2} - \frac{(y + E/2C)^2}{b^2} = 1,$$

com  $a^2 = \lambda/A$  e  $b^2 = -\lambda/C$  e representa uma hipérbole do Modelo 1. Se  $\lambda = 0$ , a equação (3.38) representa um par de retas concorrentes. ■

### 3.5.2 Rotação de Eixos

A Figura 3.32 ao lado mostra as coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  de um ponto  $P(x, y)$  após uma rotação no sentido positivo (*anti-horário*) do sistema de coordenadas  $xy$ . Representemos por  $\theta$  o ângulo de rotação e observando a figura, vamos determinar as relações entre as coordenadas do ponto  $P$  nos dois sistemas. Temos:

$$\begin{cases} x = OA = OB - AB = \bar{x} \cos \theta - y \sin \theta \\ y = AP = AD + DP = \bar{x} \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

e invertendo o sistema, encontramos:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

Com a notação matricial, o sistema se expressa sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde a matriz  $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  é conhecida por *Matriz de Rotação*.

**EXEMPLO 3.5.4** Após uma rotação de  $\theta = \pi/4$ , as coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  do ponto  $P(1, 1)$  são tais que:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e daí resulta  $\bar{x} = \sqrt{2}$  e  $\bar{y} = 0$ .

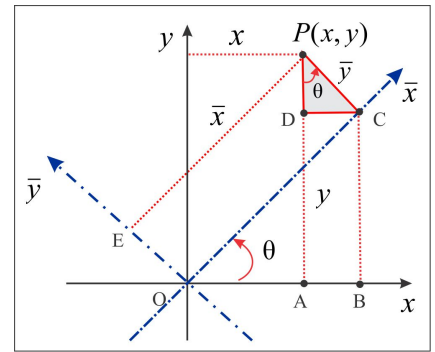


Figura 3.32: Rotação de Eixos

**EXEMPLO 3.5.5 (Uma Hipérbole Equilátera)** Vejamos como atua uma rotação de  $\pi/4$  sobre a equação  $xy = 1$ . A Figura 3.14 ilustra o gráfico e usando a matriz de rotação, com  $\theta = \pi/4$ , encontramos:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \quad e \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$$

e a equação  $xy = 1$  se transforma em:

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

que representa, no sistema  $\bar{x} \bar{y}$ , a hipérbole com focos  $\bar{F}(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ . No sistema  $xy$ , os focos são:

$$F_1(2, 2) \quad e \quad F_2(-2, -2)$$

### 3.5.3 O ângulo de rotação

Analisemos a equação geral do 2º grau (3.34) em duas situações.

■ SITUAÇÃO 1  $B = 0$  e  $A$  ou  $C$  não nulo

Neste caso, a equação (3.34) se reduz a

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.39}$$

e uma simples translação (completamento de quadrados) leva a equação à forma padrão. Note que em (3.39) um dos coeficientes  $A$  ou  $C$  é não nulo, de modo que a equação pode representar qualquer uma das cônicas.

■ SITUAÇÃO 2  $B \neq 0$

Este é o caso onde é necessário efetuar uma rotação no sistema de coordenados, de modo a eliminar o termo  $Bxy$  da equação original. A partir daí, o problema se reduz ao caso anterior.

A rotação de um ângulo  $\theta$  nos leva às relações já estabelecidas:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta, \end{cases}$$

e levando os valores de  $x$  e  $y$  na equação (3.34), obtemos:

$$A'\bar{x}^2 + B'\bar{x}\bar{y} + C'\bar{y}^2 + R(\theta, \bar{x}, \bar{y}) = 0 \tag{3.40}$$

onde em (3.40) o termo  $R(\theta, \bar{x}, \bar{y})$  não envolve  $\bar{x}^2$ ,  $\bar{y}^2$  ou  $\bar{x}\bar{y}$  e  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são dados por:

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta \\ B' &= -2A \sin \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta \\ C' &= A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Para eliminarmos o termo misto  $\bar{x}\bar{y}$  na expressão (3.40) é suficiente considerarmos  $B' = 0$ , isto é:

$$-2A \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 \quad (3.41)$$

e usando as identidades  $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$  e  $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ , segue de (3.41):

$$(-A + C) \operatorname{sen}(2\theta) + B \cos(2\theta) = 0$$

e a partir daí deduzimos que o ângulo  $\theta$  de rotação é tal que:

$$\cotg(2\theta) = \frac{A - C}{B}. \quad (3.42)$$

**EXEMPLO 3.5.6** Quando consideramos no exemplo precedente o ângulo de rotação  $\theta = \pi/4$  para identificar a cônica  $xy = 1$ , tínhamos em mente a expressão (3.42). Na equação  $xy = 1$ , temos  $B = 1$ ,  $F = -1$  e os outros coeficientes  $A$ ,  $C$ ,  $D$  e  $E$  iguais a zero e, portanto,  $\cotg 2\theta = 0$ . Logo,  $2\theta = \pi/2$  e  $\theta = \pi/4$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 3.5

1. Por meio de uma translação escreva a equação da cônica na forma padrão e identifique seus elementos principais.

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| (a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$     | ( a circunferência $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 25$ ) |
| (b) $y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$        | ( a parábola $\bar{y}^2 = 4\bar{x}$ )             |
| (c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$   | ( a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$ )    |
| (d) $2x^2 + 3y^2 - 42x + 12y = 20$ | ( a elipse $2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 34$ )       |
| (e) $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 8$     | ( a elipse $2\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 33$ )       |
| (f) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$   | ( a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$ )    |

2. Identifique as cônicas abaixo, escrevendo suas equações na forma padrão.

- |  |             |
|--|-------------|
| (a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x = 32$          | (hipérbole) |
| (b) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y = 12$ | (elipse)    |
| (c) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 6$              | (elipse)    |
| (d) $xy + x - 2y + 3 = 0$                  | (hipérbole) |

$$(e) \quad xy = k \quad k \neq 0 \quad \text{(hipérbole)}$$

3. Identifique a cônica que passa nos pontos  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(3, -1)$ ,  $D(-3, 2)$  e  $E(-2, -1)$ .
4. Por meio de uma rotação de  $\theta = \arctg(4/3)$ , simplifique a equação  $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$ . Identifique a cônica e esboce seu gráfico.

### 3.6 O Foco e a Diretriz de uma Cônica

No Exercício 2 da Seção 3.6 consideramos a reta  $l : x = 2$  e o ponto  $F(-1, 0)$  e vimos que a equação

$$\left\| \overrightarrow{FP} \right\| = e \cdot \text{dist}(P; l) \quad (3.4)$$

descreve: uma parábola, quando  $e = 1$ ; uma elipse, quando  $e = 1/2$ ; e uma hipérbole, quando  $e = 2$ .

De forma geral, dados uma reta  $l$ , denominada *Diretriz*, um ponto  $F$  fora da reta  $l$ , denominado *Foco*, o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  que satisfazem a equação (3.4) representa:

- (a) uma parábola, se  $e = 1$ ;
- (b) uma elipse, se  $0 < e < 1$ ;
- (c) uma hipérbole, se  $e > 1$ .

O número  $e$  denomina-se *Excentricidade* da cônica e, intuitivamente, ele mede o *achatamento* da curva. Por exemplo, em uma elipse quando  $e$  se aproxima de 0, a curva se aproxima de uma circunferência (uma elipse sem achatamento).

Para identificar a natureza da cônica descrita por (3.4), seja  $D$  o pé da perpendicular baixada do ponto  $P$  à reta  $l$ , de modo que  $\text{dist}(P; l) = \|\overrightarrow{PD}\|$ . Efetuando uma translação seguida de uma rotação, se necessário for, podemos admitir que a reta  $l$  é o eixo  $y$  e que o foco está sobre o eixo  $x$ . Assim, o foco é  $F(c, 0)$  e a equação (3.4) nos dá  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e|x|$ , isto é,

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = 0. \quad (3.5)$$

De acordo com o valor de  $e$ , a equação (3.5) pode representar uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Por exemplo, a cônica com um foco  $F(0, 0)$ , diretriz  $l : x = -5/2$  e excentricidade  $e = 2/3$  é a elipse de equação:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{3} |x + 5/2|,$$

isto é,  $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$ .

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.6

---

- Determine os valores de  $m$  e  $q$  de modo que a equação  $x^2 + qy^2 + 2mx = 1$  represente:
  - uma circunferência
  - uma elipse
  - uma parábola
  - uma hipérbole
  - uma reta
  - duas retas
  - o conjunto vazio
  - um ponto
- Seja  $l$  a reta de equação  $x = 2$  e considere o ponto  $F(-1, 0)$ . Identifique o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y)$  tais que  $\|\overrightarrow{FP}\| = e \cdot \text{dist}(P; l)$ , sendo:
  - $e = 1$
  - $e = 1/2$
  - $e = 2$ .

---

RESPOSTAS & SUGESTÕES

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.1

- $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .
  - $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ .
  - $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ .
  - $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ .
  - $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$  ou  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ .
  - $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ .
- $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$  e  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ .
- $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ .
- $5\sqrt{2}$ .
- Consequência direta do Teorema de Pitágoras.
  - Decorre de (a).
- Os vértices do triângulo são  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$  e  $C(2, 0)$ .

- (a) As bissetrizes são as retas:  $x = 1$ ,  $x - (1 + \sqrt{2})y = 0$  e  $x + (1 + \sqrt{2})y = 2$ .
- (b) O incentro do triângulo é o ponto  $I(1, \sqrt{2} - 1)$ .
- (c) A circunferência inscrita tem equação:  $x^2 + y^2 - 2x - 2(1 - \sqrt{2})y + 1 = 0$ .
7. Os vértices do triângulo são  $A(23, 9)$ ,  $B(11, -7)$  e  $C(-1, 2)$  e o incentro do triângulo é o ponto  $I(10, 0)$ . A circunferência inscrita é governada pela equação:

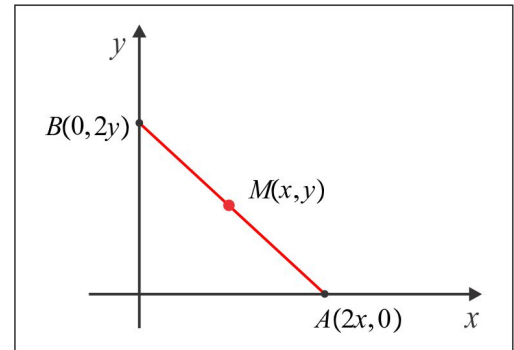
$$x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0.$$

8. Na figura abaixo ilustramos a situação gráfica, onde  $M(x, y)$  representa o ponto médio da haste.

As extremidades são os pontos  $A(2x, 0)$  e  $B(0, 2y)$  e do Teorema de Pitágoras, resulta:

$$30^2 = (2x)^2 + (2y)^2 \implies x^2 + y^2 = 225$$

e, sendo assim, o ponto médio  $M$  descreve um arco da circunferência de centro na origem e raio  $R = 15$ .



9. Centro  $C(2, -1)$  e raio  $R = 3$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 3.2

1. (a)  $x^2/36 + y^2/27 = 1$ ;  $A(\pm 6, 0)$ ,  $B(0 \pm \sqrt{27})$ ,  $C(0, 0)$ ;  $e = 1/2$ .
- (b) Considerando os focos sobre a reta  $x = 3$ , temos:
- $$\frac{(x - 3)^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad A(3 \pm \sqrt{12}, 0), \quad F(3, \pm 2), \quad C(3, 0) \quad e \quad e = 1/2.$$
- (c)  $x^2/25 + y^2/16 = 1$ ;  $F(\pm 3, 0)$ ,  $C(0, 0)$ ;  $e = 3/5$ .
- (d)  $x^2/20 + (y - y_0)^2/36 = 1$ .
- (e)  $(x - 2)^2/25 + (y + 1)^2/16 = 1$ ;  $A_1(7, -1)$ ,  $A_2(-3, -1)$ ,  $B_1(2, 3)$ ,  $B_2(2, -5)$ ,  $F_1(5, -1)$ ,  $F_2(-1, -1)$ ,  $C(2, -1)$ ;  $e = 3/5$ .
- (f)  $4x^2 + 4y^2 - xy = 126$ .
2.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$ ;  $e = \frac{\sqrt{40}}{7}$ .

3.  $y = x \pm \sqrt{a^2 + b^2}$
4.  $24\sqrt{3}$ .
5.  $84/5$  m.
6. A elipse  $\frac{(x-4)^2}{20} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$ .
7.  $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ .
8. Centro  $C(2, -3)$  e Focos  $F(2 \pm \sqrt{7}, -3)$ .
9. Os pontos  $A(5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8})$ ,  $B(-5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8})$ ,  $C(-5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8})$  e  $A(5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8})$ .
10. Focos  $F_1(0, \sqrt{7})$  e  $F_1(0, -\sqrt{7})$ ; Centro  $C(0, 0)$ .
11. Se  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos determinados no vértice  $P$  pela normal, mostre que  $\tan \alpha = \tan \beta = cy_0/b^2$ .
12.  $x + y = 2$  e  $9x - 191y - 218 = 0$ .
13. O primeiro passo é encontrar a equação da reta tangente à elipse, no ponto  $P_0(x_0, y_0)$  :

$$r_T : (b^2x_0)x + (a^2y_0)y = a^2y_0^2 + b^2x_0^2$$

e em seguida usar a fórmula (2.19) da distância de ponto à reta no plano  $xy$ , lembrando que os focos são  $F(0, \pm c)$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. (a)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ;  $V(\pm 3, 0)$ ;  $C(0, 0)$ ;  $e = 5/3$ ;  $y = \pm 4x/3$ .  
 (b)  $\frac{4(y+1)^2}{25} - \frac{4(x-2)^2}{119} = 1$ ;  $V_1(2, \frac{3}{2})$ ;  $V_2(2, -\frac{7}{2})$ ;  $C(2, -1)$ ;  $e = \frac{12}{5}$ ;  $y = -1 \pm 5(x-2)/\sqrt{119}$ .  
 (c)  $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{20} = 1$ ;  $F_1(2, -3)$ ;  $F_2(2, 9)$ ;  $C(2, 3)$ ;  $y = 3 \pm (x-2)/5$ .  
 (d)  $y^2 - 4x^2 = 4$ ;  $F(0, \pm\sqrt{5})$ ;  $C(0, 0)$ ;  $e = \sqrt{5}/2$   
 (e)  $xy = -2$ .
2.  $A = 12$ .
3. A hipérbole  $4x^2 - y^2 = 36$ .

$$4. \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

$$5. e = \sqrt{13}/3, C(1, -2), F(1, -2 \pm \sqrt{13}) \text{ e assíntotas: } 3x + 2y = -1 \text{ e } 3x - 2y = 7.$$

6. A excentricidade é  $e = c/a$  e considerando o foco  $F_1(c, 0)$ , temos:

$$|F_1P_0|^2 = (x_0 - c)^2 + y_0^2 = (x_0 - c)^2 + \frac{b^2x_0^2}{a^2} - b^2.$$

Notando que  $c = ae$  e  $b^2 = c^2 - a^2$ , encontramos:

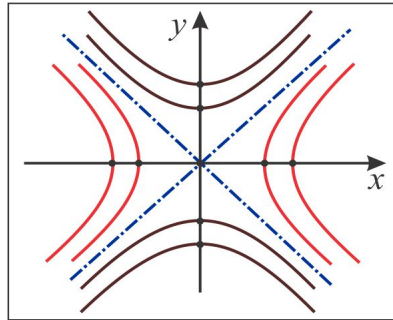
$$|F_1P_0| = |ex_0 - a|$$

No caso da hipérbole  $5x^2 - 4y^2 = 80$ , os raios focais do ponto  $P_0(6, 5)$  medem 13 e 5.

$$7. \frac{9x^2}{25} - \frac{9y^2}{200} = 1; y = \pm 2\sqrt{2}x.$$

8. Use a relação  $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sec \alpha$ , lembrando que  $\tan \alpha = b/a$ .

9. No caso  $k = 0$ , temos o par de retas  $y = \pm x$ . Se  $k > 0$ , a hipérbole tem focos sobre o eixo  $Ox$  e se  $k < 0$  os focos estão no eixo  $Oy$ .



10. Note que a hipérbole é descrita por  $\bar{y} = \frac{7}{\bar{x}}$ , sendo  $\bar{x} = x - 3$  e  $\bar{y} = y - 2$ .

#### ESCREVENDO PARA APRENDER 3.4

1. (a)  $y^2 = 12x, \quad V(0, 0).$
- (b)  $x^2 = -8y, \quad V(0, 0).$
- (c)  $y^2 = -12(x - 1), \quad V(1, 0).$
- (d)  $(x + 4)^2 = -4(y - 2), \quad V(-4, 2).$



(e)  $y^2 = -8(x - 2)$ , diretriz  $x = 4$ .

(f)  $(y + 1)^2 = -4(x - 4)$ , Foco  $F(3, -1)$ , diretriz  $x = 5$ .

(g)  $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$ .

(h)  $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$ .

(i)  $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$ .

(j)  $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$ .

2. O foco da parábola é  $F(0, -4)$  e a diretriz é a reta  $l : y = 4$ . A equação da circunferência é  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$  e para concluir que esta circunferência é tangente à diretriz  $l$ , basta observar que  $\text{dist}(C; l) = 5$ .

3. A parábola com foco  $F(1, 1)$  e diretriz  $x = -1$  é governada pela equação:  $(y - 1)^2 = 4x$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 3.5

1. Admita a cônica sob a forma:

$$x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e por substituição dos pontos na equação obtenha a hipérbole  $9x^2 + 8xy - 13y^2 - x + 19y = 22$ .

4. A parábola  $\bar{x}^2 = 4\bar{y}$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 3.6

1. (a) Se  $q = 1$ , a equação representa a circunferência  $(x + m)^2 + y^2 = 1 + m^2$ .

(b) Se  $q > 0$  a equação representa a *família* de elipses  $(x + m)^2 + qy^2 = (1 + m^2)$ .

(c) A equação não pode representar uma parábola.

(d) Se  $q < 0$  a equação representa a *família* de hipérbolos  $(x + m)^2 - |q|y^2 = (1 + m^2)$ .

(e) Reta alguma pode ser descrita pela equação.

(f) Se  $q = 0$  a equação representa o par de retas  $x = -m \pm \sqrt{1 + m^2}$ .

2. (a) parábola  $y^2 = -6x + 3$  (b) elipse  $3(x + 2)^2 + 4y^2 = 12$  (c) hipérbole  $3(x - 3)^2 - y^2 = 42$ .





## Introdução

No Capítulo 3 vimos que as cônicas no plano  $xy$  são governadas por uma equação do 2º grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F \quad (4.1)$$

a qual pode ser posta na forma cartesiana implícita:

$$f(x, y) = 0. \quad (4.2)$$

Neste capítulo estenderemos ao espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  alguns conceitos básicos considerados em conexão com a equação (4.2) e abordaremos alguns lugares geométricos, conhecidos por *Superfícies*, descritos por uma equação cartesiana implícita em três variáveis:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (4.3)$$

em especial os lugares geométricos governados por uma equação geral do 2º grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J. \quad (4.4)$$

A equação (4.3) de algumas superfícies podem conter apenas uma ou duas variáveis, como é o caso da equação  $x = 1$ , que representa um plano paralelo ao plano  $yz$ . Neste caso, temos  $F(x, y, z) = x - 1$ . Já a equação  $x^2 + y^2 = 1$ , quando considerada no espaço  $\mathbb{R}^3$ , representa um *Cilindro Circular Reto*, como veremos adiante. Aliás, é oportuno ressaltar que no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$  as equações que descrevem as cônicas do plano  $xy$  são acompanhadas da informação adicional  $z = 0$ . O mesmo ocorre com as cônicas do plano  $xz$  ( $y = 0$ ) e do plano  $yz$  ( $x = 0$ ). Assim, a equação da circunferência do plano  $xy$  de centro na origem e raio  $R$  é descrita, no espaço  $\mathbb{R}^3$ , por:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0. \quad (4.5)$$

Nem toda equação do tipo (4.4) representa uma superfície; por exemplo a equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

não é satisfeita para valores reais de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de modo que ela não representa superfície alguma do espaço  $\mathbb{R}^3$ . Já a equação:

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 0$$

tem  $x = y = z = 0$  como uma única solução real e tem como lugar geométrico um ponto isolado, a origem. Dois problemas típicos que serão abordados neste capítulo:

► **PROBLEMA 1:** Uma reta desliza sobre a circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$  do plano  $xy$ , paralelamente ao eixo  $Oz$ , produzindo o cilindro de equação:  $x^2 + y^2 = R^2$ , ilustrado na Figura 4.1.

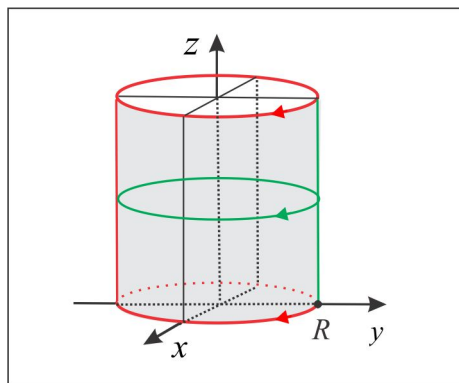


Figura 4.1: Cilindro:  $x^2 + y^2 = R^2$ .

► **PROBLEMA 2:** A superfície obtida por rotação, em torno do eixo  $Oz$ , do arco de circunferência  $\gamma : y^2 + z^2 = R^2$ ,  $y \geq 0$ ,  $x = 0$ , é a Esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , ilustrada na Figura 4.2.

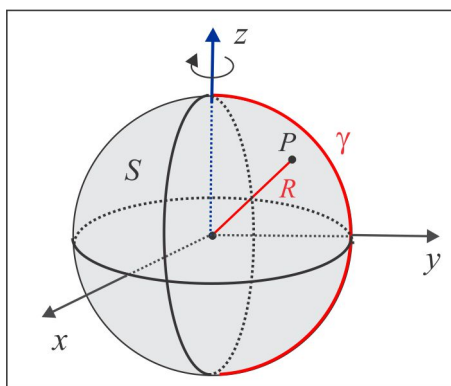


Figura 4.2: Esfera:  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

## 4.1 Superfície Cilíndrica

Uma *Superfície Cilíndrica* (ou simplesmente *Cilindro*) é a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana, denominada *diretriz*, paralelamente a uma reta fixa, denominada *geratriz*. Se a geratriz é ortogonal ao plano que contém a diretriz o cilindro denomina-se *Cilindro Reto*; além disso, se a diretriz é uma circunferência o cilindro diz-se *Circular Reto*.

Se  $\vec{v}$  é um vetor paralelo à reta geratriz, então para que um ponto  $P(x, y, z)$  esteja sobre o cilindro  $S$  é necessário e suficiente que a reta que passa por  $P$ , paralela ao vetor  $\vec{v}$ , intercepte a curva diretriz  $\gamma$ . Em símbolos, temos:

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

A Figura 4.3 ilustra uma superfície cilíndrica  $S$  com diretriz  $\gamma$  e geratriz  $g$ .

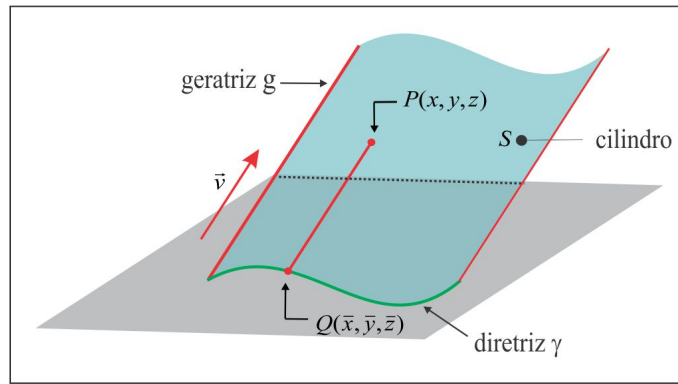


Figura 4.3: Superfície Cilíndrica.

**EXEMPLO 4.1.1** Suponha que a geratriz do cilindro  $S$  seja a reta  $g : x = t, y = t, z = t$ , com vetor diretor  $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , e que a diretriz seja a parábola  $\gamma$  do plano  $xy$  dada por  $y = x^2, z = 0$ , como ilustra a Figura 4.4. Temos:

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{y}, 0) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0},$$

de modo que  $\overrightarrow{PQ} = (\bar{x} - x)\vec{i} + (\bar{y} - y)\vec{j} - z\vec{k}$  e a relação  $\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}$  nos dá:

$$\bar{x} = x - z; \quad \bar{y} = y - z \quad \text{e} \quad \bar{x} - x - \bar{y} + y = 0. \quad (4.6)$$

Como o ponto  $Q(\bar{x}, \bar{y}, 0)$  está sobre a curva  $\gamma$ , segue que  $\bar{y} = \bar{x}^2$  e de (4.6) resulta  $(x - z)^2 = y - z$  e, assim, temos a equação do cilindro:

$$S : x^2 + z^2 - 2xz + z - y = 0.$$

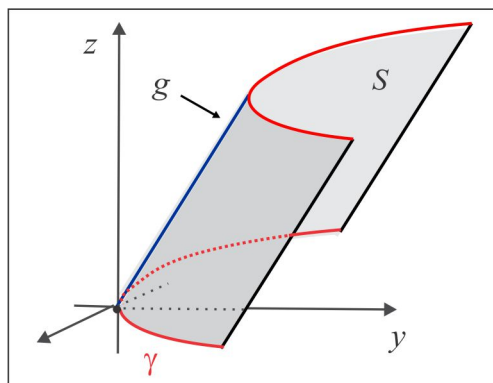


Figura 4.4: Cilindro do Exemplo 4.1.1.

**EXEMPLO 4.1.2 (Cilindro Reto)** A diretriz  $\gamma : f(x, y) = 0, z = 0$ , é uma curva do plano  $xy$  e a geratriz  $g$  é o eixo  $Oz$ . Neste caso, o cilindro  $S$  é gerado por uma reta paralela ao eixo  $Oz$ , que desliza ao longo da curva  $\gamma$ . Temos

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(x, y, 0) \in \gamma \Leftrightarrow f(x, y) = 0.$$

Logo, a equação do cilindro  $S$  é  $f(x, y) = 0$ . Observamos que a descrição do cilindro  $S$  e da diretriz  $g$  parecem ser a mesma, mas, há uma diferença substancial. Enquanto no cilindro a variável  $z$  é livre e, portanto, assume qualquer valor real, na curva  $g$  a variável  $z$  assume apenas o valor  $z = 0$ , já que  $\gamma$  é uma curva do plano  $xy$ , como ilustra a Figura 4.5.

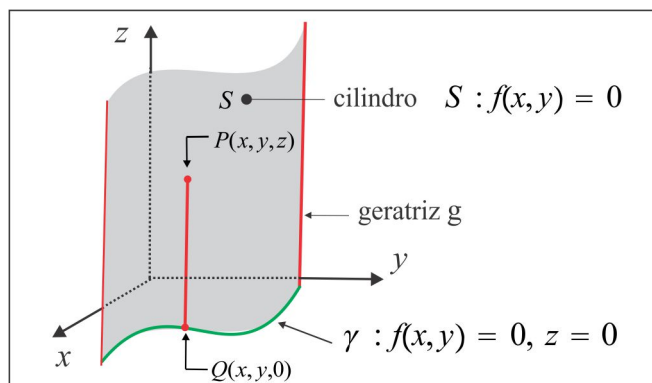


Figura 4.5: Cilindro Reto.

Uma equação onde figuram apenas duas das três variáveis cartesianas define um cilindro reto, com geratriz paralela ao eixo correspondente à variável que não figura na equação. Assim, temos:

- (a) a equação  $F(x, y) = 0$  ou  $y = f(x)$ , na forma explícita, representa um cilindro com reta geratriz paralela ao eixo  $Oz$  e diretriz  $\gamma : F(x, y) = 0, z = 0$ ;
- (b) a equação  $G(x, z) = 0$  ou  $x = g(z)$ , na forma explícita, representa um cilindro com reta geratriz paralela ao eixo  $Oy$  e diretriz  $\gamma : G(x, z) = 0, y = 0$ ;
- (c) a equação  $H(y, z) = 0$  ou  $z = h(y)$ , na forma explícita, representa um cilindro com reta geratriz paralela ao eixo  $Ox$  e diretriz  $\gamma : H(y, z) = 0, x = 0$ .

**EXEMPLO 4.1.3** A Figura 4.6 ilustra parte dos cilindros retos: (a)  $S_1 : x = y^2$  (b)  $S_2 : y = \text{sen } z$ . Observe a disposição dos eixos coordenados.

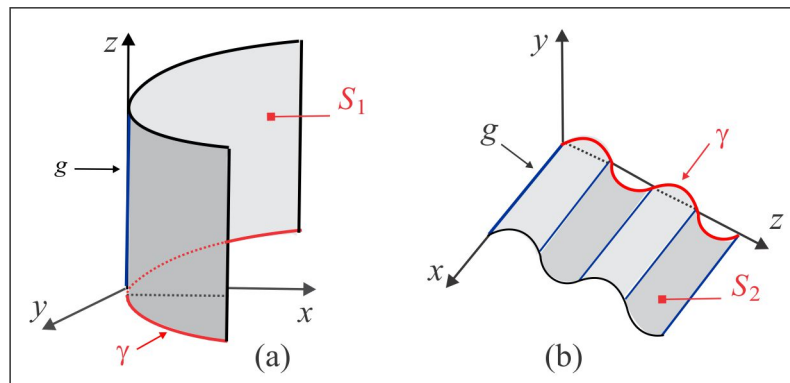


Figura 4.6: Cilindros Retos: (a)  $x = y^2$  e (b)  $y = \text{sen } z$ .

1. Esboce o gráfico das seguintes superfícies cilíndricas:

(a)  $z = y^2$  (b)  $y = |z|$  (c)  $z^2 = x^3$  (d)  $(z - 2)^2 + x^2 = 1$  (e)  $x^2 - y + 1 = 0$ .

2. Considere no plano  $xy$  a curva  $\gamma : y - x^3 - 2 = 0$ . Sob que condições o ponto  $P(x, y, z)$  está no cilindro de diretriz  $\gamma$  e geratriz paralela ao eixo  $z$ ?

3. Em cada caso, determine a equação da superfície cilíndrica.

(a) Diretriz  $x^2 = 4y$ ;  $z = 0$  e geratriz  $x = y = z/3$ .

(b) Diretriz  $x^2 + y = 1$ ;  $z = 0$  e geratriz  $x = 2z$ ;  $y = 1$ .

- (c) Diretriz  $x^2 - z^2 = 1$ ;  $y = 0$  e geratriz paralela ao vetor  $\vec{v} = -\vec{j} + 2\vec{k}$ .
4. Os cilindros  $S_1 : z^3 = x$  e  $S_2 : x^2 = y$  cortam-se segundo uma curva  $\gamma$ . Encontre a equação do cilindro  $S_3$  com diretriz  $\gamma$  e geratriz paralela ao eixo  $x$ .

## 4.2 Superfície Cônica

Uma *Superfície Cônica* (ou simplesmente *Cone*) é a superfície gerada por uma reta (*geratriz*) que se move de modo que sempre passa por uma curva plana fixa  $\gamma$  (*diretriz*) e por um ponto fixo  $V$  (*vértice*) não situado no plano da curva. Quando a geratriz for perpendicular ao plano que contém a curva diretriz o cone será denominado *Cone Reto*. Na Figura 4.7 ilustramos uma superfície cônica  $S$  com diretriz  $\gamma$  e vértice  $V$ , onde vemos um ponto  $P(x, y, z)$  sobre a superfície  $S$  e a reta que passa por  $P$  e  $V$  interceptando a diretriz  $\gamma$  no ponto  $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

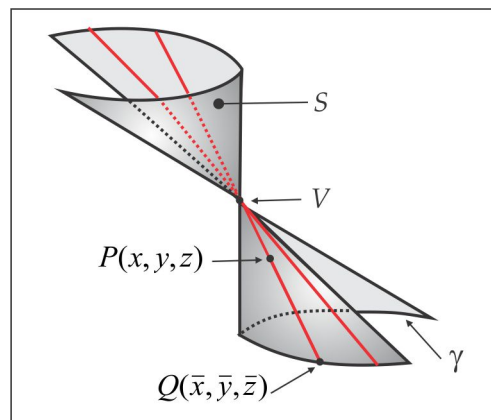


Figura 4.7: Superfície Cônica.

Assim, a equação do cone  $S$  é deduzida observando que:

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PV} \times \overrightarrow{QV} = \vec{0}.$$

**EXEMPLO 4.2.1** Se a diretriz de um cone  $S$  de vértice  $V(0, 0, 1)$  é a parábola no plano  $xy$  dada por



$\gamma : y = x^2, z = 0$ , usando a relação  $\overrightarrow{PV} \times \overrightarrow{QV} = \vec{0}$  e notando que  $\bar{y} = \bar{x}^2$  e  $\bar{z} = 0$ , chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} y + \bar{x}^2(z - 1) = 0 \\ x + \bar{x}(z - 1) = 0 \\ x\bar{x}^2 - \bar{x}y = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

e resolvendo (4.7), encontramos  $x^2 + yz - y = 0$ , que é a equação do cone  $S$ .

### 4.2.1 Cone de Revolução

Uma superfície cônica particular é aquela gerada pela rotação de uma reta  $g$  (*geratriz*) em torno de uma reta  $L$  (*eixo*), onde as retas  $g$  e  $L$  se interceptam em um ponto  $V$  que é o vértice do cone. A Figura 4.8 ilustra um cone de revolução  $S$ , onde observamos que a interseção do cone com um plano perpendicular ao eixo é uma circunferência. Representando por  $\vec{v}_L$  e  $\vec{v}_g$  os vetores diretores do eixo  $L$  e da geratriz  $g$ , respectivamente, então uma condição necessária e suficiente para que um ponto  $P(x, y, z)$  esteja sobre o cone  $S$  é que:

$$|\cos(\vec{v}_L, \vec{v}_g)| = |\cos(\vec{v}_L, \overrightarrow{VP})| \quad (4.8)$$

e a equação (4.8) descreve o cone  $S$ .

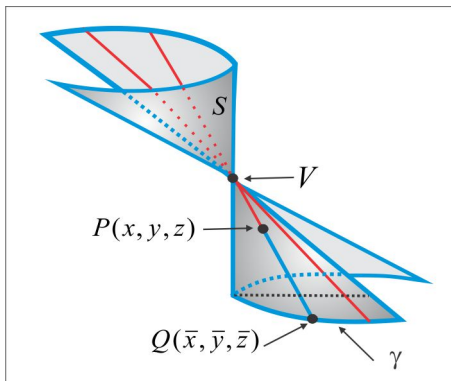


Figura 4.8: Cone de Revolução.

1. Determine a equação do cone obtido por rotação da reta  $y = ax + b, z = 0$ , em torno do eixo  $Oy$ .
2. Determine a equação do cone de revolução gerado pela rotação da reta  $x = t, y = 2t, z = 3t$  em torno da reta  $-x = y = z/2$ .

3. Determine a equação do cone de revolução com eixo  $x$ , vértice na origem e geratriz formando com o eixo um ângulo de  $\pi/3$  rad.

### 4.3 Superfície de Revolução

A Figura 4.9 ao lado ilustra uma superfície de revolução  $S$  obtida pela rotação de uma curva  $\gamma$  (*geratriz*), em torno de um eixo  $L$  (*eixo de revolução*). Para chegar à equação da superfície  $S$ , deixe-nos considerar por um ponto  $P(x, y, z)$  de  $S$  um plano perpendicular ao eixo de rotação, cuja interseção com a superfície  $S$  é uma circunferência. Sejam  $C$  e  $Q$  as interseções desse plano com o eixo  $L$  e com a geratriz  $\gamma$ , respectivamente, de modo que a equação que descreve a superfície  $S$  é:

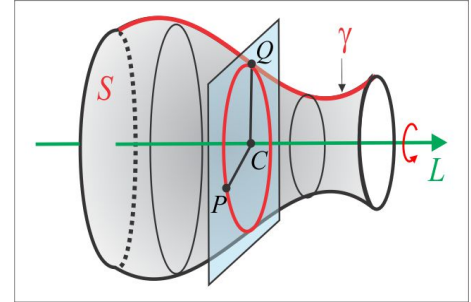


Figura 4.9: Superfície de Revolução

$$\|\vec{CP}\| = \|\vec{CQ}\|. \quad (4.9)$$

Do ponto de vista gráfico, o que caracteriza uma superfície ser de revolução são as seções circulares determinadas nela por planos perpendiculares ao eixo de rotação.

A equação cartesiana de  $S$  será determinada em um caso particular e deixaremos as variantes desse caso para o leitor. Suponhamos, então, que a geratriz seja uma curva  $\gamma$  do plano  $yz$  descrita por uma equação do tipo  $F(y, z) = 0$  ou, como é mais comum, na forma explícita  $y = f(z)$ , e que o eixo de rotação seja o eixo  $Oz$ . Então, as interseções  $C$  e  $Q$  são:  $C(0, 0, z)$  e  $Q(0, \bar{y}, z)$  e da equação vetorial (4.9) resulta  $\sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{y}|$ , isto é  $\bar{y} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ . Como o ponto  $Q(0, \bar{y}, z)$  está sobre a geratriz, temos  $F(\bar{y}, z) = 0$  e, conseqüentemente, a equação da superfície  $S$  é:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (4.10)$$

#### 4.3.1 Geratriz na Forma Explícita

Como consequência da equação geral (4.10), vamos identificar a superfície de revolução  $S$  em situações particulares.

► **SITUAÇÃO 1:** A curva geratriz  $\gamma$  é o gráfico de uma função contínua  $y = f(z)$  e o eixo de rotação é o eixo  $Oz$ , como ilustra a Figura 4.10. Pelo ponto  $P(x, y, z)$  da superfície consideramos o plano  $\alpha$  ortogonal ao eixo de rotação  $Oz$ , o qual intercepta a superfície e o eixo de rotação nos pontos  $Q$  e  $C$ , respectivamente. Os pontos  $P$ ,  $Q$  e  $C$  estão sobre o plano  $\alpha$  e, portanto, têm a mesma coordenada  $z$ . Temos, então,  $C(0, 0, z)$  e  $Q(0, \bar{y}, z)$ , com  $\bar{y} = f(z)$ , e da equação vetorial (4.9), resulta:

$$S : x^2 + y^2 = [f(z)]^2 \quad (4.11)$$

que é a equação que descreve, neste caso, a superfície de revolução  $S$ .

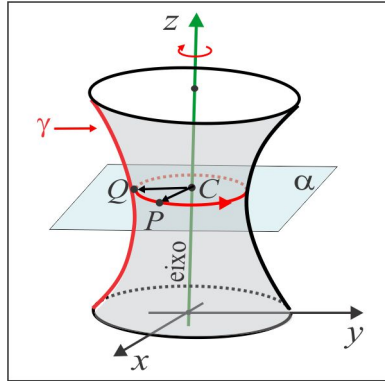


Figura 4.10: Superfície  $S : x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ .

► **SITUAÇÃO 2:** Se a geratriz  $\gamma$  é o gráfico de uma função contínua  $z = f(y)$  e a rotação é processada em torno do eixo  $Oy$ , então a superfície  $S$  é descrita pela equação:

$$S : x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \quad (4.12)$$

► **SITUAÇÃO 3:** No caso em que a geratriz  $\gamma$  do plano  $xy$  é identificada com o gráfico de uma bijeção contínua  $y = f(x)$ , e o eixo de rotação é o eixo  $Oy$ , primeiro invertemos a função  $f$  e escrevemos a geratriz sob a forma  $\gamma : x = f^{-1}(y)$  e, assim, a equação da superfície de revolução  $S$  é:

$$S : x^2 + z^2 = [f^{-1}(y)]^2 \quad (4.13)$$

**EXEMPLO 4.3.1** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  as superfícies geradas pela rotação da curva  $z = \sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$ ,  $x = 0$ , em torno do eixo  $Oz$  e em torno do eixo  $Oy$ , respectivamente, ilustradas graficamente na Figura 4.11.*

(a) *A geratriz da superfície  $S_1$  é a curva  $\gamma_1 : y = f_1(z) = z^2$ ,  $x = 0$ , e, de acordo com (4.11), a superfície  $S_1$  é governada pela equação:  $S_1 : x^2 + y^2 = z^4$ .*

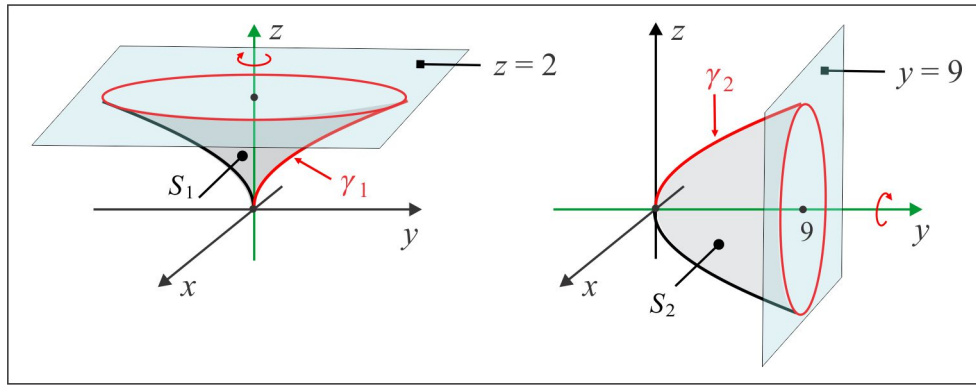


Figura 4.11: Superfícies  $S_1$  e  $S_2$  do Exemplo 4.3.1

A interseção da superfície  $S_1$  com o plano (horizontal)  $z = 2$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 16$ , situada no plano  $z = 2$ , de centro  $C(0, 0, 2)$  e raio  $R = 4$ .

(b) A geratriz da superfície  $S_2$  é a curva  $\gamma_2 : z = f_2(y) = \sqrt{y}$ ,  $x = 0$ , e, de acordo com (4.12), a superfície  $S_2$  é governada pela equação:  $S_2 : x^2 + z^2 = y$ .

A interseção da superfície  $S_2$  com o plano (vertical)  $y = 9$  é a circunferência  $x^2 + z^2 = 9$ , situada no plano  $y = 9$ , de centro  $C(0, 9, 0)$  e raio  $R = 3$ .

**EXEMPLO 4.3.2** A Figura 4.12 ilustra a superfície de revolução  $S$  gerada pela rotação da curva  $\gamma : z = f(y) = y^3$ , em torno do eixo  $Oz$ .

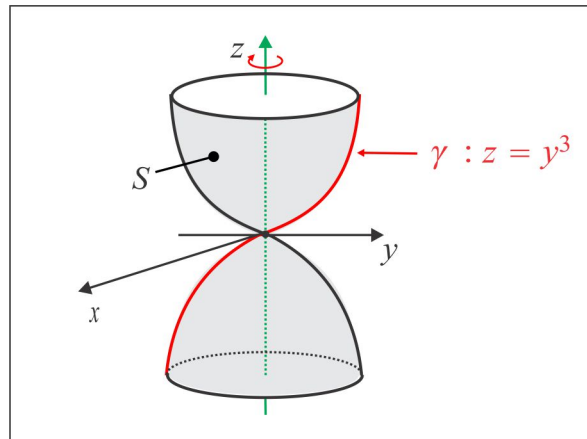


Figura 4.12: Superfície  $S$  do Exemplo 4.3.2

A teoria nos ensina que, neste caso, devemos inverter a função  $f$  e escrever a geratriz  $\gamma$  sob a forma  $\gamma : y = z^{1/3}$ . De acordo com (4.13) a equação da superfície  $S$  é:  $S : x^2 + y^2 = z^{2/3}$ .

**OBSERVAÇÃO 4.3.3** A equação  $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$  representa uma superfície de revolução em torno do eixo  $Ox$ . O problema de encontrar uma geratriz consiste em "zerar" uma das variáveis do termo quadrático  $y^2 + z^2$ . Por exemplo, com  $z = 0$ , encontramos a geratriz  $y = \pm f(x)$ .

### 4.3.2 Quádricas de Revolução

Denomina-se *Quádrlica* à superfície que pode ser descrita por uma equação do 2º grau nas variáveis  $x, y$  e  $z$ , do tipo (4.4). Antes de apresentarmos as quádrlicas num contexto um pouco mais geral, vejamos por meio de exemplos algumas quádrlicas de revolução.

**EXEMPLO 4.3.4 (A Esfera)** O arco de circunferência  $y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0, x = 0$ , gira em torno do eixo  $Oz$  produzindo a superfície  $S$  conhecida por *Esfera*. A geratriz é dada por  $\gamma : y = f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$  e usando (4.11) encontramos a equação da esfera  $S$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

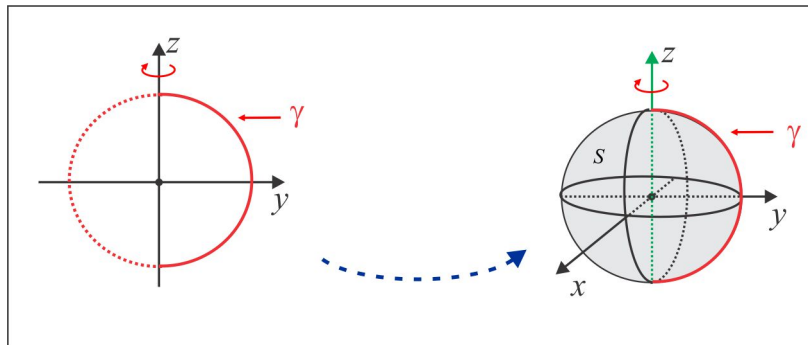


Figura 4.13: A Esfera.

**EXEMPLO 4.3.5 (O Elipsoide de Revolução)** A superfície  $S$  obtida pela rotação da elipse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x = 0,$$

em torno do eixo  $Oy$  recebe o nome *Elipsoide de Revolução* e está ilustrado na Figura 4.14.

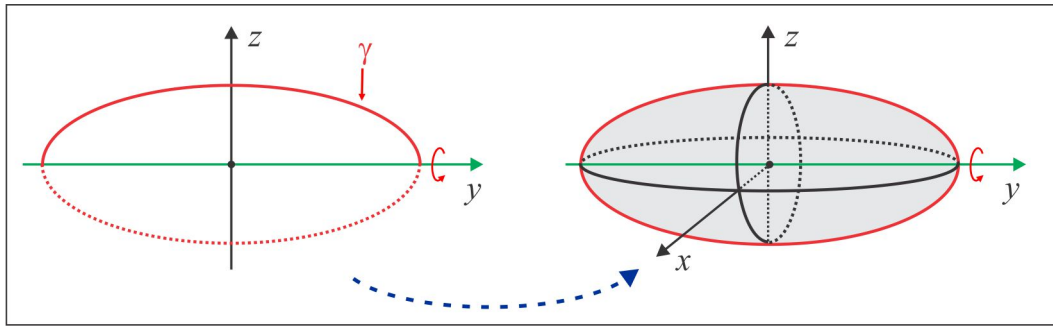


Figura 4.14: O Elipsoide de Revolução.

A geratriz é a elipse  $F(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ , de modo que a equação do Elipsóide de Revolução é  $F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ , isto é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (4.14)$$

Olhando a geratriz sob a forma  $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} = f(y)$  usamos o modelo padrão  $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$  e chegamos à equação (4.14).

**EXEMPLO 4.3.6 (Os Hiperboloides de Revolução)** A hipérbole  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$ ,  $x = 0$ , do plano  $yz$ , gira em torno do eixo  $Oz$ . A superfície resultante é conhecida por Hiperbolóide de Revolução de uma Folha, ilustrado na Figura 4.15. A geratriz  $g$  é descrita por  $F(x, y) = \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$  ou, sob forma explícita  $y = (a/b)\sqrt{b^2 + z^2} = f(z)$ . A equação da superfície é  $F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ , ou  $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ . Uma substituição direta nos dá:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

No caso em que a rotação é realizada em torno do eixo  $Oy$ , a superfície resultante recebe o nome de Hiperbolóide de Revolução de duas Folhas, ilustrada na Figura 4.16. Neste caso, olhamos a geratriz  $g$  sob a forma  $z = (b/a)\sqrt{y^2 - a^2} = f(y)$  e usamos a forma padrão  $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$  e chegamos à equação da superfície:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

**OBSERVAÇÃO 4.3.7 (Sobre os Hiperboloides)** Assim como no Elipsóide, nos Hiperboloides duas das três variáveis têm o mesmo denominador, o que indica se tratar de uma superfície de revolução. No

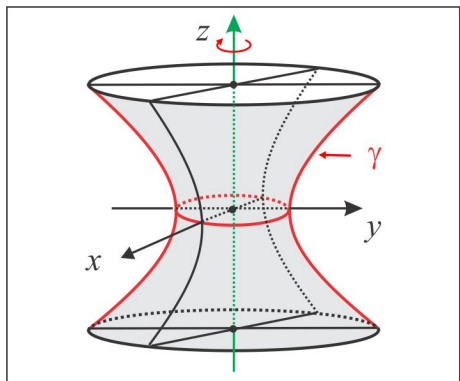


Figura 4.15: Hiperboloide de uma Folha.

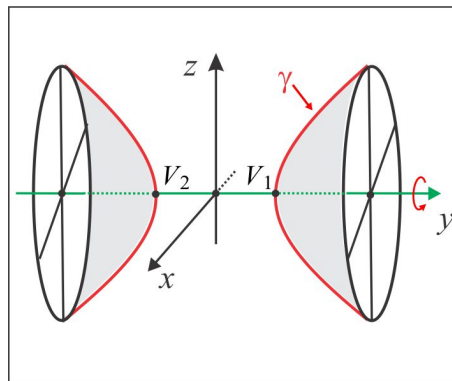


Figura 4.16: Hiperboloide de duas Folhas

*Hiperboloide de uma folha o termo com sinal negativo corresponde ao eixo de rotação; no Hiperboloide de duas folhas, o eixo de rotação corresponde à variável com o sinal positivo. Outra diferença entre os dois hiperboloides diz respeito às interseções com os eixos coordenados. Enquanto o hiperboloide de uma folha não toca o eixo de rotação (no Exemplo 4.3.6 o eixo  $Oz$ ), o hiperboloide de duas folhas toca o eixo de rotação  $Oy$  nos pontos  $V_1(0, a, 0)$  e  $V_2(0, -a, 0)$ .*

**EXEMPLO 4.3.8 (O Paraboloides de Revolução)** A superfície  $S$  obtida pela rotação da parábola  $y^2 = 4pz$ ,  $x = 0$ , em torno do eixo  $Oz$  é conhecida por Paraboloides de Revolução, ilustrado na Figura 4.17. Neste caso, a geratriz é dada por:  $F(y, z) = y^2 - 4pz = 0$ , e a equação da superfície  $S$  é, portanto,

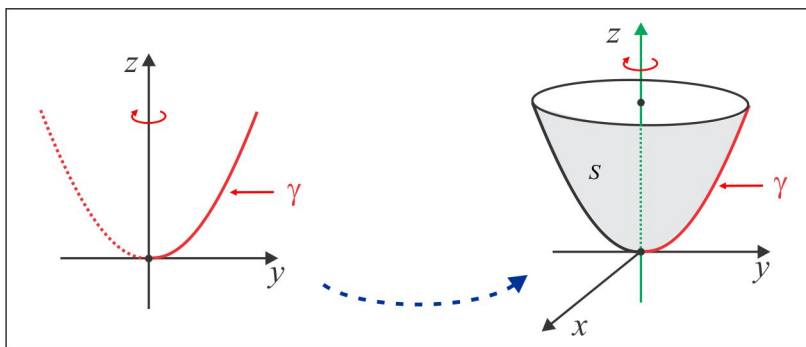
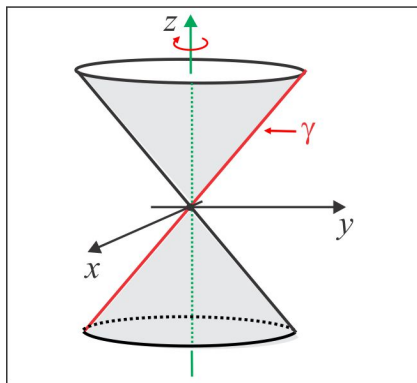
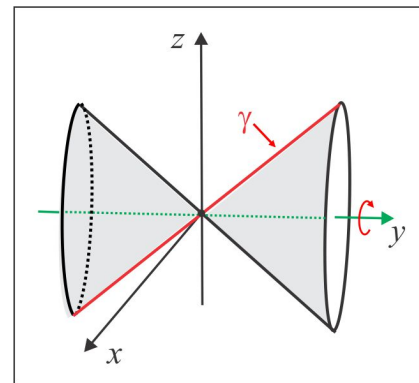


Figura 4.17: O Paraboloides de Revolução.

$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ , isto é:

$$x^2 + y^2 = 4pz.$$

**EXEMPLO 4.3.9 (O Cone de Revolução)** A reta  $g : y = az$ ,  $x = 0$ , gira em torno do eixo  $Oz$  produzindo o Cone de Revolução, com vértice na origem, ilustrado na Figura 4.3.9. A geratriz está na

Figura 4.18: Cone:  $x^2 + y^2 = a^2 z^2$ .Figura 4.19: Cone:  $a^2 x^2 + a^2 z^2 = y^2$ .

forma explícita  $y = f(z) = az$  e a equação do Cone é  $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ , isto é:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Se a rotação da reta  $g$  fosse em torno do eixo  $Oy$ , como ilustra a Figura 4.19, a equação do Cone resultante seria  $x^2 + z^2 = [f^{-1}(y)]^2$ , isto é,  $x^2 + z^2 = y^2/a^2$ , ou seja:

$$a^2 x^2 + a^2 z^2 = y^2,$$

### ESCREVENDO PARA APRENDER 4.3

- Em cada caso, determine a equação da esfera que atende à condição especificada.
  - Diâmetro  $AB$ , sendo  $A(-1, 3, 4)$  e  $B(1, 1, 3)$ .
  - Centro  $C(4, -1, -2)$  e tangente ao plano  $xy$ .
  - Centro  $C(-2, 3, 4)$  e tangente ao eixo  $z$ .
  - Centro  $C(1, 0, 4)$  e tangente ao plano  $x + 2y + 2z = 0$ .
- Em cada caso, determine a equação e esboce o gráfico da superfície de revolução gerada pela rotação da curva  $\gamma$  em torno do eixo indicado.
  - $\gamma : x^2 + 2y = 6, z = 0$ ; eixo  $Oy$ .
  - $\gamma : y^2 = 2z, x = 0$ ; eixo  $Oy$ .
  - $\gamma : y^2 - 2z^2 + 4z = 6, x = 0$ ; eixo  $Oz$ .



- (d)  $\gamma : y = x^3, z = 0$ ; eixo  $Ox$ .
- (e)  $\gamma : z = e^x, y = 0$ ; eixo  $Oz$ .
- (f)  $\gamma : yz = 1, x = 0$ ; eixo  $Oz$ .
- (g)  $\gamma : y = R, x = 0$ ; eixo  $Oz$ .
- (h)  $\gamma : x^2 = 4y, z = 0$ ; eixo  $Oy$ .
- (i)  $\gamma : x^2 + 4z^2 = 16, y = 0$ ; eixo  $Ox$ .
- (j)  $\gamma : y = \text{sen } x, z = 0$ ; eixo  $Ox$ .
3. Em cada caso, encontre a geratriz  $\gamma$  e o eixo de rotação  $L$  da superfície de revolução  $S$ .
- (a)  $S : x^2 + y^2 - z^2 = 4$ .
- (b)  $S : x^2 + y^2 = |z|$ .
- (c)  $S : x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$ .
4. A superfície de revolução  $S$ , gerada pela rotação da circunferência  $\gamma : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0, z = 0$ , em torno do eixo  $Ox$ , recebe o nome de *Toro de Revolução*. Encontre a equação de  $S$  e faça um esboço do gráfico.
5. Repita o exercício precedente com a circunferência no plano  $yz$  de centro  $C(0, 4, 0)$  e raio  $R = 2$ , que gira em torno do eixo  $z$ .
6. Identifique e esboce o gráfico do conjunto dos pontos  $P(x, y, z)$  do  $\mathbb{R}^3$ , cujas coordenadas satisfazem às condições sugeridas:
- (a)  $x^2 + 4z^2 = 1, y = 1$ .
- (b)  $x^2 + z^2 = 4, y = 2$ .
- (c)  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (d)  $x^2 - z^2 = 1, y = 1$ .
- (e)  $x^2 + 4z^2 = y, z = 1$ .
7. Os eixos  $Oy$  e  $Oz$  sofrem uma rotação de um ângulo  $\theta = \pi/4$ , no plano  $yz$ , enquanto o eixo  $Ox$  permanece fixo. Determine as coordenadas dos pontos  $P(1, 2, \sqrt{2})$  e  $Q(3, \sqrt{2}, -1)$  no novo sistema de coordenadas.

8. Determine os valores de  $k$ , de modo que a interseção do plano  $x + ky = 1$  com o hiperbolóide de duas folhas  $y^2 - x^2 - z^2 = 1$  seja:

(a) uma elipse (b) uma hipérbole.

## 4.4 Equações & Gráficos

As quádricas de revolução apresentadas nos Exemplos 4.3.4, ..., 4.3.9 são superfícies particulares descritas por uma equação do 2º grau nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Para associarmos uma superfície a uma equação ou vice-versa, é fundamental observarmos dois aspectos: primeiro a equação padrão da quádrica e, segundo, a disposição dos eixos coordenados. Na visualização gráfica de uma dada superfície  $S$  governada pela equação:

$$S : F(x, y, z) = 0 \quad (4.15)$$

devemos observar os seguintes itens:

► **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS COORDENADOS:** As interseções com os eixos coordenados, se houver alguma, são os pontos:

(i) No eixo  $Ox$ :  $P(x, 0, 0)$ , sendo  $x$  solução da equação  $F(x, 0, 0) = 0$ .

(ii) No eixo  $Oy$ :  $Q(0, y, 0)$ , sendo  $y$  solução da equação  $F(0, y, 0) = 0$ .

(ii) No eixo  $Oz$ :  $R(0, 0, z)$ , sendo  $z$  solução da equação  $F(0, 0, z) = 0$ .

► **TRAÇOS SOBRE OS PLANOS COORDENADOS:** Os traços sobre os planos coordenados, se houver, são as curvas:

(i)  $\gamma_1 : F(x, y, 0) = 0$ , no plano  $xy$

(ii)  $\gamma_2 : F(x, 0, z) = 0$ , o plano  $xz$

(iii)  $\gamma_3 : F(0, y, z) = 0$ , no plano  $yz$ .

► **SIMETRIA EM RELAÇÃO À ORIGEM, AOS PLANOS E EIXOS COORDENADOS:** Dois pontos no espaço  $P$  e  $Q$  são *simétricos* em relação a um plano  $\alpha$  se, e somente se, o segmento  $PQ$  é ortogonal ao plano  $\alpha$  e é dividido ao meio por este plano. Uma superfície  $S$  é simétrica em relação a um plano

$\alpha$  se dado um ponto  $P$  na superfície, existe um ponto  $Q$  na superfície  $S$ , simétrico de  $P$  em relação ao plano  $\alpha$ . A simetria em relação a uma reta e em relação à origem se estabelece de modo similar. Por exemplo, o ponto  $Q$  é o simétrico do ponto  $P$  em relação à reta  $r$  se, e somente se, a reta  $r$  divide o segmento  $PQ$  ao meio e ortogonalmente.

- (a) Os pontos  $Q_1(x, y, -z)$ ,  $Q_2(x, -y, z)$  e  $Q_3(-x, y, z)$  são os simétricos de um dado ponto  $P(x, y, z)$  em relação aos planos coordenados  $xy$ ,  $xz$  e  $yz$ , respectivamente.

*Se a equação de uma superfície permanece inalterada ao mudar o sinal de uma das variáveis, então a superfície é simétrica em relação ao plano coordenado a partir do qual aquela variável é medida.*

- (b) Os pontos simétricos de um dado ponto  $P(x, y, z)$  em relação aos eixos coordenados  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  são, respectivamente,  $Q_4(x, -y, -z)$ ,  $Q_5(-x, y, -z)$  e  $Q_6(-x, -y, z)$

*Se a equação de uma superfície permanece inalterada ao mudar os sinais de duas das variáveis, então a superfície é simétrica em relação ao eixo coordenado correspondente à variável não modificada.*

- (c) O simétrico do ponto  $P(x, y, z)$  em relação à origem é o ponto  $Q(-x, -y, -z)$ .

*Se a equação de uma superfície permanece inalterada ao mudar o sinal das tres variáveis, então a superfície é simétrica em relação à origem.*

► **SEÇÕES POR PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS:** As seções por planos paralelos aos planos coordenados, por exemplo os planos  $z = k$ , paralelos ao plano  $xy$ , são as possíveis curvas descritas por:

$$F(x, y, k) = 0, \quad z = k.$$

► **EXTENSÃO DA SUPERFÍCIE:** A extensão da superfície  $S$  descrita pela equação (4.15) é estabelecida ao explicitar uma das variáveis, por exemplo  $z$ , em função de  $x$  e  $y$ . Obtemos uma equação do tipo  $z = f(x, y)$  e o domínio da função  $f$  nos dá os valores reais que as variáveis  $x$  e  $y$  podem assumir.

**EXEMPLO 4.4.1** Vamos discutir a superfície  $S$  descrita pela equação:

$$S : x + z^2 - 1 = 0.$$

Já sabemos se tratar de um cilindro reto com diretriz  $\gamma : x = 1 - z^2, y = 0$ , do plano  $xz$ , e geratriz o eixo  $Oy$ . A equação  $x + z^2 - 1 = 0$  não tem solução real, se  $x = z = 0$ , de modo que a superfície não toca o eixo  $Oy$ . As interseções com os eixos  $Ox$  e  $Oz$  são os pontos  $Q_2(1, 0, 0)$  e  $Q_1(0, 0, \pm 1)$ , respectivamente. Os planos  $y = k$ , interceptam a superfície na parábola

$$x = 1 - z^2, \quad y = k$$

e os traços nos planos  $xy$  e  $yz$  são, respectivamente, a reta  $x = 1, z = 0$  e o par de retas  $x = 0, z = \pm 1$ . A equação não é alterada ao trocar os sinais das variáveis  $y$  ou  $z$  e isto indica que a superfície é simétrica em relação ao eixo  $Ox$  e em relação aos planos  $xy$  e  $xz$ . Por fim, vemos que não há restrições aos valores assumidos pelas variáveis  $y$  e  $z$ , enquanto a variável  $x$  não pode assumir valores maiores do que 1, isto é, a superfície está situada abaixo do plano  $x = 1$  e não tem extensão definida. A Figura 5.k ilustra graficamente uma porção da superfície  $S$ .

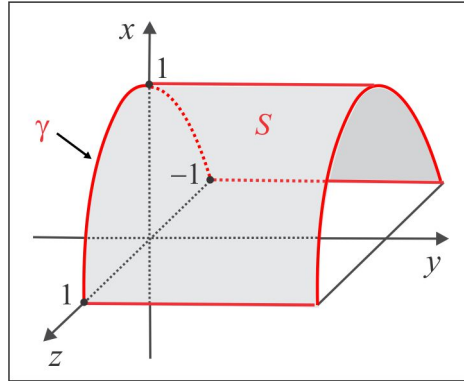


Figura 4.20: Superfície  $S : x + z^2 - 1 = 0$ .

As quádricas de revolução dos Exemplos 4.3.4, 4.3.5 e 4.3.6 estão inseridas no modelo mais geral:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.16)$$

onde  $a, b$  e  $c$  são números reais positivos, conhecidas por *Quádricas Cêntricas*. A ilustração gráfica de cada quádrica será, agora, consequência da discussão da respectiva equação.

► **O ELIPSOIDE:** Todos os coeficientes em (4.16) são positivos. A forma padrão do Elipsoide é, portanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.17)$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O elipsoide (4.17) intercepta os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  nos pontos  $A(\pm a, 0, 0)$ ,  $B(0, \pm b, 0)$  e  $C(0, 0, \pm c)$ , respectivamente.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando na equação (4.17)  $z = 0$ , vemos que o traço do elipsoide no plano  $xy$  é a elipse:

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os traços nos planos  $xz$  e  $yz$  são determinados de forma similar e encontramos, com  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente, as elipses:

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_3 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.17) não é alterada ao trocar o sinal de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Isto indica que o elipsoide é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos  $z = k$ , com  $|k| < c$ , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2(1 - k^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - k^2/c^2)} = 1, \quad z = k,$$

As seções pelos planos  $x = m$ , com  $|m| < a$ , são as elipses:

$$\frac{y^2}{b^2(1 - m^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - m^2/a^2)} = 1, \quad x = m,$$

e pelos planos  $y = n$ , com  $|n| < b$ , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2(1 - n^2/b^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - n^2/b^2)} = 1, \quad y = n.$$

A Figura 4.21 ilustra o elipsoide (4.17), o qual se assemelha ao elipsoide de revolução (4.14).

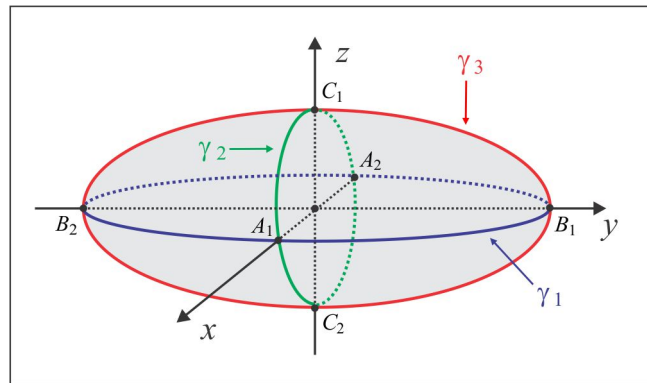


Figura 4.21: O Elipsoide.

(v) **Extensão da Superfície:** Da equação (4.17), deduzimos que:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b \quad \text{e} \quad |z| \leq c$$

e o elipsoide está contido no paralelepípedo determinado pelos planos  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  e  $z = \pm c$  e a superfície não se expande além desses planos.

► **O HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA:** Dois coeficientes em (4.16) são positivos e um é negativo. Existem várias possibilidades e vamos comentar o caso da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.18)$$

que servirá de modelo para os outros dois casos:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O hiperboloide (4.18) não intercepta o eixo  $Oz$ , tendo em vista que a substituição de  $x$  e  $y$  por 0 em (4.18) nos conduz à equação  $z^2 = -c^2$ , sem solução real para  $z$ . Por outro lado, com os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  as interseções são os pontos nos pontos  $A(\pm a, 0, 0)$  e  $B(0, \pm b, 0)$ , respectivamente.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando na equação (4.18)  $z = 0$ , vemos que o traço do hiperboloide no plano  $xy$  é a elipse:

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os traços nos planos  $xz$  e  $yz$  são determinados de forma similar e encontramos, com  $y = 0$  e  $x = 0$ , respectivamente, as hipérbolas:

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_3 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.18) não é alterada ao trocar o sinal de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Isto indica que o hiperboloide é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos  $z = k$ , com  $|k| < c$ , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2(1+k^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1+k^2/c^2)} = 1, \quad z = k,$$

As seções pelos planos  $x = m$ , com  $|m| < a$ , são as hipérbolas:

$$\frac{y^2}{b^2(1-m^2/a^2)} - \frac{z^2}{c^2(1-m^2/a^2)} = 1, \quad x = m,$$

e pelos planos  $y = n$ , com  $|n| < b$ , são as hipérbolas:

$$\frac{x^2}{a^2(1+n^2/b^2)} - \frac{z^2}{c^2(1+n^2/b^2)} = 1, \quad y = n.$$

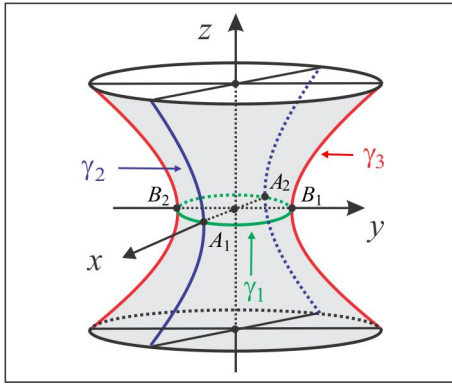


Figura 4.22: O Hiperboloide de uma Folha.

A Figura 4.22 ilustra graficamente uma porção do hiperboloide (4.18), o qual se assemelha ao hiperboloide de revolução da Figura 4.15, onde se tem  $a = b$ .

(v) **Extensão da Superfície:** Da equação (4.18), deduzimos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2},$$

de modo que, à medida que  $|z| \rightarrow \infty$ , o hiperboloide se expande arbitrariamente.

► **O HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHA:** Dois coeficientes em (4.16) são negativos e um é positivo. Existem várias possibilidades e como forma representativa vamos comentar o caso da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.19)$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O hiperboloide (4.19) intercepta apenas o eixo  $Ox$ , nos pontos  $A(\pm a, 0, 0)$ .

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando na equação (4.19)  $z = 0$ , vemos que o traço do hiperboloide no plano  $xy$  é a hipérbole:

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O traço no plano  $xz$  é determinado considerando  $y = 0$  na equação (4.19). Encontramos a hipérbole:

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Não há traço sobre o plano  $yz$ , tendo em vista que considerando  $x = 0$  em (4.19), a equação resultante não tem solução real para  $y$  e  $z$ .

(iii) **Simetria:** A equação (4.19) não é alterada ao trocar o sinal de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Isto indica que o hiperboloide de duas folhas é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos  $x = k$ , com  $|k| > a$ , paralelo ao plano  $yz$ , são as elipses:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + k^2/a^2, \quad x = k.$$

Os planos  $x = k$ , com  $|k| < a$ , não interceptam o hiperboloide (4.19) e isto indica que o hiperboloide é composto de duas partes distintas, as folhas.

(v) **Extensão da Superfície:** Vemos da última equação que à medida que  $k \rightarrow \infty$  o hiperboloide de duas folhas se expandem arbitrariamente.

A Figura 4.23 ilustra graficamente uma porção do hiperboloide de duas folhas (4.19), o qual se assemelha ao hiperboloide de revolução da Figura 4.16, onde se tem  $a = b$ .

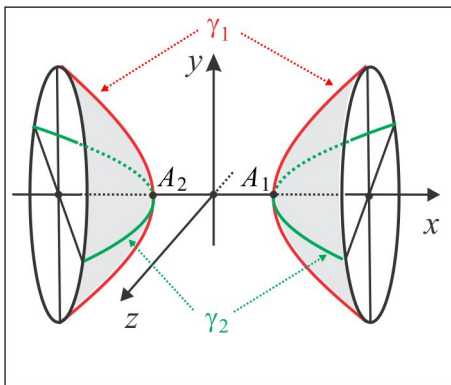


Figura 4.23: O Hiperboloide de duas Folha.

► **O CONE QUÁDRICO:** A quádrlica descrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4.20)$$

é conhecida por *Cone Quádrico* e a equação (4.20) será usada como modelo representativo para os outros dois casos:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O cone (4.20) intercepta os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  na origem, o vértice do cone.



(ii) **Traços nos planos coordenados:** Sobre o plano  $xy$  o traço é a origem. Considerando  $y = 0$  na equação (4.20), vemos que o traço do cone no plano  $xz$  é o par de retas:

$$\gamma_1 : z = \pm(c/a)x.$$

e no plano  $yz$  consideramos  $x = 0$  na equação (4.20) e encontramos o par de retas como traço:

$$\gamma_2 : z = \pm(c/b)y.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.19) não é alterada ao trocar o sinal de  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Isto indica que o hiperboloide de duas folhas é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos  $z = k$ , paralelos ao plano  $xy$ , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2/c^2, \quad z = k. \quad (4.21)$$

Os planos  $x = k$  e  $y = k$  interceptam o cone (4.20), respectivamente, nas hipérbolas:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2/b^2, \quad y = k \quad \text{e} \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2/a^2, \quad x = k.$$

(v) **Extensão da Superfície:** A partir da equação (4.21) deduzimos que à medida que  $k \rightarrow \infty$  a elipse tem seus eixos aumentados e, conseqüentemente, o cone se expande arbitrariamente.

A Figura 4.24 ilustra graficamente uma porção do cone (4.20), o qual se assemelha ao cone de revolução da Figura 4.3.9, onde se tem  $a = b$ .

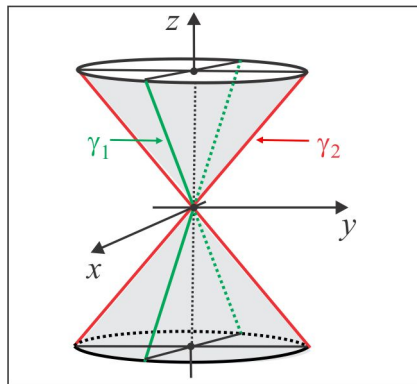


Figura 4.24: O Cone Quádrico.

**OBSERVAÇÃO 4.4.2 (Cone x Hiperboloide 1)** Vamos fazer uma comparação entre a equação (4.18) do hiperboloide de uma folha com a equação representativa do Cone Quádrico (4.20). A seção no cone pelo plano  $\alpha : y = mx$  é o par de retas concorrentes:

$$\sqrt{(1/a^2 + m^2/b^2)} x = \pm z/c, \quad y = mx \quad (4.22)$$

que são as assíntotas da hipérbole  $\gamma$  cortada do hiperboloide de uma folha (4.18) pelo plano  $\alpha$ . Em relação ao hiperboloide o cone (4.20) desempenha o mesmo papel das assíntotas (4.22) em relação à hipérbole  $\gamma$ , de modo que o hiperboloide aproxima-se cada vez mais do cone, à medida que as superfícies aumentam de tamanho, como sugere a Figura 4.25. A equação (4.18) pode ser fatorada e vista sob a forma:

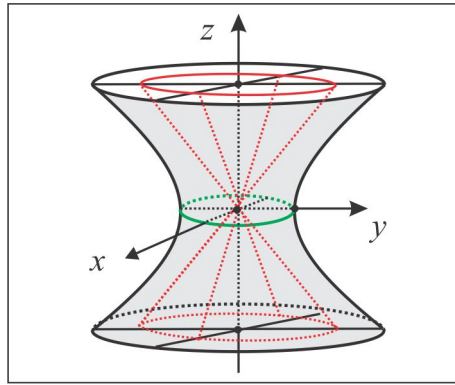


Figura 4.25: O Cone Assintótico.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (4.23)$$

e recuperada por eliminação do parâmetro  $\lambda$  em qualquer dos sistemas seguintes de equações lineares:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad e \quad \lambda \left(\frac{x}{a} \mp \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}.$$

**OBSERVAÇÃO 4.4.3 (Cone x Hiperboloide 2)** Como ocorre com o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas (4.19) também possui um cone assintótico, descrito por:

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0} \quad (4.24)$$

A Figura 4.26 ilustra o hiperboloide de duas folhas (4.19) e o respectivo cone assintótico (4.24).

As quádricas não cêntricas são aquelas governadas por uma equação canônica do tipo:

$$\boxed{\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz} \quad (4.25)$$

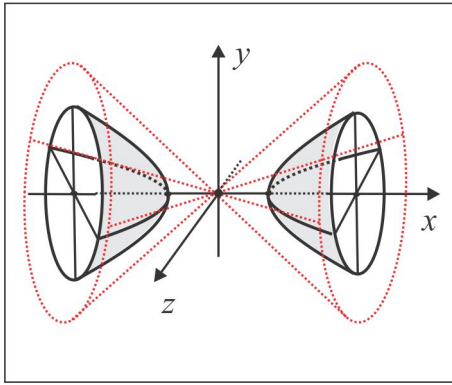


Figura 4.26: O Cone Assintótico.

com cada um dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  não nulo. Identificamos em (4.25) dois planos de simetria (plano  $xz$  e plano  $yz$ ) e um eixo de simetria (eixo  $Oz$ ), mas, a quádrica não tem um centro de simetria.

► **O PARABOLOIDE ELÍPTICO:** Os coeficientes dos termos quadráticos em (4.25) têm mesmo sinal. Como caso representativo, vamos discutir a quádrica de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (4.26)$$

em que  $c$  e  $z$  são positivos. As outras formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$$

e cada forma tem duas variações a depender do sinal do coeficiente  $c$ .

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O parabolóide elíptico (4.26) intercepta os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  na origem, o vértice do parabolóide elíptico.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando  $z = 0$  na equação (4.26), encontramos  $x = 0$  e  $y = 0$  e, assim, sobre o plano  $xy$ , o traço é a origem. Fazendo  $y = 0$ , vemos que o traço do parabolóide elíptico no plano  $xz$  é a parábola:

$$\gamma_1 : x^2 = (a^2 c)z.$$

O traço no plano  $yz$  é determinado considerando  $x = 0$  na equação (4.26) e encontramos a parábola:

$$\gamma_2 : y^2 = (b^2 c)z.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.26) não é alterada ao trocar o sinal de  $x$  ou  $y$ . Isto indica que o parabolóide elíptico é simétrico em relação aos planos  $xz$  e  $yz$ .

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos  $z = k$ ,  $k > 0$ , paralelos ao plano  $xy$ , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k. \quad (4.27)$$

(v) **Extensão da Superfície:** De (4.27) deduzimos que à medida que  $k \rightarrow \infty$  a elipse tem seus eixos aumentados e, conseqüentemente, o parabolóide elíptico se expande arbitrariamente.

A Figura 4.27 ilustra graficamente uma porção do parabolóide elíptico (4.26), o qual se assemelha ao parabolóide de revolução da Figura 4.17, onde se tem  $a = b$ .

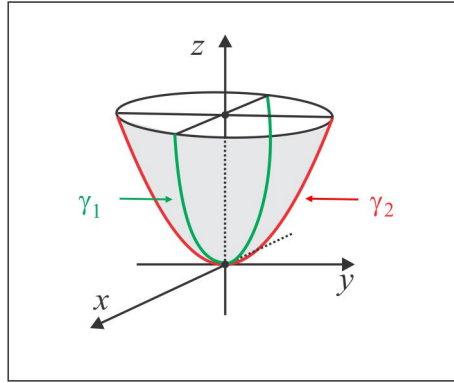


Figura 4.27: O Parabolóide Elíptico.

► **O PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SELA):** Os coeficientes dos termos quadráticos em (4.25) têm sinais opostos. Como caso representativo, vamos discutir a quádrlica de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (4.28)$$

em que  $c$  é negativo. As outras formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx$$

e cada forma tem duas variações a depender do sinal do coeficiente  $c$ .

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O parabolóide hiperbólico (4.28) intercepta os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  na origem.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando  $y = 0$  na equação (4.28), vemos que o traço do parabolóide hiperbólico no plano  $xz$  é a parábola:

$$\gamma_1 : x^2 = (a^2c)z, \quad y = 0.$$

O traço no plano  $yz$  é determinado considerando  $x = 0$  na equação (4.26) e encontramos a parábola:

$$\gamma_2 : y^2 = (-b^2c)z, \quad x = 0.$$

Sobre o plano  $xy$ , o traço é o par de retas concorrentes:

$$\gamma_3 : bx + ay = 0, \quad z = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_4 : bx - ay = 0, \quad z = 0.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.28) não é alterada ao trocar o sinal de  $x$  ou  $y$ . Isto indica que o parabolóide hiperbólico é simétrico em relação aos planos  $xz$  e  $yz$ .

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos  $z = k$ ,  $k > 0$ , paralelos ao plano  $xy$ , são as hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k. \quad (4.29)$$

As seções por planos paralelos aos planos  $xz$  e  $yz$  são, respectivamente, as parábolas:

$$x^2 = (a^2c)z + \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k \quad \text{e} \quad y^2 = (-b^2c)z + \frac{k^2}{a^2}, \quad x = k$$

(v) **Extensão da Superfície:** À medida que  $k \rightarrow \infty$ , deduzimos de (4.29) que os ramos da hipérbole afaztam-se do eixo  $Oz$  e, portanto, o parabolóide hiperbólico (4.28) se expandem arbitrariamente.

A Figura 4.28 ilustra graficamente uma porção do parabolóide hiperbólico (4.28).

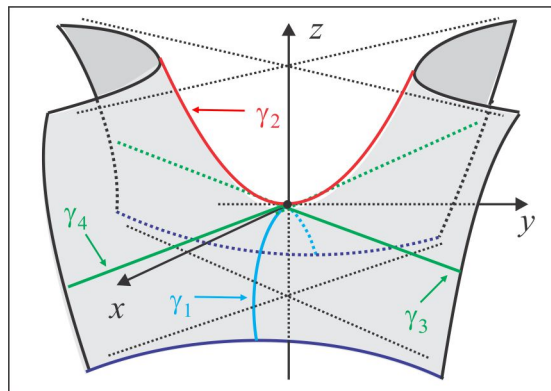
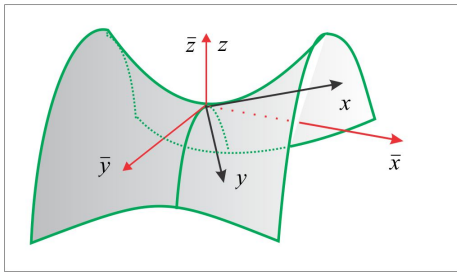
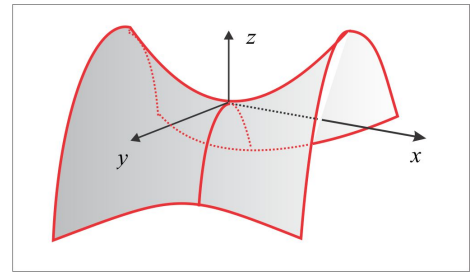


Figura 4.28: O Parabolóide Hiperbólico.

**OBSERVAÇÃO 4.4.4** Nas Figuras 4.29 e 4.30 apresentamos a mesma quádrlica (Sela) correspondendo às equações  $z = x^2 - y^2$  e  $z = xy$ . No caso da Figura 4.29, poderíamos ter girado a quádrlica de  $45^\circ$ , que é o ângulo de rotação que transforma a equação  $z = xy$  em  $2z = \bar{x}^2 - \bar{y}^2$ . Para uma melhor visualização gráfica, deixamos a quádrlica e o eixo  $Oz$  fixos e giramos os eixos  $Ox$  e  $Oy$  de  $45^\circ$ .

Figura 4.29: A Sela  $z = xy$ Figura 4.30: A Sela  $z = x^2 - y^2$ 

Como fonte de referência, exibimos abaixo as formas representativas das principais Quádricas, sendo as quatro primeiras cêntricas e as duas últimas não cêntricas.

(a) Elipsoide:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . (Figura 4.21)

(b) Hiperbolóide de Uma Folha:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (Figura 4.22)

(c) Hiperbolóide de Duas Folhas:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (Figura 4.23)

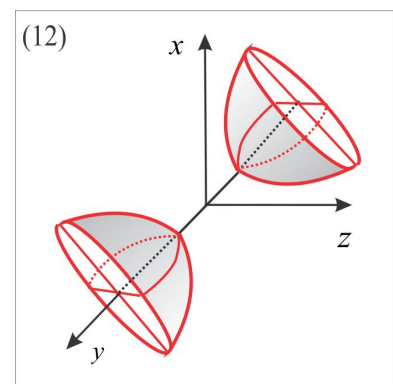
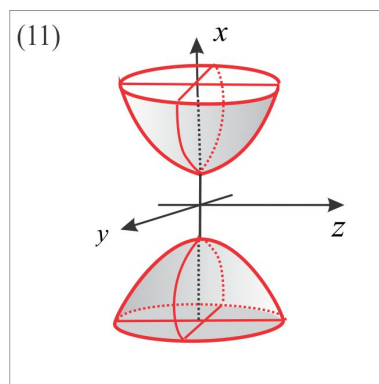
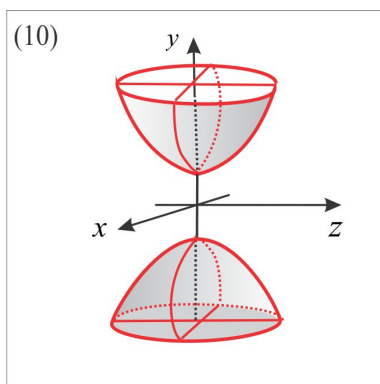
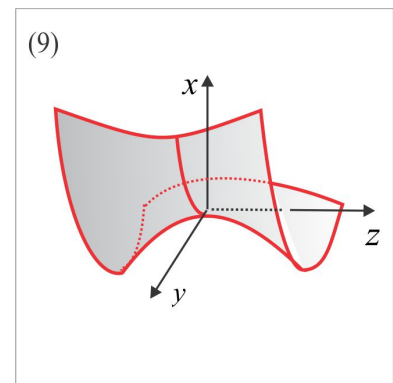
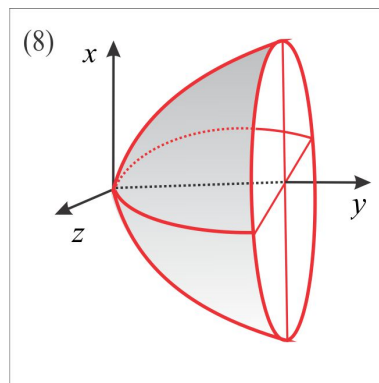
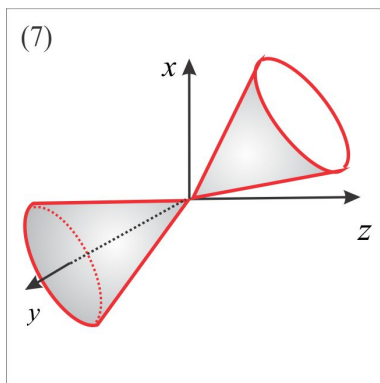
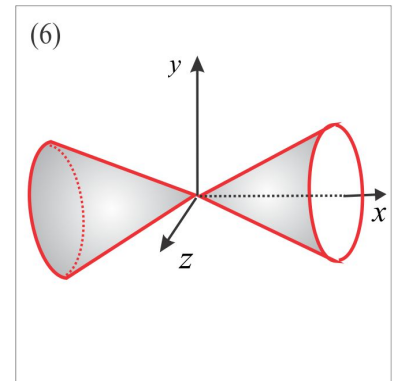
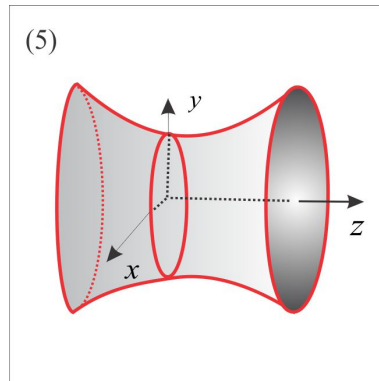
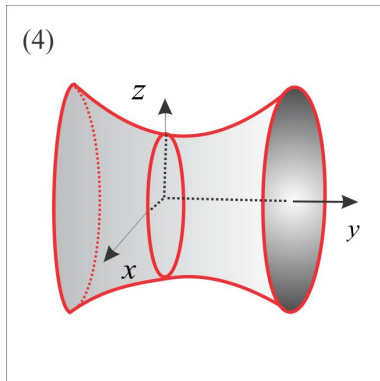
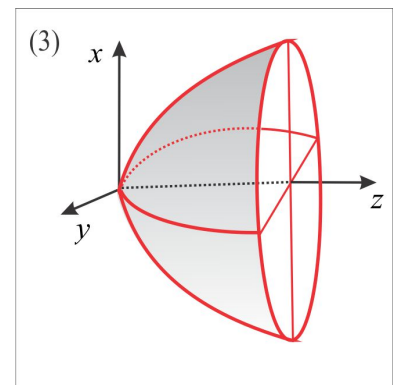
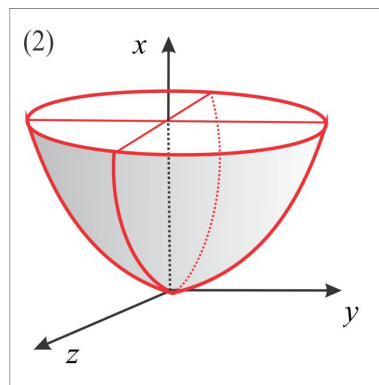
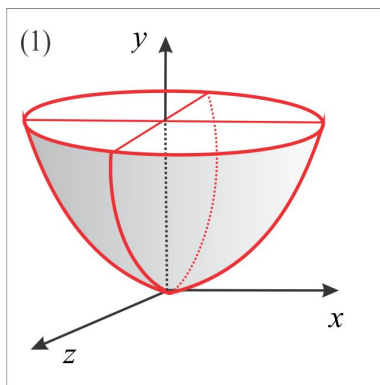
(d) Cone Quádrico:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$  (Figura 4.24)

(e) Paraboloide Elíptico:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$  (Figura 4.27)

(f) Paraboloide Hiperbólico (sela):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$  (Figura 4.28)

Agora, como parte do processo de treinamento, faça a associação entre o gráfico e a equação. Note que efetuamos mudanças no posicionamento dos eixos coordenados.

$$\begin{array}{llll}
 ( ) \frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 & ( ) y - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & ( ) x + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & ( ) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\
 ( ) \frac{x^2}{a^2} - y + \frac{z^2}{c^2} = k & ( ) x - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & ( ) \frac{x^2}{a^2} - y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 0 & ( ) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\
 ( ) z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k & ( ) x^2 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & ( ) \frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 & ( ) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1
 \end{array}$$



1. Determine o vértice e o foco da parábola interseção do plano  $y = 2$  com o parabolóide hiperbólico  $9y^2 - 36x^2 = 16z$ .
2. Determine os vértices e os focos da elipse interseção do plano  $y = 3$  com o elipsoide 
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1.$$
3. Determine a interseção do parabolóide  $4y^2 - 9x^2 = 36z$  com o plano  $3x + 2y - z = 0$ .
4. Identifique o lugar geométrico dos pontos  $P(x, y, z)$ , tais que  $\|\overrightarrow{AP}\|^2 + \|\overrightarrow{BP}\|^2 = 9$ , sendo  $A(1, -1, 2)$  e  $B(2, 1, 0)$ .
5. Determine a equação da esfera de centro  $C(3, 2, -2)$  e tangente ao plano  $x + 3y - 2z + 1 = 0$ .
6. Determine a equação do parabolóide elíptico com vértice na origem, eixo sobre o eixo  $z$  e que passa nos pontos  $A(1, 0, 1)$  e  $B(0, 2, 1)$ .
7. A reta  $2x - 3y = 6$ ,  $z = 0$ , gira em torno do eixo  $y$ . Determine a equação do cone resultante, seu vértice e sua interseção com o plano  $yz$ .
8. Considere um sistema de coordenadas onde os eixos  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  são as retas suportes dos vetores  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ . Escreva a equação da superfície  $S : xy + yz + xz = 0$  no novo sistema de coordenadas e identifique-a.
9. Considere um sistema de coordenadas  $O\bar{x}$ ,  $O\bar{y}$  e  $O\bar{z}$  determinado pela origem e pelos pontos  $A(1, -1, 1)$ ,  $B(2, 1, -1)$  e  $C(0, 1, 1)$ . Descreva a superfície  $S : 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + 8 = 0$  nesse sistema de coordenadas e identifique-a.
10. Identifique as seguintes quádricas.
  - (a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ .
  - (b)  $x^2 + y^2 - 2y - z + 1 = 0$ .
  - (c)  $-x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$ .
  - (d)  $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 12x + 12y + 2z + 28 = 0$ .
  - (e)  $8x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2 = 36$ .



(f)  $3x^2 = 2y + 2z$ .

(g)  $z^2 - 2xy + 2x + 2y - 4z = 0$ .

(h)  $z = xy$ .

11. Determine e esboce as interseções do cone quádrico  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$  com os seguintes planos:

(a)  $z = 2$  (b)  $y = 2$  (c)  $y - bz = 0$ .

12. Seja  $\gamma$  a curva interseção do plano  $x + y + z = 0$  com a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Identifique a curva  $\gamma$  e sua projeção no plano  $xy$ .

## RESPOSTAS &amp; SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.1

1. Fazer
2. Fazer
3. (a)  $9x^2 + z^2 - 6xy - 36y + 12z = 0$ .  
(b)  $x^2 + 4z^2 - 4xz + y = 1$ .  
(c)  $x^2 - z^2 - 4y^2 - 4yz = 1$ .
4.  $S_3 : y = z^6$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.2

1.  $a^2(x^2 + z^2) = (y - b)^2$ .
2.  $5(x^2 + y^2) - z^2 + 4xy + 8xz - 8yz = 0$ .
3.  $y^2 + z^2 = 3x^2$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.3

1. (a)  $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3$ .

- (b)  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ .
- (c)  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 13$ .
- (d)  $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$ .
2. (a)  $x^2 + z^2 + 2y = 6$ .
- (b)  $y^4 - 4x^2 - 4z^2 = 0$ .
- (c)  $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z = 6$ .
- (d)  $x^6 - y^2 - z^2 = 0$ .
- (e)  $z - \exp(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$ .
- (f)  $(x^2 + y^2)z^2 = 1$ .
- (g)  $x^2 + y^2 = R^2$ .
- (h)  $x^2 + z^2 = 4y$ .
- (i)  $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$ .
- (j)  $y^2 + z^2 = \sin^2 x$ .
3. (a)  $\gamma : x^2 - z^2 = 4, y = 0$ ; eixo  $z$ .
- (b)  $\gamma : y = \sqrt{|z|}, x = 0$ ; eixo  $z$ .
- (c)  $\gamma : y^2 - |y| - z = x, x = 0$ ; eixo  $z$ .
4.  $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(y^2 + z^2)$
5.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 40(x^2 + y^2) + 24z^2 + 144 = 0$
6. (a) Uma elipse.
- (b) A circunferência de centro  $C(0, 2, 0)$  e raio  $R = 1$ .
- (c) Um cilindro circular reto.
- (d) Uma hipérbole.
- (e) Uma parábola.
7.  $P(1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ ; e  $Q(3, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ .
8. (a)  $1 < |k| < \sqrt{2}$ ; (b)  $|k| < 1$ .

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.4

1.  $V(0, 2, 9/4)$ ; ;  $F(0, 2, 77/36)$ .
  2.  $V(\pm 12/5, 3, 0)$  e  $V(0, 3, \pm 8/5)$ ; ;  $F(\pm 4\sqrt{5}/5, 3, 0)$ .
  3. As retas concorrentes  $r_1 : x = 2t, y = 3t, z = 12t$  e  $r_2 : x = 2t, y = 18 - 3t, z = 36$ .
  4. A esfera de centro  $C(3/2, 1, 3/2)$  e raio  $R = \sqrt{15}/2$ .
  5.  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 14$ .
  6.  $4x^2 + y^2 = 4z$ .
  7.  $4x^2 - 9(y - 2)^2$ ;  $V(0, 2, 0)$ ;  $3y \pm 2z = 6$ .
  8. O cone  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 2\bar{z}^2$ .
  9. o hiperboloide  $3\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 2\bar{z}^2 + 8 = 0$ .
  10. (a) Esfera.  
(b) Parabolóide de Revolução.  
(c) Cone Quádrico.  
(d) Hiperboloide de uma Folha.  
(e) Elipsoide.  
(f) Cilindro.  
(g) Hiperboloide de duas Folhas.  
(h) Parabolóide Hiperbólico (sela).
  11. (a) Elipse (b) Hipérbole (c) Parábola.
  12. A curva  $\gamma$  é uma circunferência e sua projeção no plano  $xy$  é uma elipse.
-





## Introdução

Na construção do corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais, as seguintes propriedades são estabelecidas:

$$1. \quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{comutativa})$$

$$2. \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{associativa})$$

$$3. \quad x + (-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{existência do simétrico})$$

$$4. \quad 0 + x = x + 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{elemento neutro da soma})$$

$$5. \quad 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{elemento neutro do produto})$$

$$6. \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{associativa})$$

$$7. \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{distributiva})$$

$$8. \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (\text{distributiva})$$

No Capítulo 1, quando estudamos vetores geométricos no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , tivemos oportunidade de estabelecer as propriedades para soma de vetores e produto por escalar, semelhantes àquelas para números reais. Por exemplo:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, \quad x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}, \quad \text{etc.}$$

No tocante à notação, os vetores serão identificados com pontos do espaço e, neste contexto, os vetores básicos  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  serão identificados com os pontos  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  e  $C(0, 0, 1)$ , respectivamente, e o vetor genérico  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  identificar-se-á com o ponto  $P(x, y, z)$ . Assim, temos:

$$\mathbb{R}^3 = \{\vec{v} = (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e as operações *soma* e *produto por escalar* no espaço  $\mathbb{R}^3$  assumem a *forma algébrica*:

$$\text{SOMA:} \quad (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z').$$

$$\text{PRODUTO:} \quad \lambda \cdot (x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

O que temos em mente a partir de agora é a busca por conjuntos (os *Espaços Vetoriais*), cujos elementos serão denominados *vetores*, com propriedades semelhantes ao  $\mathbb{R}^3$ , isto é, equipado de uma operação *soma* de vetores e uma operação *produto* de vetores por números reais, atendendo às mesmas propriedades estabelecidas para o  $\mathbb{R}^3$ , como conjunto de vetores geométricos. Embora os escalares considerados neste texto sejam números reais, a teoria pode ser formulada para conjuntos mais gerais, como por exemplo o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos  $x + iy$ , com  $x$  e  $y$  números reais, equipado das operações usuais:

$$\text{SOMA:} \quad (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\text{PRODUTO:} \quad x \cdot (a + ib) = (xa) + i(xb), \quad x \in \mathbb{R}$$

Os conjuntos numéricos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$  são conhecidos na literatura algébrica por *Corpo dos Números Reais* e *Corpo dos Números Complexos*, respectivamente.

### 5.0.1 Corpos Numéricos

Por *Corpo Numérico*, ou simplesmente *Corpo*, entendemos um conjunto  $\mathbb{F}$  de números (reais ou complexos), o qual goza das seguintes propriedades:

- (i) Os números 0 e 1 estão em  $\mathbb{F}$ .
- (ii) Se  $x, y \in \mathbb{F}$ , então  $x + y$  e  $x \cdot y$  pertencem a  $\mathbb{F}$ .
- (iii) Se  $x \in \mathbb{F}$ , o simétrico  $-x$  também pertence a  $\mathbb{F}$ .
- (iv) Se  $x \in \mathbb{F}$  e  $x \neq 0$ , então o inverso multiplicativo  $x^{-1}$  também está em  $\mathbb{F}$ .

É claro que o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais e o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos são corpos numéricos. No corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos, o inverso multiplicativo do número complexo não nulo  $z = a + ib$  é precisamente o número complexo  $w = (a^2 + b^2)^{-1} (a - ib)$ .

1. Por que o conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  não é um corpo? Seria o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros um corpo?
2. O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é um corpo. Seria o conjunto dos irracionais um corpo?
3. Verifique se o conjunto  $\mathbb{F} = \{a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}\}$  é um corpo.

4. Mostre que qualquer corpo numérico contém o corpo  $\mathbb{Q}$  dos números racionais. Por essa razão,  $\mathbb{Q}$  é conhecido como o *menor corpo numérico*.
5. Dados dois polinômios  $p(x)$  e  $q(x)$  com coeficientes em um corpo  $\mathbb{F}$ , o quociente  $\frac{p(x)}{q(x)}$  recebe o nome de *função racional*. Se  $x \in \mathbb{F}$  e  $p(x)$  é um polinômio com coeficientes em  $\mathbb{F}$ , mostre que  $p(x) \in \mathbb{F}$ . Dada uma função racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad b_m \neq 0,$$

mostre que se  $x \in \mathbb{F}$  e  $q(x) \neq 0$ , então  $f(x) \in \mathbb{F}$ .

## 5.1 Construindo Espaços Vetoriais

Fixemos um corpo  $\mathbb{F}$  e consideremos um conjunto não vazio  $V$ , cujos elementos  $u, v, w$ , etc. denominaremos *vetores*. Para tornar o conjunto  $V$  um *espaço vetorial* sobre  $\mathbb{F}$  é necessário definir uma soma (+) entre os vetores (elementos) de  $V$  e um produto ( $\bullet$ ) dos escalares (números) de  $\mathbb{F}$  pelos vetores de  $V$ , de modo que as propriedades (EV1)-(EV8), análogas àquelas (1)-(8) estabelecida para números reais, sejam atendidas. Formalmente, definimos duas operações:

$$+ : V \times V \xrightarrow{(u,v)} V \quad \text{e} \quad \bullet : \mathbb{F} \times V \xrightarrow{(x,v)} V$$

com as seguintes propriedades válidas para  $u, v$  e  $w$  em  $V$  e  $x$  e  $y$  no corpo  $\mathbb{F}$ :

(EV1)  $u + v = v + u$ .

(EV2)  $(u + v) + w = u + (v + w)$ .

(EV3) Existe em  $V$  um único vetor  $\mathbf{0}$ , tal que  $\mathbf{0} + u = u, \quad \forall u \in V$ . ( $\mathbf{0}$  é o *vetor nulo* de  $V$ )

(EV4) Dado  $u$  em  $V$ , existe um único vetor  $w$  em  $V$ , tal que  $u + w = \mathbf{0}$ . (anota-se  $w = -u$ )

(EV5)  $1 \cdot u = u$ .

(EV6)  $x \cdot (y \cdot u) = (xy) \cdot u$ .

(EV7)  $x \cdot (u + v) = x \cdot u + x \cdot v$ .

(EV8)  $(x + y) \cdot u = x \cdot u + y \cdot u$ .

É claro que  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Aliás, qualquer corpo numérico  $\mathbb{F}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{F}$ . O corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos com as operações usuais é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

Um espaço Vetorial real é um terno  $\{V, +, \bullet\}$  constituído de um conjunto não vazio  $V$  de vetores e duas operações: (i) soma (+) de vetores e (ii) produto ( $\bullet$ ) de vetores por números reais.

**EXEMPLO 5.1.1 (O Espaço Vetorial  $\mathbb{R}^n$ )** Representamos por  $\mathbb{R}^n$  o conjunto constituído das  $n$ -uplas ordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reais, isto é:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Equipado com as operações usuais:

$$\begin{aligned} \text{SOMA:} \quad & (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \text{PRODUTO:} \quad & \lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.2)$$

o conjunto  $\mathbb{R}^n$  torna-se um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$  com vetor nulo dado por  $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$ . De fato, dado  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  um vetor do  $\mathbb{R}^n$ , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} + v &= (0, 0, 0, \dots, 0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (0 + x_1, 0 + x_2, \dots, 0 + x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = v. \end{aligned}$$

O simétrico do vetor  $v$  é o vetor  $-v = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ , e temos:

$$v + (-v) = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) = \mathbf{0}.$$

Como parte do processo de treinamento, verifique as demais propriedades do elenco (EV1)-(EV8), que comprovam a estrutura de espaço vetorial do  $\mathbb{R}^n$ . No caso  $n = 2$ , temos o espaço  $\mathbb{R}^2$  (o plano  $xy$ ), com as operações:

$$\begin{aligned} \text{SOMA:} \quad & (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \\ \text{PRODUTO:} \quad & \lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

**EXEMPLO 5.1.2** Existem subconjuntos de um dado espaço vetorial que herdam a estrutura de espaço vetorial e outros não. Por exemplo, o subconjunto  $S$  do espaço  $\mathbb{R}^3$  dado por:

$$S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

com as operações herdadas do  $\mathbb{R}^3$ , é, ainda, um espaço vetorial, denominado **subespaço vetorial** do  $\mathbb{R}^3$ . O subespaço  $S$  é o plano  $xy$  ( $\mathbb{R}^2$ ) imerso no  $\mathbb{R}^3$ , ilustrado na Figura 5. - 2, onde notamos que:



- (i) o vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  do  $\mathbb{R}^3$  jaz no subconjunto  $S$ ;
- (ii) se  $v = (x, y, 0)$  é um vetor de  $S$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y, 0)$  é um vetor de  $S$ ;
- (iii) se  $v = (x, y, 0)$  e  $u = (x', y', 0)$  são vetores de  $S$ , então  $u + v = (x + x', y + y', 0)$  também o é.

Como veremos adiante, estas são as condições necessárias e suficientes para um subconjunto  $S$  de um espaço vetorial  $V$  herdar a estrutura de espaço vetorial. Já o subconjunto  $U$  do  $\mathbb{R}^3$  constituído dos vetores  $v = (x, y, 1)$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , não contém o vetor nulo e não pode ter estrutura de subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ . Ele é um subconjunto, mas, não um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ .

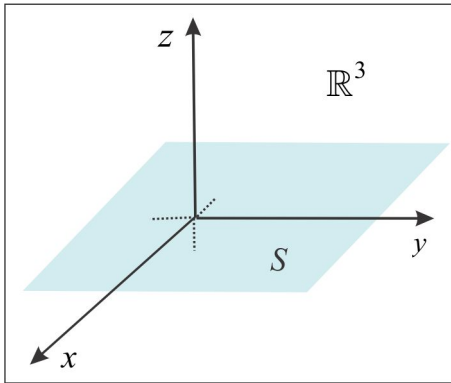


Figura 5.-2: Subespaço do  $\mathbb{R}^3$ .

**EXEMPLO 5.1.3** O subconjunto  $S$  do espaço  $\mathbb{R}^4$ , dado por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\}$$

embora contenha o vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$  não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^4$ . De fato, o vetor  $v = (0, 0, 0, 1)$  está em  $S$  e, contudo, o seu simétrico  $-v = (0, 0, 0, -1)$  não pertence a  $S$ .

**EXEMPLO 5.1.4 (O Espaço  $\mathbb{P}_n(t)$  de Polinômios)** Seja  $\mathbb{P}_n[t]$  o conjunto de todos os polinômios reais de grau  $\leq n$ , isto é:

$$\mathbb{P}_n(t) = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n, \quad t \in \mathbb{R}\}$$

com coeficientes  $a_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , reais. Dados dois polinômios (vetores)

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \quad e \quad q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_nt^n,$$

definimos a soma  $p + q$  e o produto  $\lambda \cdot p$  pelas relações:

$$\text{SOMA:} \quad (p + q)(t) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) t^k = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n.$$

$$\text{PRODUTO:} \quad (\lambda \cdot p)(t) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k) t^k = \lambda a_0 + (\lambda a_1)t + \cdots + (\lambda a_n)t^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerando para vetor nulo  $\mathbf{0}$  o polinômio identicamente nulo:

$$\mathbf{0}(t) = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

temos  $\mathbf{0} + p = p$ ,  $\forall p \in \mathbb{P}_n(t)$ ; por outro lado, o simétrico do vetor  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$  é o vetor  $-p$ , definido por:

$$(-p)(t) = -a_0 + (-a_1)t + (-a_2)t^2 + \cdots + (-a_n)t^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

e temos  $p + (-p) = \mathbf{0}$ . Comprove que  $\mathbb{P}_n(t)$ , equipado das operações sugeridas, é de fato um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**EXEMPLO 5.1.5 (O Espaço  $\mathcal{F}$  de Funções Reais)** Seja  $X$  um subconjunto do corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais, por exemplo um intervalo  $[a, b]$ , e designemos por  $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$  o conjunto constituído de todas as funções reais  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , equipado das operações:

$$\text{SOMA:} \quad (f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{PRODUTO:} \quad (\lambda \cdot f)(t) = \lambda \cdot f(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considerando o vetor nulo  $\mathbf{0}$  como sendo a função identicamente nula  $f(t) = 0$ ,  $\forall t$ , e o simétrico do vetor  $g$  como sendo o vetor  $-g$ , definido por  $(-g)(t) = -g(t)$  é fácil verificar que o terno  $\{\mathcal{F}, +, \bullet\}$  é um espaço vetorial. Comprove!

**EXEMPLO 5.1.6 (O Produto Cartesiano  $U \times V$ )** Dados dois espaços vetoriais reais  $U$  e  $V$ , o produto cartesiano:

$$U \times V = \{(u, v) : u \in U \quad e \quad v \in V\}$$

com as operações usuais:

$$\text{SOMA:} \quad (u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \quad u_j \in U \quad e \quad v_j \in V, \quad j = 1, 2.$$

$$\text{PRODUTO:} \quad x \cdot (u, v) = (x \cdot u, x \cdot v), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in U \quad e \quad v \in V.$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Cada espaço vetorial possui o vetor nulo, que é único, e se  $\mathbf{0}_U$  e  $\mathbf{0}_V$  são os vetores nulos de  $U$  e  $V$ , respectivamente, o vetor nulo de  $U \times V$  é  $\mathbf{0} = (\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_V)$ . De fato, dados  $u \in U$  e  $v \in V$ , temos:

$$\mathbf{0} + (u, v) = (\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_V) + (u, v) = (\mathbf{0}_U + u, \mathbf{0}_V + v) = (u, v).$$

Normalmente, o vetor nulo de qualquer espaço vetorial é representado por  $\mathbf{0}$ . Agora, comprove as propriedades (EV1)-(EV8) e conclua que  $U \times V$ , com as operações sugeridas, é um espaço vetorial.

**OBSERVAÇÃO 5.1.7** É preciso ficar atento às operações de soma e produto por escalar. Se considerarmos o  $\mathbb{R}^3$  com as operações:

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (x', y', z') &= (x + x', y + y', z \cdot z') \quad e \\ \lambda \cdot (x, y, z) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \lambda \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

vemos que a propriedade (EV7) não é satisfeita para todos os vetores do  $\mathbb{R}^3$ . De fato, considerando os vetores  $u = (0, 0, 1)$ ,  $v = (0, 0, -1)$ , temos:

$$2 \cdot (u + v) = (0, 0, -2) \quad e \quad 2 \cdot u + 2 \cdot v = (0, 0, -4)$$

e, portanto,  $2 \cdot (u + v) \neq 2 \cdot u + 2 \cdot v$ . Assim, o  $\mathbb{R}^3$ , com as operações sugeridas, não é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

#### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.1

1. Com as operações usuais do  $\mathbb{R}^2$ , seria o conjunto  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ?
2. Seria o corpo  $\mathbb{Q}$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ? E o corpo  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$ ?
3. Em um espaço vetorial  $V$ , mostre que:
  - (a)  $-(-v) = v$ ,  $\forall v \in V$
  - (b) se  $u + v = u + w$ ,  $\forall u, v \in V$ , então  $v = w$ .
4. Dados  $u$  e  $v$  em um espaço vetorial  $V$ , mostre que existe um único  $w$  em  $V$ , tal que  $u + w = v$ .
5. Comprove as propriedades (EV1)-(EV8) para o produto cartesiano  $U \times V$  do Exemplo 5.1.6.
6. Seria o subconjunto  $S = \{p \in \mathbb{P}_2(t) : p'(1) = 0\}$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ?

## 5.2 O Espaço Vetorial $\mathcal{M}_{m \times n}$

Uma matriz real  $A$  de ordem  $m \times n$  (lê-se "m por n") é uma coleção de  $m \times n$  números reais  $a_{ij}$  dispostos em uma tabela com  $m$  linhas e  $n$  colunas, representada simbolicamente por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  ou  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ , onde os índices  $i$  e  $j$  são inteiros positivos,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , que determinam, nessa ordem, a posição *linha*  $\times$  *coluna* do *elemento* (ou *entrada*)  $a_{ij}$  na tabela. O conjunto de todas as matrizes reais  $m \times n$ , representado por  $\mathcal{M}_{m \times n}$ , será equipado com as operações usuais:

$$\text{SOMA:} \quad (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}.$$

$$\text{PRODUTO:} \quad x \cdot (a_{ij})_{m \times n} = (x \cdot a_{ij})_{m \times n}.$$

que tornam  $\mathcal{M}_{m \times n}$  um espaço vetorial, cujos elementos (vetores) são matrizes  $m \times n$  e o elemento neutro da soma (o vetor nulo) é a *matriz nula*  $m \times n$ , com todas as entradas iguais a zero, isto é:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

A  $i$ -ésima linha  $L_i$  e a  $j$ -ésima coluna  $C_j$  da matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  são matrizes  $1 \times n$  e  $m \times 1$ , dadas por:

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

e podem ser visualizadas como vetores do  $\mathbb{R}^n$  ( $n$ -upla) e do  $\mathbb{R}^m$  ( $m$ -upla), respectivamente.

**EXEMPLO 5.2.1** Deixe-nos considerar o espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  das matrizes reais  $2 \times 2$ , isto é:

$$\mathcal{M}_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

equipado com as operações usuais:

$$\text{SOMA:} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

$$\text{PRODUTO:} \quad x \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix}.$$

Comprove as propriedades (EV1)-(EV8), considerando que o vetor nulo de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  é:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**EXEMPLO 5.2.2** No espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 3}$ , das matrizes reais com 2 linhas e 3 colunas, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vetores (matrizes  $2 \times 3$ ):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então  $A - 3B + 2C$  é o vetor de  $\mathcal{M}_{2 \times 3}$ , dado por:

$$A - 3B + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

### 5.2.1 Outras Operações com Matrizes

Além das operações usuais de soma e produto por escalar que fazem de  $\mathcal{M}_{m \times n}$  um espaço vetorial, outras operações com matrizes são relevantes em álgebra linear.

#### ► PRODUTO MATRICIAL

Matrizes de mesma ordem sempre podem ser somadas, mas, nem sempre podem ser multiplicadas. Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{jk})$  duas matrizes de ordem  $m \times n$  e  $n \times p$ , respectivamente. O produto da matriz  $A$  pela matriz  $B$  é a matriz  $AB$ , de ordem  $m \times p$ , cuja entrada  $c_{ik}$ , que ocupa a posição  $(i, k)$ , é:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

O elemento  $c_{ik}$  da matriz  $AB$  é obtido efetuando o "produto" da  $i$ -ésima linha da matriz  $A$  pela  $j$ -ésima coluna da matriz  $B$ , como ilustra o esquema abaixo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

É oportuno ressaltar que o produto  $AB$  só é possível quando o número de colunas ( $n$ ) da matriz  $A$  for igual ao número de linhas ( $n$ ) da matriz  $B$ . Às vezes o produto  $AB$  é possível e o produto  $BA$  não. Quando as matrizes  $A$  e  $B$  forem quadradas (o número de linhas igual ao número de colunas) e de mesma ordem, os produtos  $AB$  e  $BA$  são possíveis, mas, não necessariamente iguais.

PROPRIEDADES DO PRODUTO MATRICIAL Admitindo que os produtos envolvidos sejam possíveis, temos as seguintes propriedades:

$$(P1) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C. \quad (\text{associativa})$$

$$(P2) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C. \quad (\text{distributiva})$$

$$(P3) \quad \lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{associativa})$$

► REDUÇÃO À FORMA ESCALONADA

Para ilustrar o processo de *Escalonamento*, deixe-nos consideremos a matriz  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e efetuem nas linhas de  $A$  as seguintes operações, sempre observando a matriz resultante:

(i) Permutar a linha  $L_1$  com a linha  $L_3$  ( $L_1 \leftrightarrow L_3$ ).

(ii) Permutar a linha  $L_2$  com a nova linha  $L_3$  ( $L_2 \leftrightarrow L_3$ ).

(iii) Multiplicar  $L_1$  por  $-1$  ( $L_1 \leftrightarrow -L_1$ ).

(iv) Multiplicar  $L_2$  por  $\frac{1}{2}$  ( $L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2$ ).

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que a matriz final tem o formato escada e, por isso, diremos que a matriz  $A$  foi reduzida à forma *escalonada*. Neste processo, as operações permitidas nas linhas da matriz são:

- Permutar duas linhas.  $(L_i \leftrightarrow L_k)$ .
- Multiplicar uma linha por uma constante  $\lambda \neq 0$ .  $(L_i \leftrightarrow \lambda L_i)$
- Adicionar a uma linha um múltiplo escalar de outra.  $(L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_k)$

Para reconhecer uma matriz na forma escalonada, veja se ela atende aos seguintes requisitos:

- As linhas nulas, caso exista alguma, ocorrem abaixo das linhas não nulas.
- O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a 1. Este é o elemento *pivô*.
- Uma coluna que contém o elemento pivô de alguma linha, conhecida por *coluna pivô*, tem os outros elementos iguais a zero.
- Se  $L_1, L_2, \dots, L_p$  são as linhas não nulas da matriz e o elemento pivô da linha  $L_i$  ocorre na coluna de ordem  $k_i$ , então  $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ .

A condição (d) impõe à matriz o formato *escada*; ela nos diz que o número de zeros precedendo o elemento pivô de uma linha aumenta linha após linha; das matrizes abaixo, apenas a matriz  $C$  está escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**EXEMPLO 5.2.3** Ao reduzir a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

à forma escalonada, encontramos a seguinte matriz equivalente:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**OBSERVAÇÃO** Ao escalonar uma matriz  $A$ , surge um novo *ente matemático*, denominado *posto da matriz*  $A$  e representado por  $p(A)$ , que é precisamente o número de linhas não nulas da matriz reduzida. A matriz  $A$  do Exemplo 5.2.3 tem posto  $p(A) = 2$ . Qual o posto da matriz identidade  $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$ , caracterizada por:  $a_{ii} = 1$  e  $a_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ ? Qual a importância de conhecermos o posto de uma matriz? Veja a discussão na Seção 5.2.4 sobre a resolução de sistemas lineares e tire suas conclusões.

► **INVERSÃO POR ESCALONAMENTO**

Uma classe importante de matrizes quadradas é aquela constituída das *matrizes invertíveis*. Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é invertível, ou tem inversa, quando existir uma matriz quadrada  $B$ , de mesma ordem, tal que  $AB = BA = I_n$ . Tal matriz  $B$ , quando existir, é única e é representada por  $A^{-1}$ . As matrizes invertíveis são precisamente aquelas com determinante não nulo e podemos usar o escalonamento para encontrar a inversa  $A^{-1}$ . O processo consiste em escalonar a matriz ampliada  $[A, I_n]$  para chegar à matriz  $[I_n, A^{-1}]$ .

**EXEMPLO 5.2.4** Como ilustração, vamos inverter a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz ampliada  $[A, I_3]$ , encontramos:

$$[A, I_3] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = [I_3, A^{-1}].$$

Logo, a inversa da matriz  $A$  é a matriz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e pode-se fazer a comprovação verificando que  $AA^{-1} = I_3$ .



### 5.2.2 Resolvendo Sistemas Lineares

Consideremos o sistema linear de  $m$  equações e  $n$  variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (5.3)$$

Associadas ao sistema (5.3) destacamos as seguintes matrizes:

(i) a *matriz dos coeficientes*  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ;

(ii) a *matriz das variáveis*  $X = (x_j)_{n \times 1}$ ;

(iii) a *matriz independente*  $B = (b_i)_{m \times 1}$ ;

(iv) a *matriz ampliada*  $\tilde{A} = [A, B]$  de ordem  $m \times (n + 1)$ , dada por:

$$[A, \mathbf{B}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Com a notação matricial, o sistema (5.3) se escreve sob a forma  $AX = B$  e quando escalonamos a matriz  $A$  encontramos um novo sistema, equivalente ao sistema original.

► USANDO O POSTO DA MATRIZ

Usaremos o posto das matrizes  $A$  e  $\tilde{A}$  para determinar a existência ou não de soluções do sistema (5.3).

Neste contexto, temos o seguinte resultado:

1. O sistema linear (5.3) admite solução se, e somente se, as matrizes  $A$  e  $\tilde{A}$  têm o mesmo posto. (recorde-se que o posto  $p(A)$  de uma matriz  $A$  é o número de linhas não nulas da matriz reduzida escalonada)
2. Se  $p(A) = p(\tilde{A}) = n$ , então a solução de (5.3) é única. ( $n$  é o número de variáveis)
3. Se  $p(A) = p(\tilde{A}) = p < n$ , então o sistema (5.3) tem uma infinidade de soluções e o *grau de liberdade* é  $n - p$ . Neste caso, podemos escolher  $n - p$  variáveis (*livres*) e expressar as outras  $p$  variáveis em função destas.

**EXEMPLO 5.2.5** Como primeiro exemplo, vamos considerar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \quad (5.4)$$

com duas equações ( $m = 2$ ) e três variáveis ( $n = 3$ ). Escalonando a matriz ampliada do sistema, encontramos:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e vemos que  $p(A) = p(\tilde{A}) = 2$ , de onde concluímos que o sistema tem uma infinidade de soluções e grau de liberdade igual 1. Escolhendo  $x$  como variável livre, obtemos  $y = x$  e  $z = x - 1$  e o conjunto-solução do sistema (5.4) é, portanto:

$$S = \{(x, x, 1 - x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

**EXEMPLO 5.2.6** Escalonando a matriz ampliada do sistema

$$\begin{cases} x - y + z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = -1 \end{cases} \quad (5.5)$$

encontramos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 3 & -3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

e vemos que  $p(A) = p(\tilde{A}) = 3$  e, sendo o número de variáveis  $n = 4$ , deduzimos que o sistema tem uma infinidade de soluções e grau de liberdade igual a 1. O sistema (5.5) é equivalente ao sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y - \frac{2}{3}t = -\frac{2}{3} \\ z - \frac{2}{3}t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

e escolhendo  $t$  como variável livre, obtemos  $x = -t$ ,  $y = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}$  e  $z = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$  e a cada valor atribuído à  $t$  encontramos uma solução do sistema. O conjunto-solução é:

$$S = \left\{ \left( -t, \frac{2t}{3} - \frac{2}{3}, \frac{2t}{3} + \frac{1}{3}, t \right) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**OBSERVAÇÃO 5.2.7** Como as matrizes  $A$  e  $\tilde{A}$  têm  $m$  linhas, deduzimos que  $p(A) \leq p(\tilde{A}) \leq m$  e, caso o número de variáveis  $n$  seja maior do que o número de equações  $m$ , então ou o sistema não tem solução ou ele tem uma infinidade de soluções, conforme seja  $p(A) < p(\tilde{A})$  ou  $p(A) = p(\tilde{A})$ .

**EXEMPLO 5.2.8 (Sistemas Lineares Homogêneos)** Um caso particular interessante ocorre quando a matriz independente  $B$  for zero (a matriz nula  $m \times 1$ ). Neste caso,  $X = \mathbf{0}$  é uma solução e, caso o sistema tenha uma infinidade de soluções, o conjunto  $\mathcal{S}$  de todas as soluções do sistema tem a seguinte propriedade: se  $X_1$  e  $X_2$  são soluções do sistema e  $\lambda$  é um escalar (número real), então  $\lambda \cdot X_1 + X_2$  também é solução. De fato, se  $X_1$  e  $X_2$  são soluções de  $AX = \mathbf{0}$ , então  $AX_1 = AX_2 = \mathbf{0}$  e assim:

$$A(\lambda \cdot X_1 + X_2) = \lambda \cdot (AX_1) + AX_2 = \lambda \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Logo,  $\lambda \cdot X_1 + X_2 \in \mathcal{S}$ , isto é,  $\lambda \cdot X_1 + X_2$  é solução. Neste caso, se  $p(A) = p(\tilde{A}) = n$ , então a única solução do sistema é  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ .

1. Calcule o produto  $AB$ , sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O produto  $BA$  é possível, nesse caso? Por quê? Dê exemplo de duas matrizes quadradas  $A$  e  $B$ , de ordem  $2 \times 2$ , tais que  $AB \neq BA$ .

2. **MATRIZ TRANSPOSTA** Dada uma  $m \times n$  matriz  $A = (a_{ij})$ , denomina-se *Transposta* de  $A$  à matriz  $A^t$ , de ordem  $n \times m$ , definida por  $A^t = (a_{ji})$ . Do ponto de vista prático, para determinar a transposta de uma dada matriz, permutamos linhas e colunas da matriz; é claro que  $(A^t)^t = A$ . Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

Em cada caso, encontre a matriz transposta:

$$(a) B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (b) C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3. Se  $A$  e  $B$  são matrizes de mesma ordem e  $x$  é um escalar, mostre que  $(xA + B)^t = xA^t + B^t$ . Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesma ordem, então  $(AB)^t = B^tA^t$ ; comprove no caso  $2 \times 2$ .

4. **O TRAÇO DE UMA MATRIZ** Dada uma quadrada  $A = (a_{ij})_{m \times m}$  o *Traço* da matriz  $A$ , representado por  $\text{tr}(A)$ , é o número real definido por  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^m a_{ii}$ . Em símbolos, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m \times m} \Rightarrow \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^m a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mm}.$$

(a) Determine os traços das matrizes  $B$  e  $C$  do Exercício 2.

(b) Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesma ordem e  $x$  é um escalar, mostre que:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B) \quad \text{(ii)} \quad \text{tr}(xA) = x \text{tr}(A) \\ \text{(iii)} & \text{tr}(A) = \text{tr}(A^t) \quad \text{(iv)} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA). \quad \text{(faça no caso } 2 \times 2) \end{array}$$

5. **MATRIZ SIMÉTRICA & MATRIZ ANTISSIMÉTRICA** Uma matriz quadrada  $A$  denomina-se *Simétrica* quando  $A = A^t$ . Se  $A = -A^t$ , diremos que a matriz  $A$  é *Antissimétrica*. Mostre que a matriz  $\frac{1}{2}(A + A^t)$  é simétrica e  $\frac{1}{2}(A - A^t)$  é antissimétrica e conclua que toda matriz quadrada se escreve como soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica. Qual a matriz que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica?

6. **MATRIZ IDENTIDADE** A matriz quadrada  $n \times n$ :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

em que os elementos diagonais são iguais a 1 e os demais são nulos, recebe o nome de *matriz identidade* de ordem  $n$ . A matriz  $I_n$  está escalonada?

- (a) Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , mostre que  $AI_n = I_n A = A$ . Isto nos diz que a matriz identidade  $I_n$  desempenha o papel do número 1 em um corpo numérico:  $1 \cdot x = x$ .
- (b) Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , determine a matriz quadrada  $B$  de ordem  $n = 2$ , tal que  $AB = BA = I_2$ . ( $B = A^{-1}$ )

7. **MATRIZ NILPOTENTE** Uma matriz quadrada  $A$ , não nula, diz-se *Nilpotente* quando existir um inteiro positivo  $k$ , denominado *Índice de Nilpotência*, tal que  $A^k = \mathbf{0}$ .

- (a) Construa duas matrizes nilpotentes de ordem  $2 \times 2$ .
- (b) Se  $k$  é o índice de nilpotência da matriz  $A$ , mostre que a matriz transposta  $A^t$  também é nilpotente, com índice  $k$ .
- (c) Se  $A$  é uma matriz  $2 \times 2$ , simétrica, com índice de nilpotência  $k = 2$ , mostre que  $A = \mathbf{0}$ .

### 5.3 Subespaços Vetoriais

Vimos no Exemplo 5.1.2 que um dado subconjunto  $S$  de um espaço vetorial  $V$ , pode ou não ser um espaço vetorial, com as operações herdadas de  $V$ . As propriedades (EV1)-(EV8) sendo válidas para os vetores de  $V$  serão, naturalmente, válidas para os vetores de  $S$  e para o subconjunto  $S$  ser um espaço vetorial, com as operações de soma ou produto por escalar herdadas de  $V$ , é necessário e suficiente que  $S$  seja não vazio e *fechado* com relação a essas operações, isto é:

$$S \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \lambda \cdot u + v \in S, \quad \forall u, v \in S, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

No caso em que o subconjunto não vazio  $S$  é, também, um espaço vetorial, diremos que  $S$  é um *Subespaço Vetorial* de  $V$ . É claro que  $S = \{\mathbf{0}\}$  e  $S = V$  são subespaços vetoriais de  $V$  (os *subespaços triviais* de  $V$ ) e um dado subconjunto não vazio  $S$  de  $V$  é um subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se:

- (i) o vetor nulo de  $V$  está em  $S$ , isto é,  $\mathbf{0} \in S$ .
- (ii) se  $u$  e  $v$  são vetores de  $S$ , então  $u + v$  está em  $S$ .
- (iii) se  $u$  está em  $S$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda \cdot u$  está em  $S$ .

As condições (i)–(iii) podem ser compactadas da seguinte forma:

**ATALHO:** Afim de que um subconjunto  $W$  de  $V$ , não vazio, seja um subespaço vetorial de  $V$  é necessário e suficiente que  $\lambda \cdot u + v$  esteja em  $W$ , sejam quais forem os vetores  $u$  e  $v$  de  $W$  e o escalar  $\lambda$ .

**EXEMPLO 5.3.1** O conjunto  $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$  ( $W$  é o eixo  $Ox$ ). Na verdade, além de  $W = \{\mathbf{0}\}$  e  $W = \mathbb{R}^2$  os demais subespaços do  $\mathbb{R}^2$  são as retas pela origem:  $W = \{(x, y) : y = ax\}$ .

**EXEMPLO 5.3.2** O conjunto  $W = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$  contém o vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0)$ , mas, não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$ . De fato, os vetores  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 4)$  pertencem a  $W$  e, contudo, a soma  $u + v = (3, 5)$  não pertence a  $W$ .

**EXEMPLO 5.3.3** Por que o subconjunto  $S = \{(a_{ij})_{2 \times 2} \in \mathcal{M}_{2 \times 2} : a_{11} + a_{22} = 1\}$  não é um subespaço vetorial de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ ? O vetor nulo (a matriz nula  $2 \times 2$ ) não está no subconjunto  $S$  e isto é suficiente para deduzir que  $S$  não é um subespaço vetorial de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ .

**EXEMPLO 5.3.4** O subconjunto  $S = \{X = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2 \times 2} : \det X = 0\}$  não é um subespaço vetorial de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ . De fato, embora os vetores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

estejam em  $S$ , a soma  $A + B = I_2$  não está em  $S$ , porque  $\det(A + B) = 1$ .

**EXEMPLO 5.3.5** O subconjunto  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0\}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^4$ . De fato, dados  $u = (x, y, z, t)$ ,  $v = (x', y', z', t')$  em  $W$  e um escalar  $\lambda$ , notamos que:

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$$

pertence a  $W$ , porque:

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda t + t') = \underbrace{\lambda(x + y + t)}_{= 0} + \underbrace{(x' + y' + t')}_{= 0} = 0.$$

**EXEMPLO 5.3.6** No Exemplo 5.2.8 verificamos que o conjunto  $S$  das soluções do sistema linear homogêneo  $AX = \mathbf{0}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^n$ . No caso em que  $p(A) = p(\tilde{A}) = n$ , o subespaço  $S$  se reduz ao subespaço nulo  $S = \{\mathbf{0}\}$ .

1. Por que o subconjunto  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$  não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ ?
2. Mostre que o conjunto  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$ . Observe que  $W$  é uma reta que passa pela origem (passar pela origem significa  $\mathbf{0} \in W$ ). Como vimos no Exemplo 5.3.1, os subespaços do  $\mathbb{R}^2$  são precisamente  $W = \{\mathbf{0}\}$ ,  $W = \mathbb{R}^2$  e as retas que passam pela origem. Descreva todos os subespaços do  $\mathbb{R}^3$ .
3. Mostre  $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ .
4. Seria  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ ? Por quê?
5. **OPERAÇÕES COM SUBESPAÇOS** Se  $W_1$  e  $W_2$  são subespaços vetoriais de  $V$ , mostre que:
  - (a) A interseção  $W_1 \cap W_2$  é um subespaço vetorial de  $V$ .
  - (b) A soma  $W_1 + W_2 = \{u + v : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$  é um subespaço vetorial de  $V$ .
  - (c) O produto  $W_1 \times W_2 = \{(u, v) : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$  é um subespaço vetorial de  $V \times V$ .
  - (d) Mostre, com um exemplo, que a união  $W_1 \cup W_2$  pode não ser um subespaço vetorial de  $V$ .
6. Mostre que  $W = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n} : \text{tr}(A) = 0\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{M}_{n \times n}$ .
7. Mostre que os subconjuntos das matrizes simétricas e das matrizes antissimétricas são subespaços vetoriais do espaço  $\mathcal{M}_{n \times n}$  das matrizes quadradas. Veja o Exercício 5 da Seção Escrevendo para Aprender 5.2.
8. Seja  $W$  o subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  dado por  $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & x + 2y \\ 0 & x - y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ . Qual dos vetores  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ou  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  pertence a  $W$ ?
9. Mostre que  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)(y - 1) = 1\}$  não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$ .
10. Mostre que  $W = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 2p(1)\}$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{P}_3$ .

### 5.3.1 Conjunto Gerador de um Subespaço

No espaço  $\mathbb{R}^3$  o plano gerado pelos vetores  $u = (1, -1, 0)$  e  $v = (0, -1, 1)$  é o subespaço vetorial:

$$W = \{w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

o qual é caracterizado por:

$$w \in W \Leftrightarrow w = t \cdot u + s \cdot v, \quad s, t \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

A expressão  $t \cdot u + s \cdot v$  que aparece em (5.6) é conhecida por *Combinação Linear* dos vetores  $u$  e  $v$  e normalmente dizemos que o plano gerado pelos vetores  $u$  e  $v$  é constituído das combinações lineares desses vetores.

Fixemos um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Dados os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $V$ , a expressão

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n,$$

onde os coeficientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  estão no corpo  $\mathbb{F}$ , recebe o nome de *combinação linear* dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . O conjunto de todas as combinações lineares de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  será representado por  $[v_1, v_2, \dots, v_n]$ , isto é:

$$[v_1, v_2, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i, \quad x_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}. \quad (5.7)$$

**LEMA 5.3.7** *O conjunto  $W = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  definido em (5.7) é de fato um subespaço vetorial de  $V$ , denominado **Subespaço Gerado** por  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .*

**Demonstração:** É claro que  $\mathbf{0} \in W$ , porque  $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$ , e dados  $u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  e  $v = \sum_{i=1}^n y_i v_i$  no conjunto  $S$  e um escalar  $\lambda$ , um cálculo direto nos dá:

$$\lambda \cdot u + v = \lambda \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^n y_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) \cdot v_i \quad (5.8)$$

e vemos em (5.8) o vetor  $\lambda \cdot u + v$  escrito como combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e isto nos diz que  $\lambda \cdot u + v \in W$ . ■

Não devemos confundir o subconjunto  $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $n$  elementos (vetores) com o subespaço  $W = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  constituído de todas as combinações lineares  $x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n$  dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  e, portanto, com uma infinidade de elementos.



**EXEMPLO 5.3.8** É claro que os vetores  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$  geram o espaço  $\mathbb{R}^3$ , tendo em vista que:

$$(x, y, z) = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3.$$

Já o conjunto  $\mathcal{G} = \{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$  gera o espaço  $\mathbb{P}_n$  dos polinômios de grau  $\leq n$ .

**EXEMPLO 5.3.9** Se  $W$  é o subespaço do  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $u = (1, -1, 0)$  e  $v = (1, 1, 2)$ , então dado um vetor  $w = (x, y, z)$  de  $W$ , existem escalares  $s$  e  $t$ , tais que:

$$(x, y, z) = t \cdot (1, -1, 0) + s \cdot (1, 1, 2) = (t + s, t - s, 2s) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + s \\ y = t - s \\ z = 2s \end{cases}$$

de onde resulta que  $z = x + y$ . Assim, o subespaço  $W$  é o plano  $z = x + y$  gerado por  $u$  e  $v$ :

$$W = [u, v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$

**EXEMPLO 5.3.10** Seja  $W = [v_1, v_2]$  o subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  é um vetor de  $W$ , então  $a_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ , e daí segue que  $W$  é o subespaço das matrizes diagonais  $2 \times 2$ . Uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})$  diz-se **matriz diagonal** se  $a_{ij} = 0$ , com  $i \neq j$ .

**EXEMPLO 5.3.11** Para expressar o polinômio  $p(t) = -3t + 2t^2$  como combinação linear dos polinômios:

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t \quad e \quad p_3(t) = t - t^2$$

procuramos escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tais que:

$$-3t + 2t^2 = x \cdot 1 + y \cdot (1 + t) + z \cdot (t - t^2), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

A equação polinomial (5.9) é equivalente a:

$$0 - 3t + 2t^2 = x + y + (y + z)t - zt^2$$

e igualando os coeficientes, encontramos:

$$x + y = 0, \quad y + z = -3 \quad e \quad z = -2$$

e, por conseguinte,  $x = 1$ ,  $y = -1$  e  $z = -2$ . Logo,  $p = p_1 - p_2 - 2p_3$  e com isto mostramos que o polinômio (vetor)  $p(t) = -3t + 2t^2$  jaz no subespaço de  $\mathbb{P}_2[t]$  gerado pelos vetores  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ , isto é:

$$-3t + 2t^2 \in [1, 1 + t, t - t^2].$$

**EXEMPLO 5.3.12 (Encontrando um Conjunto Gerador)** Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^4$ , dado por:

$$W = \{(x - y, y + z, 0, x - 2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para construir um conjunto de geradores de  $W$ , expressamos um vetor genérico  $v = (x - y, y + z, 0, x - 2z)$  de  $W$  sob a forma:

$$\begin{aligned} v &= (x - y, y + z, 0, x - 2z) \\ &= x(1, 0, 0, 1) + y(-1, 1, 0, 0) + z(0, 1, 0, -2) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3 \end{aligned}$$

sendo  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (-1, 1, 0, 0)$  e  $v_3 = (0, 1, 0, -2)$ . Dessa forma, identificamos  $\{v_1, v_2, v_3\}$  como sendo um conjunto de geradores de  $W$ , isto é:

$$W = [(1, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -2)]$$

**EXEMPLO 5.3.13** Identifiquemos o subespaço  $W$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um vetor genérico  $v = (a_{ij})_{2 \times 2}$  de  $W$  é da forma:

$$v = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

onde vemos que  $a_{12} = a_{21}$  e, portanto,  $v$  é uma matriz simétrica. Logo,  $W$  é o subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  das matrizes simétricas.

**EXEMPLO 5.3.14 (Um conjunto gerador de  $W_1 + W_2$ )** Sejam  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços do espaço vetorial  $V$ , gerados por  $\mathcal{G}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  e  $\mathcal{G}_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , respectivamente. O subconjunto

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

é um conjunto gerador do subespaço  $W_1 + W_2$ . De fato, um dado vetor  $w$  de  $W_1 + W_2$  é da forma:

$$w = u + v, \quad \text{com } u \in W_1 \text{ e } v \in W_2$$

e, sendo assim:

$$w = \sum_{i=1}^k x_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^n y_j \cdot v_j$$

onde vemos  $w$  escrito como combinação linear dos vetores de  $\mathcal{G}$ .

1. Expresse o vetor  $v = (1, 1, 2, -1)$  como combinação linear dos vetores

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 0, 0, 1).$$

2. Identifique o subespaço  $W$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Em cada caso, identifique o subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^3$  gerado pelo conjunto  $\mathcal{G}$  sugerido.

(a)  $\mathcal{G} = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$  e (b)  $\mathcal{G} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$ .

4. Encontre um conjunto gerador do subespaço:  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ .

5. Repita o exercício precedente com o subespaço do  $\mathbb{R}^4$ :  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - t = 0\}$ .

6. Verifique que os vetores  $1, 1 - t, (1 - t)^2$  e  $(1 - t)^3$  geram o espaço  $\mathbb{P}_3$ .

7. Se o conjunto  $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  gera um espaço vetorial  $V$  e um dos vetores de  $\mathcal{G}$ , digamos  $v_1$ , é combinação linear dos demais, mostre que  $\{v_2, \dots, v_k\}$  ainda gera o espaço  $V$ . Este processo de eliminação da dependência linear entre os geradores nos conduz a um conjunto gerador *minimal*.

8. Seja  $W$  o subespaço de  $\mathcal{M}_{3 \times 2}$  gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique se o vetor  $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  pertence ou não ao subespaço  $W$ .

9. Seja  $W = [v_1, v_2, v_3]$  o subespaço do  $\mathbb{R}^3$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = (2, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 0, 1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 1, 1).$$

- (a) Determine o valor de  $\lambda$  para que o vetor  $u = (\lambda, 2, -2\lambda)$  pertença ao subespaço  $W$ .
- (b) O vetor  $v = (-1, 2, -2)$  jaz no subespaço  $W$ ?

10. Verifique que:

$$[(-1, 1, 1), (0, 1, -1), (2, -1, 3)] = [(2, 0, -4), (0, 2, -2)].$$

11. Se  $W = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , encontre dois subespaços  $W_1$  e  $W_2$  do  $\mathbb{R}^3$ , não triviais, tais que:

$$W = W_1 + W_2.$$

### 5.3.2 Soma Direta

No Exercício 5 da seção Escrevendo para Aprender 5.3, apresentamos a interseção e a soma de dois subespaços  $W_1$  e  $W_2$  de um dado espaço vetorial  $V$ . A soma  $W_1 + W_2$  pode coincidir com o espaço inteiro  $V$ , mas, pode ser um subespaço próprio de  $V$ ; quanto à interseção  $W_1 \cap W_2$ , esta pode se reduzir ao vetor nulo, como ocorre no caso em que  $W_1$  é o eixo  $x$  e  $W_2$  é o eixo  $y$ , mas, pode ser  $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ . Quando  $V = W_1 + W_2$  e, além disso,  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ , diremos que  $V$  é *Soma Direta* de  $W_1$  e  $W_2$  e anotamos  $V = W_1 \oplus W_2$ .

**EXEMPLO 5.3.15** *O espaço  $\mathbb{R}^2$  se decompõe em soma direta dos subespaços:*

$$W_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad e \quad W_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\},$$

*isto é,  $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ . De fato, tendo em vista que  $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ , obtemos  $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$  e, como é óbvio,  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ .* *( $W_1$  é o eixo  $x$  e  $W_2$  é o eixo  $y$ )*

**EXEMPLO 5.3.16** *Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^3$ :*

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad e \quad W_2 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

*Temos que  $W_1$  é o plano  $xy$  e  $W_2$  é o plano  $x = y$ , ilustrados na Figura 5. - 1, e a interseção  $W_1 \cap W_2$  é a reta do  $\mathbb{R}^3$  gerada pelo vetor  $v = (1, 1, 0)$ , isto é,  $W_1 \cap W_2 = [(1, 1, 0)]$ . Neste caso,  $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ , mas, a soma não é direta, porque  $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ .*

Finalizamos esta seção com uma caracterização da soma direta.

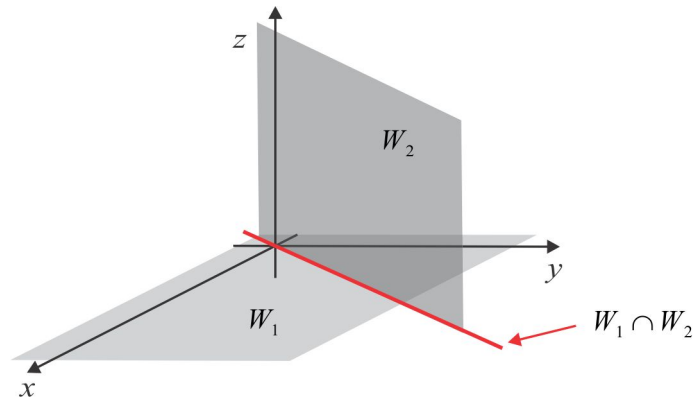


Figura 5.-1:  $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$  e  $W_1 \cap W_2 = [(1, 1, 0)]$ .

**LEMA 5.3.17** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(A)  $V = W_1 \oplus W_2$ .

(B) *Todo vetor de  $V$  se expressa de modo único sob a forma  $v = w_1 + w_2$ , com  $w_1 \in W_1$  e  $w_2 \in W_2$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $V = W_1 \oplus W_2$ , e que um dado vetor  $v$  tenha duas representações:

$$v = w_1 + w_2 \quad \text{e} \quad v = w'_1 + w'_2, \quad \text{com} \quad w_1, w'_1 \in W_1 \quad \text{e} \quad w_2, w'_2 \in W_2.$$

Então,  $w_1 - w'_1 = w_2 - w'_2 \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  e daí resulta  $w_1 = w'_1$  e  $w_2 = w'_2$  e temos a unicidade da representação. Reciprocamente, seja  $v \in W_1 \cap W_2$  e suponhamos válida a unicidade de representação  $v = w_1 + w_2$ , com  $w_1 \in W_1$  e  $w_2 \in W_2$ . Temos, pela unicidade:

$$v = v + \mathbf{0} = w_1 + w_2 \Rightarrow w_1 = v \quad \text{e} \quad w_2 = \mathbf{0}$$

$$v = \mathbf{0} + v = w_1 + w_2 \Rightarrow w_1 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad w_2 = v$$

e, assim,  $w_1 = w_2 = \mathbf{0}$  e  $v = \mathbf{0}$ . Logo,  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  e a soma é direta. ■

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.5

---

1. Encontre dois subespaços  $W_1$  e  $W_2$  do  $\mathbb{R}^3$ , tais que  $\dim W_1 = 1$ ,  $\dim W_2 = 2$  e  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ .
2. **DECOMPONDO O ESPAÇO DE MATRIZES** Decomponha o espaço das matrizes reais  $\mathcal{M}_{n \times n}$  como soma direta de dois subespaços não nulos  $W_1$  e  $W_2$ . (veja o Exercício 5 da Seção 5.2)

3. **DECOMPONDO O ESPAÇO DE FUNÇÕES** Uma função  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  denomina-se *Função Par* quando  $f(x) = f(-x)$ , seja qual for o  $x$  do intervalo  $[-a, a]$ . Quando ocorrer  $f(x) = -f(-x)$ , para todo  $x$  do intervalo  $[-a, a]$ , a função  $f$  denominar-se-á *Função Ímpar*. Seja  $\mathcal{F}([-a, a])$  o espaço de todas as funções reais  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (a) Mostre que o conjunto das funções pares  $\mathcal{F}_P$  é um subespaço vetorial de  $\mathcal{F}([-a, a])$ . Idem para o conjunto das funções ímpares  $\mathcal{F}_I$ .
- (b) Identifique o subespaço  $\mathcal{F}_P \cap \mathcal{F}_I$ .
- (c) Mostre que toda função  $f$  do espaço  $\mathcal{F}([-a, a])$  se escreve como soma de uma função par com uma função ímpar.
- (d) É verdade que  $\mathcal{F}([-a, a]) = \mathcal{F}_P \oplus \mathcal{F}_I$ ?
4. Mostre que  $\mathbb{R}^3 = [(1, 0, 0)] \oplus [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)]$ .
5. No espaço  $\mathbb{R}^3$ , selecione três subespaços vetoriais  $W_1, W_2$  e  $W_3$ , com  $W_1 \neq W_2$ , tais que:

$$W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3.$$

A *Lei do Cancelamento* é válida para soma direta?

6. Se  $W = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , encontre dois subespaços  $U_1$  e  $U_2$  do  $\mathbb{R}^3$ , com  $U_1 \neq U_2$  e  $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ .
7. Uma matriz  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  diz-se *Triangular Superior* se  $a_{ij} = 0$ , para  $i > j$ , isto é, os elementos abaixo da diagonal são nulos; se  $a_{ij} = 0$ , para  $i < j$ , a matriz  $A$  diz-se *Triangular Inferior*. Considere os subespaços  $W_1$  e  $W_2$  constituídos, respectivamente, das matrizes  $n \times n$  triangular superior e triangular inferior. Mostre que:

$$\mathcal{M}_{n \times n} = W_1 + W_2.$$

Quando é que a soma é direta?

8. O espaço vetorial  $V$  é soma direta dos subespaços  $W_1, W_2$  e  $W_3$ , isto é,  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ , se:
- (i)  $V = W_1 + W_2 + W_3$ .
- (ii) A interseção de qualquer um dos subespaços com os outros dois é  $\{\mathbf{0}\}$ .

Se  $W_1, W_2$  e  $W_3$  são, respectivamente, os eixos  $Ox, Oy$  e  $Oz$ , mostre que  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ .

## 5.4 Base & Dimensão

Recordemos que no espaço  $\mathbb{R}^3$  os vetores  $\vec{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  e  $\vec{k} = (0, 0, 1)$  são não coplanares e geram o espaço  $\mathbb{R}^3$ , no seguinte sentido: todo vetor do  $\mathbb{R}^3$  se expressa de modo único como combinação linear dos vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ . O conjunto  $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  recebeu a denominação de *Base Canônica* do  $\mathbb{R}^3$  e essa noção se generaliza naturalmente para o espaço  $\mathbb{R}^n$  considerando os  $n$  vetores:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1). \quad (5.10)$$

Os vetores definidos em (5.10) possuem as mesmas características dos vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$ , isto é:

(i) **São vetores LI:** A única solução da equação vetorial:

$$x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

$$\text{é } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

(ii) **Geram o  $\mathbb{R}^n$ :** Todo vetor  $v$  do  $\mathbb{R}^n$  se expressa como combinação linear dos vetores  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ .

De fato, dado  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , temos:

$$v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

**DEFINIÇÃO 5.4.1** Em um espaço vetorial  $V$  diremos que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são *LI* (Linearmente Independentes) quando a equação vetorial

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

possuir apenas a solução nula  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Quando  $v_1, v_2, \dots, v_n$  não forem *LI*, eles serão denominados *LD* (Linearmente Dependentes). Neste caso, ao menos um dos coeficientes  $x_k$  da equação vetorial (5.11) é diferente de zero.

**EXEMPLO 5.4.2** No espaço  $\mathbb{R}^4$  os vetores  $v_1 = (1, -1, 0, 0)$  e  $v_2 = (0, -1, 2, 1)$  são *LI*. De fato, a equação (5.11), neste caso, se reduz a:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 (1, -1, 0, 0) + x_2 (0, -1, 2, 1) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow (x_1, -x_1 - x_2, 2x_2, x_2) = (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

e da última equação, segue que  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ .

**EXEMPLO 5.4.3** No espaço  $\mathbb{P}_3$ , dos polinômios de grau  $\leq 3$ , os vetores  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = t$ ,  $v_3 = 1 + t^2$  e  $v_4 = t - t^3$  são LI. De fato, considerando que o vetor nulo do espaço  $\mathbb{P}_3$  é o polinômio identicamente nulo  $\mathbf{0} = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$ , encontramos:

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot (1 + t^2) + x_4 \cdot (t - t^3) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 + x_3 + (x_2 + x_4)t + x_3 t^2 - x_4 t^3 = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos:  $x_1 + x_3 = 0$ ,  $x_2 + x_4 = 0$ ,  $x_3 = 0$  e  $x_4 = 0$  e daí resulta  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ .

**EXEMPLO 5.4.4** No espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , das matrizes quadradas  $2 \times 2$ , os vetores:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad w = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

são LD. Com efeito, se  $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = \mathbf{0}$ , então:

$$\begin{pmatrix} x - 2y - z & x + y + 2z \\ -x - z & 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e chegamos ao sistema linear homogêneo:

$$\left| \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{array} \right.$$

cujos espaço solução é  $S = \{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ . Por exemplo,  $x = 1$ ,  $y = 1$  e  $z = -1$  nos dá uma solução não nula da equação vetorial  $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = \mathbf{0}$ .

**EXEMPLO 5.4.5** No espaço  $\mathbb{R}^n$ , para que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sejam LI é necessário e suficiente que a  $n \times n$  matriz  $A$  com colunas  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tenha posto  $p(A) = n$ . O sistema linear homogêneo decorrente de (5.11) tem solução única  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{0}$ , isto é,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

Antes de formalizar os conceitos de *Base e Dimensão* de um espaço vetorial, estabeleceremos alguns resultados preliminares, em forma de Lemas, que darão consistência aos conceitos. No que se segue,  $V$  representa um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .



**LEMA 5.4.6** *Todo subconjunto  $S$  de  $V$  contendo o vetor nulo é um subconjunto LD (de vetores LD).*

**Prova:** Se  $S = \{\mathbf{0}, v_1, v_2, \dots, v_n\}$  temos a equação (5.11) atendida:

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0},$$

com um dos escalares (o número 1) não nulo. ■

**LEMA 5.4.7** *A fim de que  $n$  vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sejam LD é necessário e suficiente que um deles seja combinação linear dos demais.*

**Prova:** Se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD, existem escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , com ao menos um deles, digamos  $x_k$ , não nulo e tais que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k + \dots + x_n v_n = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Resolvendo (5.12), encontramos:

$$v_k = \left(\frac{x_1}{x_k}\right) v_1 + \left(\frac{x_2}{x_k}\right) v_2 + \dots + \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right) v_{k-1} + \left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) v_{k+1} + \dots + \left(\frac{x_n}{x_k}\right) v_n$$

onde vemos o vetor  $v_k$  como combinação linear dos demais. Reciprocamente, se um dos vetores, digamos  $v_1$ , é combinação linear dos demais, então  $v_1 = x_2 v_2 + x_3 v_3 + \dots + x_n v_n$  e temos:

$$(-1) v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \mathbf{0}$$

onde vemos uma combinação linear nula dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , com um dos coeficientes (o primeiro) não nulo. Isto nos diz que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD. ■

**LEMA 5.4.8** *Se  $S$  é um conjunto LI (de vetores LI), então qualquer subconjunto de  $S$  também o é.*

**Prova:** Seja  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  um conjunto LI e seja  $S^* = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ ,  $k < n$ , uma parte do conjunto  $S$ . Para mostrar  $S^*$  é um conjunto LI, basta observar que:

$$x_1 v_{i_1} + x_2 v_{i_2} + \dots + x_k v_{i_k} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 v_{i_1} + x_2 v_{i_2} + \dots + x_k v_{i_k} + 0 \cdot v_{i_{k+1}} + \dots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}$$

e como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LI, deduzimos que  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ . ■

**LEMA 5.4.9** *Se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são vetores LI e  $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n$ , então os escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são únicos. Em outras palavras, a forma de expressar um vetor como combinação linear de vetores LI é única.*

**Prova:** Basta observar que:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n &= y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \cdots + y_n \cdot v_n \\ \Leftrightarrow (x_1 - y_1) \cdot v_1 + (x_2 - y_2) \cdot v_2 + \cdots + (x_n - y_n) \cdot v_n &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots + x_n - y_n &= 0 \end{aligned}$$

e daí resulta  $x_j = y_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  e, por conseguinte, a unicidade da representação. ■

► **SOBRE BASE & DIMENSÃO** Um conjunto  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de vetores LI, que geram o espaço  $V$ , é denominado *Base* de  $V$ . Neste caso, todo vetor de  $V$  se expressa, de maneira única, como combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Ao expressar  $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$ , os escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as coordenadas do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$  e anota-se:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad \text{ou} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \left( x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n \right)_{1 \times n}.$$

Para associar ao espaço vetorial  $V$  uma dimensão, ressaltamos que qualquer base do espaço  $V$  tem o mesmo número de vetores e esse número é o que denominamos *Dimensão* do espaço  $V$ , anotado  $\dim V$ . Por exemplo, o espaço  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão  $n$ , tendo em vista que o conjunto de vetores  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ , definidos em (5.10), é uma base do  $\mathbb{R}^n$ ; no espaço  $\mathbb{P}_{\infty}(t)$  de todos os polinômios reais (de qualquer grau) o conjunto

$$\mathcal{B}_k = \{1, t, t^2, \dots, t^k\}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

é um conjunto LI, mas não é um conjunto gerador de  $\mathbb{P}(t)$ . Note que o vetor  $p(t) = t^{k+1}$  não é combinação linear dos vetores de  $\mathcal{B}_k$ . Uma base de  $\mathbb{P}(t)$  é o conjunto:

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, \dots, t^k, \dots\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$$

com uma infinidade de vetores e, portanto,  $\dim \mathbb{P}_{\infty}(t) = \infty$ .

Na sequência, apresentamos alguns corolários de suma importância para o restante do capítulo.

**COROLÁRIO 5.4.10** *De um conjunto gerador  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  do espaço  $V$  pode-se extrair uma base de  $V$ .*

**Prova:** Se os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LI, nada há a provar! Se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD, um dos vetores, digamos  $v_n$ , é combinação linear de  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  e o conjunto  $S_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  ainda gera o espaço  $V$ . Repetindo esse processo um número finito de vezes, sacamos do conjunto  $S$  todos os vetores que são combinações lineares dos demais restando apenas  $v_1, v_2, \dots, v_k$  vetores LI que geram  $V$ . ■

**COROLÁRIO 5.4.11** *Se  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto gerador do espaço  $V$ , então qualquer subconjunto de  $V$  com  $n + 1$  vetores é um conjunto LD.*

**Prova:** Seja  $\mathcal{B} = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ ,  $k \leq n$ , uma base de  $V$  extraída do conjunto gerador  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e mostremos que se  $m > n$ , então  $m$  vetores  $u_1, u_2, \dots, u_n, u_m$  de  $V$  são LD. De fato, sendo  $\mathcal{B}$  um conjunto gerador, existem escalares  $a_{ij}$ , tais que:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_{i_1} + a_{12}v_{i_2} + \dots + a_{1k}v_{i_k} \\ u_2 &= a_{21}v_{i_1} + a_{22}v_{i_2} + \dots + a_{2k}v_{i_k} \\ &\vdots \\ u_m &= a_{m1}v_{i_1} + a_{m2}v_{i_2} + \dots + a_{mk}v_{i_k} \end{aligned}$$

e a combinação linear nula:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_mu_m = \mathbf{0}$$

nos conduz ao sistema linear homogêneo  $AX = \mathbf{0}$ , com  $A = (a_{ij})_{m \times k}$ , de  $k$  equações e  $m$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_m$  e sendo  $k < m$  o sistema possui uma infinidade de soluções e, claro, dentre elas uma solução não nula. ■

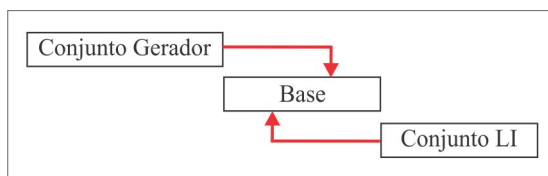
**COROLÁRIO 5.4.12** *Um subconjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de vetores LI de  $V$  pode ser completado a uma base de  $V$ . Uma base é um conjunto LI maximal!*

**Prova:** Suponhamos  $\dim V = n$ , de modo que  $k \leq n$ . Do Corolário 5.4.10 deduzimos que:

(a) se  $v_1, v_2, \dots, v_k$  geram  $V$  então  $k = n$  e  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  é uma base de  $V$ .

(b) se  $V$  não é gerado por  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ , existe em  $V$  um vetor  $v_{k+1}$  fora do subespaço  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  e, portanto, os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$  são LI. Repetimos o processo para encontrar  $v_{k+2}, \dots, v_n$ , tais que  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$  é um conjunto gerador de vetores LI de  $V$ . ■

**COROLÁRIO 5.4.13** *Se uma base de  $V$  tem  $n$  vetores, qualquer outra base também tem  $n$  vetores. O número  $n$  de vetores de uma base de  $V$  recebe o nome de dimensão de  $V$  e anota-se  $n = \dim V$ .*

Figura 5.0: Gerador  $\times$  LI

**Prova:** Sejam  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  duas bases de  $V$ . Se  $k > n$ , pelo Corolário 5.4.11 os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  seriam LD o que não é possível, tendo em vista que  $\mathcal{B}'$  é uma base. Da mesma forma, não pode ocorrer  $n < k$ . ■

**COROLÁRIO 5.4.14** Se  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$  e  $\dim V < \infty$ , então  $\dim W \leq \dim V$  e:

$$\dim W = 0 \Leftrightarrow W = \{\mathbf{0}\} \quad e \quad \dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V.$$

**Prova:** Seja  $n = \dim V$  e  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Como  $W \subset V$ , segue que  $\mathcal{B}$  gera o subespaço  $W$  e uma base de  $W$  pode ser extraída de  $\mathcal{B}$ . Daí resulta  $\dim W \leq n$ . ■

**COROLÁRIO 5.4.15** Se  $\dim V = n$ , então:

- (a) qualquer subconjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  com  $n$  vetores LI é uma base de  $V$ ;
- (b) qualquer subconjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  com  $n$  geradores de  $V$  é uma base de  $V$ .

**Prova:**

(a) Se o conjunto LI  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  não fosse base de  $V$ , poderia ser completado a uma base e teríamos  $\dim V > n$ , contradizendo a hipótese.

(b) Se o conjunto gerador  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  não fosse base de  $V$ , dele poderia ser extraída uma base e teríamos  $\dim V < n$ , contradizendo a hipótese. ■

**EXEMPLO 5.4.16** Os vetores  $v_1 = (1, 1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, -2, 1, 1)$  e  $v_3 = (2, -1, 1, 1)$  não geram o espaço  $\mathbb{R}^4$ , embora sejam LI. Um conjunto de geradores do  $\mathbb{R}^4$  deve conter, no mínimo, quatro vetores, porque  $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ . Os vetores  $u_1 = (1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 0, 2)$  e  $u_4 = (1, 1, 1)$  geram o  $\mathbb{R}^3$ , mas, não são LI, porque  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ .

**EXEMPLO 5.4.17** Dada uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  do espaço  $\mathbb{R}^4$ , consideremos os seguintes subespaços:

$$W_0 = \{\mathbf{0}\}, \quad W_1 = [v_1], \quad W_2 = [v_1, v_2], \quad W_3 = [v_1, v_2, v_3] \quad e \quad W_4 = [v_1, v_2, v_3, v_4].$$

Temos  $\dim W_0 = 0$ ,  $\dim W_1 = 1$ ,  $\dim W_2 = 2$ ,  $\dim W_3 = 3$  e  $\dim W_4 = 4$ , com a cadeia de inclusões:

$$\{\mathbf{0}\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 = \mathbb{R}^4.$$

**EXEMPLO 5.4.18** Encontrar uma base do subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^4$ , dado por:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y \text{ e } z = t\}.$$

**Solução:** Um vetor genérico  $v = (x, x, z, z)$  de  $W$  pode se expressar sob a forma:

$$v = x \cdot (1, 1, 0, 0) + z \cdot (0, 0, 1, 1)$$

e isto nos diz que os vetores  $v_1 = (1, 1, 0, 0)$  e  $v_2 = (0, 0, 1, 1)$  geram o subespaço  $W$  e sendo  $v_1$  e  $v_2$  vetores LI, deduzimos que  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  é uma base de  $W$  e  $\dim W = 2$ . Para construir uma base do  $\mathbb{R}^4$  a partir dos vetores  $v_1$  e  $v_2$ , consideramos dois vetores  $v_3$  e  $v_4$ , de modo  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$  sejam LI e isto ocorre se, e somente se, a matriz  $A$  com colunas  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$  é tal que  $\det A \neq 0$ . Podemos escolher, por exemplo,  $v_3 = (1, 0, 0, 0)$  e  $v_4 = (0, 0, 0, 1)$  e temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{com } \det A = 1.$$

**EXEMPLO 5.4.19** Encontrar uma base e a dimensão do subespaço  $W_1 \cap W_2$ , sendo  $W_1$  e  $W_2$  os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^4$ :

$$W_1 = \{(x, x, y, y) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + 2t = 0\}.$$

**Solução:** O subespaço  $W_1 \cap W_2$  é dado por:

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y, z = t \text{ e } x - y - z + 2t = 0\}$$

e um vetor genérico de  $W_1 \cap W_2$  é, portanto:

$$v = (x, x, 0, 0) = x \cdot (1, 1, 0, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

de onde resulta que  $v_1 = (1, 1, 0, 0)$  é um gerador LI de  $W_1 \cap W_2$ . Logo,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0)\}$  é uma base de  $W_1 \cap W_2$  e  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ .

**EXEMPLO 5.4.20** *Sejam  $\mathcal{M}_S$  e  $\mathcal{M}_A$  os subespaços de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  das matrizes simétricas e antissimétricas, respectivamente. Encontrar bases de  $\mathcal{M}_S$  e  $\mathcal{M}_A$ .*

**Solução:** Para mostrar que os vetores LI:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

geram o subespaço  $\mathcal{M}_S$ , basta notar que uma matriz simétrica  $2 \times 2$  é da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3.$$

Logo,  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  é uma base de  $\mathcal{M}_S$  e  $\dim \mathcal{M}_S = 3$ . Se  $B$  é uma matriz antissimétrica, então:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e o conjunto  $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  é uma base de  $\mathcal{M}_A$  e  $\dim \mathcal{M}_A = 1$ .

**EXEMPLO 5.4.21** *Se  $\mathcal{F}([0, \pi])$  é o espaço vetorial das funções reais definidas no intervalo  $[0, \pi]$ , definido no Exemplo 5.1.5, qual a dimensão do subespaço  $W$  gerado pelos vetores  $v_1 = \cos t$  e  $v_2 = \sin t$ ?*

**Solução:** Mostremos que os vetores  $v_1$  e  $v_2$  são LI e, sendo assim,  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  é uma base de  $W$  e  $\dim W = 2$ . A combinação linear nula:

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = \mathbf{0}$$

dever ser entendida como uma igualdade funcional:

$$x \cdot \cos t + y \cdot \sin t = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi. \quad (5.13)$$

e para concluir que  $x = 0$  e  $y = 0$ , basta considerar em (5.13)  $t = 0$  e em seguida  $t = \pi/2$ .

**EXEMPLO 5.4.22 (Construindo uma Base de  $W_1 + W_2$ )** *Vimos no Exemplo (5.3.14) que dados  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços do espaço vetorial  $V$ , gerados por  $\mathcal{G}_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  e  $\mathcal{G}_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , respectivamente, o subconjunto:*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

é um conjunto gerador do subespaço  $W_1 + W_2$ . Ao eliminar a dependência linear dos vetores de  $\mathcal{G}$ , extraímos uma base de  $W_1 + W_2$ . Por exemplo, sejam  $W_1$  e  $W_2$  os subespaços do  $\mathbb{R}^4$ , dados por:

$$W_1 = [u_1, u_2] \quad e \quad W_2 = [v_1, v_2, v_3]$$

onde  $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 0, 1, 1)$ ,  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, -1, 0)$  e  $v_3 = (0, 0, 2, 1)$ . O subespaço  $W_1 + W_2$  é gerado por  $\mathcal{G} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$  e o vetor  $v_2$  pode ser sacado do conjunto gerador, já que  $v_2 = u_1 - v_1$ , e temos:

$$W_1 + W_2 = [u_1, u_2, v_1, v_3].$$

Como  $\{u_1, u_2, v_1, v_3\}$  é um conjunto gerador de  $W_1 + W_2$ , de vetores LI, segue que  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, v_1, v_3\}$  é uma base de  $W_1 + W_2$  e  $\dim(W_1 + W_2) = 4$ . Logo,  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ .

Sobre a soma de subespaços de  $V$ , ressaltamos que:

- (1)  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ .
- (2)  $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ , porque  $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ , já que  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ .
- (3) A fim de que  $W_1 \oplus W_2 = V$  é necessário e suficiente que:
  - (a)  $\dim(W_1 + W_2) = \dim V$  e (b)  $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ .
- (4) Se  $V = W_1 \oplus W_2$  e  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  são bases de  $W_1$  e  $W_2$ , respectivamente, então  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m, w_1, w_2, \dots, w_n\}$  é uma base de  $V$ . De fato, como  $V = W_1 + W_2$  segue que o conjunto  $\mathcal{B}$  gera o espaço  $V$  e para comprovar que  $\mathcal{B}$  é um conjunto de vetores LI, notamos que se:

$$\underbrace{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_m \cdot v_m}_{v \in W_1} + \underbrace{y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2 + \dots + y_n \cdot w_n}_{w \in W_2} = \mathbf{0}$$

então  $v, w \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ . Logo,  $v = \mathbf{0}$  e  $w = \mathbf{0}$  e, portanto,  $x_i = 0$  e  $y_j = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ . Vale ressaltar que se a soma não fosse direta, o resultado não seria válido, como no Exercício 21 da seção Escrevendo para Aprender 5.6.

**EXEMPLO 5.4.23 (Construindo uma base por escalonamento)** Dada uma matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ , deixe-nos representar por  $A_{\mathcal{E}}$  a matriz reduzida de  $A$  por escalonamento. Cada linha da matriz  $A$  é

combinação linear das linhas da matriz escalonada  $A_{\mathcal{E}}$  e vice-versa. Assim, os subespaços gerados pelas linhas de  $A$  e pelas linhas (não nulas) de  $A_{\mathcal{E}}$  coincidem. Também nos parece óbvio que as linhas não nulas da matriz escalonada  $A_{\mathcal{E}}$  são vetores LI do  $\mathbb{R}^n$  e isto nos conduz à seguinte conclusão: a dimensão do subespaço do  $\mathbb{R}^n$  gerado pelas linhas da matriz  $A$  é igual a  $p(A)$ , o posto da matriz  $A$ , e as linhas não nulas da matriz reduzida  $A_{\mathcal{E}}$  formam uma base do subespaço gerado. Recorde-se que  $p(A)$  é o número de linhas não nulas da matriz escalonada  $A_{\mathcal{E}}$ . Vamos construir, por escalonamento, uma base do subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^3$  gerado pelo conjunto de vetores:

$$\mathcal{G} = \{(1, 0, 2), (0, -1, 2), (2, 1, 1), (2, 2, 2)\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Escalonando a matriz cujas linhas são os geradores de  $W$ , encontramos a matriz

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e daí resulta que  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base de  $W$  e temos  $W = \mathbb{R}^3$ . Ressaltamos que o gerador  $v_4$  é combinação linear dos demais e pode ser sacado do conjunto gerador, restando três geradores LI  $v_1, v_2$  e  $v_3$ , de modo que  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$  é, também, uma base de  $W$ .

**EXEMPLO 5.4.24** Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^4$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1, -1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 0, 1, 1), \quad v_3 = (-1, 2, 1, 1) \quad e \quad v_4 = (1, 0, 0, 0).$$

Imitando o que foi feito no exemplo precedente, vamos construir uma base do subespaço  $W$ . Nesta caso, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

e as linhas não nulas  $u_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0, 0)$  e  $u_3 = (0, 0, 1, 1)$  formam uma base para  $W$  e  $\dim W = 3 = p(A)$ . Como subconjunto do  $\mathbb{R}^4$ , temos:

$$W = \{(x, y, z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$



**EXEMPLO 5.4.25 (Extraindo uma base do conjunto gerador)** O processo de escalonamento também pode ser usado para extrair uma base de um conjunto gerador de um subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^n$ . Para descrever o método, deixe-nos representar por  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^n$ , gerado pelos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , e seja  $A$  a  $n \times k$  matriz, cuja  $j$ -ésima coluna é o vetor  $v_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Se  $j_1, j_2, \dots, j_m$  são as colunas-pivô da matriz  $A_{\mathcal{E}}$ , reduzida de  $A$  à forma escalonada, então o conjunto:

$$\mathcal{B} = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_m}\}$$

é uma base de  $W$ , extraída do conjunto gerador  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ . Como ilustração, seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^4$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1, -1, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 3, 1, 2), \quad v_3 = (0, 1, 1, 1) \quad \text{e} \quad v_4 = (-1, 2, 0, 1)$$

e seja  $A$  a matriz  $4 \times 4$ , com colunas  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ . Escalonando a matriz  $A$ , encontramos:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde destacamos as colunas-pivô  $j_1 = 1$ ,  $j_2 = 2$  e  $j_3 = 4$  ( $1^a, 2^a$  e  $4^a$  colunas) e concluímos que os vetores geradores  $v_1, v_2$  e  $v_4$  formam uma base de  $W$ .

---

## ESCREVENDO PARA APRENDER 5.6

---

1. Mostre que os vetores  $v = (a, b)$  e  $w = (c, d)$  do  $\mathbb{R}^2$  são LI se, e somente se,  $ad - bc \neq 0$ .
2. Em um espaço vetorial  $V$ , mostre que dois vetores são LD se, e somente se, um deles é múltiplo escalar do outro.
3. No espaço  $\mathcal{F}$  das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , mostre que os seguintes pares de funções são LI:
  - (a)  $1, t$    (b)  $\sin t, e^{2t}$    (c)  $t, e^t$    (d)  $t, t^3$ .
4. Se  $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto gerador de  $V$ , mostre que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n, v$  são LD, seja qual for o vetor  $v$  do espaço  $V$ .

5. Em cada caso, exiba uma base para o espaço vetorial  $V$  indicado e determine  $\dim V$ .
- (a)  $V = \mathcal{M}_{2 \times 3}$  (espaço das matrizes  $2 \times 3$ )
  - (b)  $V$  é o espaço das matrizes  $3 \times 3$ , triangular superior.
  - (c)  $V$  é o espaço das matrizes simétricas  $3 \times 3$ .
  - (d)  $V$  é o espaço das matrizes antissimétricas  $3 \times 3$ .
  - (e)  $V$  é o espaço das matrizes diagonais  $n \times n$ .
  - (f)  $V$  é o espaço das matrizes  $A = (a_{ij})$ , de ordem  $2 \times 2$ , tais que  $a_{11} = a_{21}$  e  $a_{12} = a_{11} + a_{22}$ .
6. No espaço vetorial  $\mathbb{P}_2 = \{at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$  dos polinômios de grau  $\leq 2$ , verifique se os vetores  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  sugeridos são LI ou LD.
- (a)  $p_1(t) = 1 + 2t + t^2$  e  $p_2(t) = 2 + 4t + 2t^2$ .
  - (b)  $p_1(t) = t + t^2$ ,  $p_2(t) = 2$  e  $p_3(t) = 1 + 2t^2$ .
  - (c)  $p_1(t) = 1 + t$ ,  $p_2(t) = 2 + t$  e  $p_3(t) = 2t^2$ .

7. Mostre que  $\mathcal{B} = \{(0, 2, 2), (0, 4, 1)\}$  é uma base do subespaço  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ .

8. Se  $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  são bases de  $V_1$  e  $V_2$ , respectivamente, então:

$$\mathcal{B} = \{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \dots, (0, w_n)\}$$

é uma base do espaço  $V = V_1 \times V_2$ . Em particular, deduza que  $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ .

9. Seja  $W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$  o subespaço do  $\mathbb{R}^4$  gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1, -1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 0, 1, 1), \quad v_3 = (-2, 2, 1, 1) \quad \text{e} \quad v_4 = (1, 0, 0, 0).$$

- (a) Exiba uma base do subespaço  $W$ .
- (b) O vetor  $v = (2, -3, 2, 2)$  está em  $W$ ?
- (c)  $W = \mathbb{R}^4$  ou  $W$  é um subespaço próprio do  $\mathbb{R}^4$ ?

10. Encontre uma base para o subespaço  $W$  de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Verifique se os vetores

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 2), v_3 = (2, 5, 6, 4) \quad \text{e} \quad v_4 = (2, 6, 8, 5)$$

formam uma base do  $\mathbb{R}^4$ . Se não, encontre a dimensão e uma base do subespaço gerado por eles.

12. Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^3$ :

$$W_1 = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Encontre uma base para:  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_1 \cap W_2$  e  $W_1 + W_2$ .

13. **BASE DO ESPAÇO SOLUÇÃO** Se  $W$  é o espaço solução do sistema linear homogêneo  $AX = \mathbf{0}$ , então  $\dim W = n - p(A)$ , onde  $n$  é o número de variáveis e  $p(A)$  é o posto da matriz  $A$ . Na forma escalonada, o sistema  $AX = \mathbf{0}$  tem exatamente  $n - p(A)$  variáveis livres e os vetores básicos são construídos atribuindo um valor constante (por exemplo 1) a cada variável livre e valor zero às demais e calculando as variáveis dependentes a partir do sistema. Por exemplo, o subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^4$  dado por

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = x - y - z + t = z - t = 0\}$$

é o espaço solução do sistema linear com 4 variáveis e 3 equações:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ z - t = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

Escalonando a matriz  $A$  dos coeficientes, encontramos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

e vemos que  $p(A) = 2$  e o grau de liberdade é 2. Assim,  $\dim W = 2$  e a partir das variáveis livres  $x$  e  $z$  vamos construir uma base de  $W$  considerando os valores  $x = 1, z = 0$  e, depois,  $x = 0, z = 1$ . Os valores de  $y$  e  $t$  são calculados pelo sistema (5.14) e encontramos os vetores básicos  $v_1 = (1, 0, 1, 0)$  e  $v_2 = (0, 1, 0, 1)$ . Em cada caso, encontre uma base para o espaço das soluções dos sistemas lineares. Reduza a matriz dos coeficientes à forma escalonada.

$$(a) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y - 4z + 3r - s = 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

14. Sejam  $W_1$  e  $W_2$  os subespaços do  $\mathbb{R}^3$  dados por:

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Calcule  $\dim(W_1 \cap W_2)$  e  $\dim(W_1 + W_2)$ .

(b) O conjunto  $W_1 \cup W_2$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$ ? Se for, qual a dimensão?

15. Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^4$ :

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - t = 0\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}.$$

Determine bases dos subespaços  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_1 \cap W_2$  e  $W_1 + W_2$ . É correto afirmar que  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ ?

16. Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^4$ :

$$W_1 = \{(x, t/2, t, t) \in \mathbb{R}^4 : x, t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, z + t, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Mostre que  $W_1 \cap W_2 = [(1, 0, 0, 0)]$  e que  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ . A soma é direta?

17. No espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , considere os subespaços:

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Determine bases de  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_1 \cap W_2$  e de  $W_1 + W_2$ .

(b) Exiba um vetor do espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , que não pertença a  $W_1 + W_2$ .

18. Seja  $W = [v_1, v_2, v_3]$  o subespaço de  $\mathbb{P}_2$ , gerado pelos vetores:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1 - t + t^2 \quad \text{e} \quad v_3 = 1 - 2t + 2t^2.$$

(a) Os vetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são LI ou LD?

(b) Determine uma base e a dimensão de  $W$ .

(c) Construa uma base de  $\mathbb{P}_2$ , da qual façam parte os vetores  $v_1$  e  $v_2$ .

19. Mostre que o subespaço  $\mathcal{M}_S$  das matrizes reais simétricas  $n \times n$  tem dimensão  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Qual a dimensão do subespaço  $\mathcal{M}_A$  das matrizes antissimétricas? Lembre-se que:

$$\mathcal{M}_{n \times n} = \mathcal{M}_S \oplus \mathcal{M}_A.$$

20. Seja  $V = \mathcal{M}_{n \times n}$ ,  $n \geq 2$ , o espaço vetorial das matrizes reais  $n \times n$ .
- (a) Quantas matrizes simétricas LI um subconjunto de  $V$  pode ter?
- (b) É possível uma base de  $V$  ser construída a partir de um subconjunto de  $V$ , de matrizes simétricas?
21. Sejam  $W_1$  e  $W_2$  os subespaços do  $\mathbb{R}^3$ , ilustrados na Figura 5.-1, em que  $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ . Verifique que  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  são bases de  $W_1$  e  $W_2$ , respectivamente, e, ainda assim,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  não é uma base do  $\mathbb{R}^3$ .
22. Se  $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$ , encontre um subespaço  $W_2$ , de dimensão 1, tal que  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ . Por que  $\dim W_2$  deve ser igual 1?
23. Mostre que qualquer espaço vetorial de dimensão  $n = 3$  é a soma direta de três subespaços.
24. No espaço  $\mathcal{M}_{n \times n}$ , das matrizes quadradas de ordem  $n$ , sejam  $W_1$  o subespaço das matrizes com diagonal nula e  $W_2$  o subespaço das matrizes diagonais. Mostre que:

$$\mathcal{M}_{n \times n} = W_1 \oplus W_2$$

e, com auxílio da fórmula,  $\dim \mathcal{M}_{n \times n} = \dim W_1 + \dim W_2$ , calcule  $\dim W_1$  a partir de  $\dim W_2$ .

### 5.4.1 Mudança de Base

Nesta Seção construiremos uma matriz quadrada  $n \times n$  para relacionar as matrizes coordenadas  $[v]_{\mathcal{B}}$  e  $[v]_{\mathcal{B}'}$  de um dado vetor  $v$ , em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  de um espaço vetorial  $n$ -dimensional  $V$ . Como ilustração, seja  $V = \mathbb{R}^3$  e fixemos as bases ordenadas:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

$$\mathcal{B}' = \{(1, -1, 2), (0, 1, 1), (1, 3, 0)\} = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Expressando cada vetor  $v_j$  da base  $\mathcal{B}'$  como combinação linear dos vetores  $u_i$  da base  $\mathcal{B}$ , encontramos:

$$v_1 = 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$$

$$v_2 = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3$$

$$v_3 = 1 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3.$$

e com os coeficientes das combinações lineares, construímos a *Matriz de Mudança de Base*:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuja  $j$ -ésima coluna é  $[v_j]_{\mathcal{B}}$ . Como o próprio nome sugere, a matriz de mudança de base  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  estabelece a relação entre as coordenadas de um dado vetor  $v$  nas duas bases. Por exemplo, se  $v = (2, -4, 6)$ , um cálculo direto nos dá:

$$v = 2 \cdot u_1 + (-4) \cdot u_2 + 6 \cdot u_3 \quad \text{e} \quad v = 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

e temos:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, usando a matriz de mudança de base, obtemos a relação:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$$

Um cálculo similar nos conduz à seguinte relação:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

Também é fácil comprovar que a matriz  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  é invertível, com inversa  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ , isto é:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_3.$$

Em um espaço vetorial  $V$ , de dimensão  $n$ , fixamos duas bases ordenadas:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\},$$

e escrevemos cada vetor  $w_j$  da base  $\mathcal{B}'$  como combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  da base  $\mathcal{B}$ :

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \dots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

A matriz:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cuja  $j$ -ésima coluna é  $[v_j]_{\mathcal{B}}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , é conhecida por matriz de *Mudança de Base* (mudança da base  $\mathcal{B}'$  para a base  $\mathcal{B}$ ) e relaciona as *matrizes coordenadas*  $[v]_{\mathcal{B}}$  e  $[v]_{\mathcal{B}'}$  de um dado vetor  $v$  de  $V$  nas duas bases ordenadas  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ , por meio da identidade:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} \quad (5.15)$$

Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as coordenadas do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  as coordenadas do mesmo  $v$  na base  $\mathcal{B}'$ , temos a relação (5.15) na forma explícita:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Procedendo de forma similar, chegamos à relação:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} \quad (5.17)$$

**EXEMPLO 5.4.26** No espaço  $\mathbb{P}_3(t)$  dos polinômios de grau  $\leq 3$ , sejam as bases ordenadas:

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\} \quad e \quad \mathcal{B}' = \{-1, 1 + t, t^2, 2t - t^3\}$$

(a) Encontrar a matriz de mudança  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .

(b) Sabendo que  $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , encontrar o vetor  $v$ .

**Solução:**

(a) Expressando os vetores de  $\mathcal{B}'$  como combinação linear de  $\mathcal{B}$ , encontramos:

$$\begin{aligned} -1 &= (-1) \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1 + t &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t^2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 2t - t^3 &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + (-1) \cdot t^3 \end{aligned}$$

e assim, obtemos:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando a relação (5.16), obtemos:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e, portanto,  $v = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot t + 3 \cdot t^2 + (-1)t^3 = -3 + t + 3t^2 - t^3$ .

1. Em  $\mathbb{R}^3$  considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

(a) Encontre as matrizes de mudança de base  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  e  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  e verifique que  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \bullet [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_3$ .

(b) Determine as coordenadas do vetor  $v = (1, 2, -1)$  nas bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ .

2. No espaço dos polinômios  $\mathbb{P}_2(t)$ , dos polinômios de grau  $\leq 2$ , considere as bases:

$$\mathcal{B} = \{1, 1 + t, t^2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{2, -t, 1 + t^2\}.$$

(a) Encontre as matrizes de mudança de base  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  e  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  e verifique que  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \bullet [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_3$ .

(b) Determine as coordenadas do vetor  $v = t^2 + t - 2$  nas bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ .

3. Determine  $[v]_{\mathcal{B}'}$ , sabendo que as coordenadas do vetor  $v$  do  $\mathbb{R}^3$  na base  $\mathcal{B}$  e a matriz de mudança  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  são dadas, respectivamente, por:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



4. No espaço  $\mathbb{P}_3(t)$ , dos polinômios de grau  $\leq 3$ , considere a base  $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ .

(a) Se  $f(t) = (1 - t^2)^2$ , mostre que  $\mathcal{B}' = \{f'(t), f''(t), f'''(t), f^{(4)}(t)\}$  é uma base para  $\mathbb{P}_3$ .

(b) Determine a matriz  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  de mudança de base de  $\mathcal{B}'$  para  $\mathcal{B}$ .

5. Sejam  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$  duas bases do  $\mathbb{R}^2$ . Determine  $v_1$  e  $v_2$ , de modo que

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. **MATRIZ DE ROTAÇÃO** Seja  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$  e deixe-nos representar por  $\mathcal{B}'$  a base  $\{v_1, v_2\}$  obtida rotacionando a base  $\mathcal{B}$ , de um ângulo  $\theta$ , como ilustra a Figura 5.1.

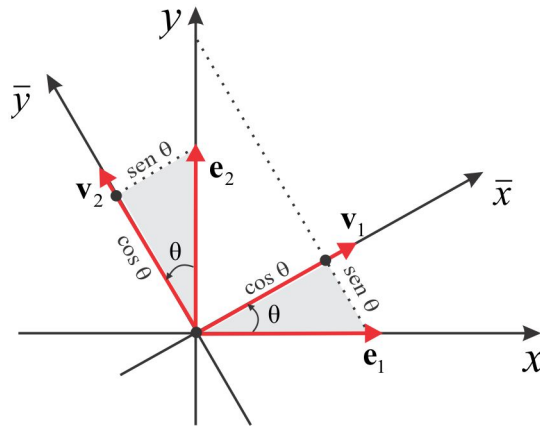


Figura 5.1: Rotação de um ângulo  $\theta$ .

Dado um vetor  $v = (x, y)$  do  $\mathbb{R}^2$ , temos:

$$v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 = \bar{x} \cdot v_1 + \bar{y} \cdot v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para encontrar a matriz de mudança de base  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ , devemos expressar os vetores canônicos  $e_1$  e  $e_2$  como combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ . Observando a Figura 1.2, vemos que:

$$e_1 = (\cos \theta) v_1 - (\sin \theta) v_2$$

$$e_2 = (\sin \theta) v_1 + (\cos \theta) v_2$$

e, conseqüentemente:

$$[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Assim, temos a relação entre as coordenadas  $(x, y)$  e  $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (5.18)$$

Por exemplo, efetuando uma rotação de  $\theta = \pi/3$ , a matriz de rotação é

$$[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e as coordenadas do vetor  $v = (2, 4)$  na nova base é, portanto:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Resolva o sistema (5.18) para expressar  $x$  e  $y$  em função de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  e obtenha:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

7. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

pode ser uma matriz de mudança de base em  $\mathbb{R}^3$ ?

8. Se  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (-2, 4)\}$ , encontre a base  $\mathcal{B}'$  do  $\mathbb{R}^2$ , tal que:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Seja  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  uma base de um espaço vetorial  $V$ , de dimensão  $n = 3$ .

(a) Verifique que  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$  é uma base de  $V$ .

(b) Encontre a matriz de mudança  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  e verifique que esta matriz é triangular superior.

### 5.4.2 Extraíndo uma Base do Conjunto Gerador

Seja  $A = [v_1, v_2, \dots, v_k]$ ,  $v_j \in \mathbb{R}^n$ , uma  $n \times k$  matriz e seja  $A_{\mathcal{E}}$  a matriz  $[v_1^*, v_2^*, \dots, v_k^*]$ , reduzida (linha) de  $A$  à forma escalonada. As colunas de  $A_{\mathcal{E}}$  que contém o primeiro elemento não nulo (elemento pivô) de uma linha não nula, recebe o nome de *coluna-pivô*.

**LEMA 5.4.27** *Com a notação descrita, temos:*

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j^* = \mathbf{0}.$$

**Prova:** Decorre do fato dos sistemas homogêneos

$$A \cdot X = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad A^* \cdot X = \mathbf{0}$$

possuírem as mesmas soluções. ■

**LEMA 5.4.28** *As colunas-pivô de  $A_{\mathcal{E}}$  são vetores LI do  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova:** Se as colunas-pivô  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*$  de  $A_{\mathcal{E}}$  fossem LD, existiria um índice  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , tal que:

$$v_j^* = \lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1}^*. \quad (5.19)$$

Se o elemento-pivô 1 da coluna  $v_j^*$  ocorre na  $i$ -ésima linha, então todos os elementos da  $i$ -ésima linha das colunas  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_j^*$  são nulos e isto contradiz (5.19). ■

**LEMA 5.4.29** *Uma coluna  $v_i^*$ ,  $1 \leq i \leq k$ , que não contém um pivô, jaz no subespaço gerado por  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*$ .*

**Prova:** Seja  $B$  a matriz de ordem  $n \times (i-1)$ , cujas colunas são  $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*$ , e deixe-nos considerar o sistema:

$$B \cdot X = v_i^*. \quad (5.20)$$

Se  $X = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1})$  é uma solução do sistema (5.20), então:

$$v_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j v_j^*,$$

isto é,  $v_i^* \in [v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*]$ . A matriz  $B$  está escalonada e o sistema (5.20) só não terá solução se a matriz  $B$  possuir alguma linha não nula, na qual algum elemento da coluna  $v_i^*$  é não nulo. Este elemento não seria um pivô de  $v_i^*$ , o que seria uma contradição. ■

**TEOREMA 5.4.30** Se  $v_{i_1}^*, v_{i_2}^*, \dots, v_{i_k}^*$  são as colunas-pivô da matriz  $A_{\mathcal{E}}$ , então  $\mathcal{B} = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$  é uma base do subespaço gerado  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ .

**Demonstração:** Basta observar que:

- (a)  $\{v_{i_1}^*, v_{i_2}^*, \dots, v_{i_k}^*\}$  é um conjunto de vetores LI.
- (b) De (a) e do Lema 5.4.27, resulta que os vetores  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$  são LI.
- (c) O conjunto  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$  gera o subespaço  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ . ■

#### REVISANDO O CONTEÚDO

A título de revisão e como parte do processo de treinamento, recomendamos a resolução dos exercícios sugeridos a seguir.

1. Se  $\{u, v, w\}$  é um conjunto LI, o que dizer do conjunto  $\{u + v + 2w, u + v, u - v - w\}$ ? E o conjunto  $\{u + v - 3w, u + v, u + 3v - w\}$  é LI ou LD?
2. Mostre que  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x + y) = 1\}$  não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$ . Idem para o subconjunto  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sin(x + y + z) = 0\}$ . Note que em ambos os casos o vetor nulo pertence ao conjunto!
3. Um corpo  $\mathbb{F}$  é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre  $\mathbb{F}$ . Exiba uma base de  $\mathbb{F}$ . Sobre  $\mathbb{R}$  o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos é um espaço vetorial de dimensão 2. Exiba uma base.
4. Mostre que  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$  é o "menor" subespaço de  $V$  contendo os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ .
5. Se  $W_1$  e  $W_2$  são subespaços vetoriais de  $V$ , mostre que  $W_1 \cup W_2$  é um subespaço vetorial de  $V$  se, e somente se,  $W_1 \subset W_2$  ou  $W_2 \subset W_1$ .
6. Mostre que os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^4$  coincidem:

$$W_1 = [(1, 2, -1, 3), (3, 6, 3, -3), (2, 4, 1, 0)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, 2, -4, 9), (2, 4, -4, 10)].$$

7. **CONSTRUINDO UMA BASE DE  $W_1 + W_2$**  Sejam  $W_1$  e  $W_2$  subespaços vetoriais de  $V$  e suponha que  $\dim W_1 = 3$  e  $\dim W_2 = 4$ . Dada uma base  $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$  de  $W_1 \cap W_2$ , complete  $\mathcal{B}$  com um vetor

$u_1$  de  $W_1$ , para formar uma base de  $W_1$ , e com os vetores  $v_1$  e  $v_2$  de  $W_2$ , complete  $\mathcal{B}$  a uma base de  $W_2$ . Mostre que

$$\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$$

é uma base de  $W_1 + W_2$ . Conclua que  $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ .

8. Mostre com um exemplo que se  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  são bases de  $W_1$  e  $W_2$ , respectivamente, a união  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  pode não ser uma base de  $W_1 + W_2$ .
9. Se  $W_1$  e  $W_2$  são subespaços de  $V$ , tais que  $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$ , é correto afirmar que  $V = W_1 \oplus W_2$ ? Se não, ilustre com um contra-exemplo.
10. Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de certo espaço vetorial  $V$  e  $k$  é um número inteiro entre 1 e  $n$ , mostre que  $V = [v_1, v_2, \dots, v_k] \oplus [v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n]$ .
11. Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^3$  :

$$W_1 = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(x, y, z) : x = y = 0\} \quad \text{e} \quad W_3 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

É verdade que  $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$ ? Em qual dos casos a soma é direta?

12. Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n = 7$  e sejam  $W_1$  e  $W_2$  subespaços de  $V$ , tais que  $\dim W_1 = 4$  e  $\dim W_2 = 5$ . Determine os possíveis valores para  $\dim(W_1 \cap W_2)$ .
13. Sejam  $W_1$  e  $W_2$  subespaços do  $\mathbb{R}^3$ , tais que  $\dim W_1 = 1$ ,  $\dim W_2 = 2$  e o subespaço  $W_1$  não está contido em  $W_2$ . Mostre que  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ .
14. Determine uma base do subespaço  $W = \{p \in \mathbb{P}_2(t) : p'(t) = 0\}$ .

15. No espaço vetorial  $V$  das matrizes  $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , considere as bases:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Encontre as matrizes de mudança  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  e  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ .

16. Em um espaço vetorial  $V$ , mostre que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD se, e somente se, para algum índice  $k$ ,  $2 \leq k \leq n$ , o vetor  $v_k$  jaz no subespaço  $[v_1, v_2, \dots, v_{k-1}]$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.0

1. O conjunto  $\mathbb{N}$  não é um corpo, porque não contém o número zero. Embora o conjunto  $\mathbb{Z}$  contenha o número zero, ele também não é corpo. Note que  $2 \in \mathbb{Z}$ , mas,  $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ .
2. Sim, o conjunto  $\mathbb{Q}$  das frações  $m/n$ , com  $m$  e  $n$  números inteiros e  $n \neq 0$  é um corpo. É claro que 0 e 1 estão em  $\mathbb{Q}$  e dados  $x = m/n$  e  $y = p/q$  em  $\mathbb{Q}$ , então:

$$(a) \quad -x = \frac{-m}{n} \quad \text{e} \quad x^{-1} = \frac{n}{m}, \quad m \neq 0, \quad \text{estão em } \mathbb{Q}.$$

$$(b) \quad x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad x \cdot y = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

Para justificar que o conjunto  $\mathbb{I}$  dos irracionais não é um corpo, basta observar que  $0 \notin \mathbb{I}$ . (zero é um número racional).

3. Observando que  $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$  e que  $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ , vemos que os números 0 e 1 estão em  $\mathbb{F}$ . Se  $x = a + b\sqrt{2}$  e  $y = a' + b'\sqrt{2}$  estão em  $\mathbb{F}$ , então:

$$(a) \quad x + y = a + b\sqrt{2} + a' + b'\sqrt{2} = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbb{F}, \quad \text{porque } a + a' \text{ e } b + b' \text{ estão em } \mathbb{Q}.$$

$$(b) \quad x \cdot y = (a + b\sqrt{2}) \cdot (a' + b'\sqrt{2}) = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2} = r + s\sqrt{2} \in \mathbb{F}.$$

$$(r = aa' + 2bb' \text{ e } s = ab' + a'b \text{ estão em } \mathbb{Q})$$

$$(c) \quad -x = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{F}.$$

$$(d) \quad x^{-1} = (a + b\sqrt{2})^{-1} = a(a^2 - 2b^2)^{-1} + [(-b)(a^2 - 2b^2)^{-1}]\sqrt{2} = r + s\sqrt{2} \in \mathbb{F}.$$

$$(r = a(a^2 - 2b^2)^{-1} \text{ e } s = -b(a^2 - 2b^2)^{-1} \text{ estão em } \mathbb{Q})$$

4. Sendo  $\mathbb{F}$  um corpo, então 0 e 1 estão em  $\mathbb{F}$  e dados  $m$  e  $n$  números inteiros, com  $n \neq 0$ , então  $m$ ,  $-m$  e  $1/n$  estão em  $\mathbb{F}$  e, portanto:

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} \in \mathbb{F}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0.$$

5. Dado um número  $x$  no corpo  $\mathbb{F}$ , considerando que  $\mathbb{F}$  é fechado em relação à soma e ao produto, isto é, soma e produto de números de  $\mathbb{F}$  continuam em  $\mathbb{F}$ , deduzimos que as potências  $x^2, x^3, x^4, \dots$  e, conseqüentemente, os números,  $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$  estão em  $\mathbb{F}$ . Por outro

lado,  $q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0$  estando em  $\mathbb{F}$  e sendo não nulo, então  $q(x)^{-1}$  (o inverso multiplicativo) está em  $\mathbb{F}$ . Logo,

$$\frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1x + b_0} = (a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) \cdot q(x)^{-1} \in \mathbb{F}.$$

### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.1

- Embora o vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0)$  esteja no conjunto  $V$ , o simétrico de um dado vetor de  $V$  pode não estar em  $V$ . Por exemplo,  $v = (0, 1)$  está em  $V$ , mas,  $-v = (0, -1)$  não. O conjunto  $V$  não é um espaço vetorial.
- Se ao menos uma das propriedades (EV1)-(EV8) for violada, fica caracterizado que o conjunto (no caso o  $\mathbb{R}^2$ ) com as operações indicadas não é um espaço vetorial. Considerando  $v = (1, 1)$ , e usando as operações indicadas, vemos que

$$v + (-v) = (1, 1) + (-1, -1) = (0, -1) \neq \mathbf{0}$$

e isso viola a propriedade (EV4).

- $\mathbb{Q}$  não é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , porque o produto  $\lambda v$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $v \in \mathbb{Q}$ , pode não pertencer ao conjunto  $\mathbb{Q}$  (por exemplo,  $\lambda = \sqrt{2}$  e  $v = 1 \Rightarrow \lambda v \notin \mathbb{Q}$ ). Sim,  $\mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$ .
- (a) Consequência direta da propriedade (EV4):  $v + (-v) = \mathbf{0}$ .  
(b) Sendo  $u + v = u + w$ , segue das propriedades (EV1)-(EV8) que

$$\begin{aligned} (-u) + u + v &= (-u) + u + w \Leftrightarrow [(-u) + u] + v \\ &= [(-u) + u] + w \Leftrightarrow \mathbf{0} + v = \mathbf{0} + w \Leftrightarrow v = w. \end{aligned}$$

- O vetor  $w$  procurado é precisamente  $v - u$ .
- Sim. Note que  $S = \{p(t) = a + bt + ct^2 : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } b + 2c = 0\}$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.2

1. Efetuando o cálculo, obtemos:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o produto  $BA$  não é possível, porque o número de colunas da matriz  $B$  não é igual ao número de linhas da matriz  $A$ . Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , então:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e temos  $AB \neq BA$ .

$$2. \text{ (a) } B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } C^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

3. Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , então  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$  e, portanto,

$$(xA + B)^t = [xa_{ji} + b_{ji}]_{n \times m} = x[a_{ji}]_{n \times m} + [b_{ji}]_{n \times m} = xA^t + B^t.$$

Para comprovar a propriedade  $(AB)^t = B^t A^t$ , sejam  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ . Então

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{pmatrix} = (AB)^t.$$

4. (a)  $\text{tr}(B) = 3$  e  $\text{tr}(C) = a + b + c$ .

(b) Sejam  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ , de modo que  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n}$ .

$$(i) \text{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr} A + \text{tr} B.$$



$$(ii) \quad xA = (xa_{ij})_{n \times n} \Rightarrow \operatorname{tr}(xA) = \sum_{i=1}^n (xa_{ii}) = x \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii} = x \operatorname{tr} A.$$

(iii) Os elementos diagonais de  $A$  e  $A^t$  são iguais e, sendo assim,  $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(A^t)$ .

$$(iv) \quad \text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \text{ então}$$

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(AB) = aa' + bc' + b'c + dd'.$$

Por outro lado,

$$BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + d'd \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(BA) = a'a + b'c + bc' + d'd = \operatorname{tr}(AB).$$

5. A matriz quadrada que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica é a matriz nula.

6. O item (a) é trivial! Para o item (b) considere  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  e admita que  $AB = I_2$ . Então

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2b & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e daí resulta o sistema

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

cuja solução é  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 0$  e  $d = 1$ . Logo,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Comprove a resposta, calculando  $AB$  e  $BA$ .

7. (a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  tem índice de nilpotência  $k = 2$ .

(b) Temos  $A^k = \mathbf{0}$  e usando a propriedade  $(A^t)^k = (A^k)^t$ , obtemos o resultado.

(c) Considere  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  e usando  $A^2 = \mathbf{0}$ , deduza que  $a = b = c = 0$ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.3

- O vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  não está em  $W$ .
- O vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0)$  está em  $W$ , porque  $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$ . Se  $u = (x, y)$  e  $v = (x', y')$  estão em  $W$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in W$ , porque

$$a \cdot (\lambda x + x') + b \cdot (\lambda y + y') = \lambda \underbrace{(ax + by)}_{=0} + \underbrace{(ax' + by')}_{=0} = 0.$$

- Note que um vetor  $(x, y, z)$  está em  $W$  se, e somente se,  $z = 0$ . Assim,  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$  está em  $W$  e dados  $u = (x, y, 0)$  e  $v = (x', y', 0)$  em  $W$ , então

$$\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', 0) \in W, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Não! O vetor nulo  $\mathbf{0} = (0, 0)$  não está em  $W$ .
- Temos que  $\mathbf{0} \in W_1$  e  $\mathbf{0} \in W_2$ , porque  $W_1$  e  $W_2$  são subespaços de  $V$  e, portanto:

$$\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2, \quad \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2 \quad \text{e} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in W_1 \times W_2.$$

- (a) Se  $u, v \in W_1 \cap W_2$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda \cdot u + v \in W_1$  e  $\lambda \cdot u + v \in W_2$  e, portanto,  $\lambda \cdot u + v \in W_1 \cap W_2$ .
- (b) Se  $u, v \in W_1 + W_2$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $u = u_1 + u_2$ ,  $v = v_1 + v_2$ , com  $u_1, v_1 \in W_1$  e  $u_2, v_2 \in W_2$ . Logo,

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda \cdot u_1 + v_1) + (\lambda \cdot u_2 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

- (c) Se  $u, v \in W_1 \times W_2$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$ , com  $u_1, v_1 \in W_1$  e  $u_2, v_2 \in W_2$ . Logo,

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2) + (v_1, v_2) = (\lambda \cdot u_1 + v_1, \lambda \cdot u_2 + v_2) \in W_1 \times W_2.$$

- (d) Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^2$ :

$$W_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

temos que  $u = (1, 0)$  e  $v = (0, 1)$  pertencem a  $W_1 \cup W_2$  e, contudo,  $u + v \notin W_1 \cup W_2$ . Isso mostra que  $W_1 \cup W_2$  não é um subespaço do  $\mathbb{R}^2$ , embora  $W_1$  e  $W_2$  o sejam.

6. Deve-se mostrar que  $\mathbf{0} \in W$  (isso é óbvio, porque  $\text{tr } \mathbf{0} = 0$ ) e que  $\lambda A + B \in W$ , sempre que  $A, B \in W$ . No Exercício 1.2N provamos que  $\text{tr}(\lambda \cdot A + B) = \lambda \cdot \text{tr } A + \text{tr } B$  e como  $\text{tr } A = \text{tr } B = 0$ , segue que  $\text{tr}(\lambda \cdot A + B) = 0$  e, portanto,  $\lambda \cdot A + B \in W$ .
7. Considere os vetores  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Temos que  $\det A = \det B = 0$  e, contudo,  $\det(A + B) \neq 0$ . Conclua que  $A, B \in W$  e  $A + B \notin W$ .
8. O vetor  $A$  está em  $W$  e o vetor  $B$  não.
9. O vetor  $u = (2, 2)$  está em  $W$ , mas, o simétrico  $-u$  não.
10. Primeiro, note que  $\mathbf{0} \in W$  e, portanto,  $W$  não é vazio. Considere dois vetores (polinômios)  $p$  e  $q$  em  $W$  e mostre que  $(\lambda \cdot p + q)(0) = 2(\lambda \cdot p + q)(1)$  e deduza que  $\lambda \cdot p + q \in W$ .

---

#### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.4

1. Escreva

$$(1, 1, 2, -1) = x \cdot (1, 0, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1, 0) + t \cdot (1, 0, 0, 1) = (x + t, y, y + z, t)$$

e deduza que  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$  e  $t = -1$ . Assim,  $v = 2v_1 + v_2 + v_3 - v_4$ .

2. Um vetor de  $W$  é da forma

$$v = xv_1 + yv_2 + zv_3 = x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x \\ z & y \end{pmatrix}$$

de onde segue que:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = c \right\}.$$

3. (a) Temos  $v \in W$  se, e somente se,  $v = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (1, 0, 1) = (x + y, 0, y)$  e, assim:

$$W = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \quad (\text{o plano } xz).$$

(b) O plano  $x - y + 2z = 0$ .

4. Um vetor  $v = (x, y, z)$  está em  $W$  se, e somente se,  $x + y + z = 0$ . Comprove que os vetores  $v_1 = (1, -1, 0)$  e  $v_2 = (0, -1, 1)$  geram  $W$ .

5. O subespaço  $W$  é constituído das soluções  $(x, y, z, t)$  do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z - t = 0, \end{cases}$$

cuja matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

já está na forma escalonada. Temos  $p(A) = 2$  e considerando  $x$  e  $z$  variáveis livres, construímos os vetores básicos  $v_1 = (1, 1, 0, 0)$  e  $v_2 = (0, 0, 1, 1)$ . Assim,  $W = [v_1, v_2]$ .

O resultado pode ser obtido trabalhando diretamente nas coordenadas. De fato, um vetor genérico de  $W$  é da forma

$$\begin{aligned} v &= (x, x, z, z) = (x, x, 0, 0) + (0, 0, z, z) \\ &= x(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

de onde resulta que  $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$ .

6. É suficiente provar que todo polinômio de grau  $\leq 3$  pode ser escrito como combinação linear dos polinômios  $1$ ,  $1 - t$ ,  $(1 - t)^2$  e  $(1 - t)^3$ . Verifiquemos que existem constantes  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ , tais que  $a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = x_1 + x_2(1 - t) + x_3(1 - t)^2 + x_4(1 - t)^3$ . De fato, se

$$\begin{aligned} a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 &= x_1 + x_2(1 - t) + x_3(1 - t)^2 + x_4(1 - t)^3 \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (x_2 + 2x_3 + 3x_4)t + (x_3 + 3x_4)t^2 - x_4t^3 \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes, encontramos o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_0 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = a_1 \\ x_3 + 3x_4 = a_2 \\ -x_4 = a_3 \end{cases}$$

cuja solução é  $x_4 = -a_3$ ,  $x_3 = a_2 + 3a_3$ ,  $x_2 = -a_1 - 2a_2 - 3a_3$  e  $x_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ .

7. Dado  $v$  um vetor de  $V$ , então:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_kv_k$$

e sendo o vetor  $v_1$  combinação linear dos demais, então  $v_1 = y_2v_2 + y_3v_3 + \cdots + y_kv_k$ . Logo,

$$\begin{aligned} v &= x_1(y_2v_2 + y_3v_3 + \cdots + y_kv_k) + x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_kv_k \\ &= (x_1y_2 + x_2)v_2 + (x_1y_3 + x_3)v_3 + \cdots + (x_1y_k + x_k)v_k. \end{aligned} \quad (5.21)$$

O que vemos em (5.21) é o vetor genérico  $v$  escrito como combinação linear dos vetores  $v_2, v_3, \dots, v_k$  e, portanto, o espaço  $V$  é gerado por  $\{v_2, v_3, \dots, v_k\}$ .

8. O subespaço  $W$ , gerado por  $v_1, v_2$  e  $v_3$ , é:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b+c \\ a & a-b \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Tente escrever o vetor  $v$  como combinação linear dos vetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  e conclua que o vetor  $v$  não pertence ao subespaço gerado  $[v_1, v_2, v_3]$ .

9. (a) Escalonando a matriz geradora de  $W$  chegamos à matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e vemos que  $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$  é um conjunto gerador de  $W$ . O vetor  $v = (\lambda, 2, -2\lambda)$  estará em  $W$  quando existirem escalares  $x$  e  $y$ , tais que:

$$v = (\lambda, 2, -2\lambda) = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 2) = (x, y, -x + 2y) \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

(b) Verifique se existem escalares  $x$  e  $y$ , tais que  $v = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 2)$

10. Escalone as matrizes geradoras e conclua que ambos os subespaços são gerados pelos vetores  $v_1 = (1, 0, -2)$  e  $v_2 = (0, 1, -1)$ .

11. Considere, por exemplo,  $W_1 = [(1, 0, 1)]$  e  $W_2 = [(0, 1, 1)]$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.5

1. Considere os subespaços  $W_1 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  e  $W_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$  e mostre que (i)  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  e (ii)  $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ . Dessa forma, teremos  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ .

2. Sejam  $W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2} : A = A^t\}$  e  $W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2 \times 2} : A = -A^t\}$  os subespaços das matrizes simétricas e antissimétricas, respectivamente. A matriz  $A$  que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica é a matriz nula  $A = \mathbf{0}$ , isto é,  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ . Por outro lado, dada uma matriz  $A$  de ordem  $2 \times 2$ , temos

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^t)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^t)}_{\text{antissimétrica}}.$$

3. Proceda como no exercício precedente e comece mostrando que a única função que é, ao mesmo tempo, par e ímpar é a função identicamente nula. Depois, note que

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{\text{par}} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{\text{ímpar}}.$$

4. Sejam  $W_1 = [(1, 0, 0)]$  e  $W_2 = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, -1)] = [(0, 1, 1), (1, 0, -1)]$ , já que  $(1, 1, 0) = (0, 1, 1) + (1, 0, -1)$ . Se  $v \in W_1 \cap W_2$ , então:

$$v \in W_1 \Rightarrow v = x(1, 0, 0) = (x, 0, 0)$$

$$v \in W_2 \Rightarrow v = y(0, 1, 1) + z(1, 0, -1) = (z, y, y - z)$$

e da relação  $(x, 0, 0) = (z, y, y - z)$  resulta  $x = y = z = 0$  e, portanto,  $v = \mathbf{0}$ . Por outro lado, dado  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , temos que  $v \in W_1 + W_2$ , porque:

$$v = \underbrace{(x - y + z) \cdot (1, 0, 1)}_{\in W_1} + \underbrace{y \cdot (0, 1, 1) + (y - z) \cdot (1, 0, -1)}_{\in W_2}$$

5. Considere os subespaços:

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{(o plano } xy\text{)}$$

$$W_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{(o eixo } z\text{)}$$

$$W_3 = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{(a reta } x = z, y = 0\text{)}$$

Se valesse a Lei do cancelamento, teríamos  $W_2 = W_3$ , o que não é verdade!

6. A relação

$$(x, y, x - y) = (x, 0, x) + (0, y, -y)$$

nos dá uma indicação de como devem ser os subespaços  $U_1$  e  $U_2$ :

$$U_1 = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad U_2 = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

7. Para concluir que  $M_{n \times n} = W_1 + W_2$ , basta notar que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 2 \cdot a_{12} & \cdots & 2 \cdot a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 2 \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 2 \cdot a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 \cdot a_{n1} & 2 \cdot a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A soma será direta se, e só se,  $a_{ii} = 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

8. Temos  $W_1 = [\mathbf{e}_1]$ ,  $W_2 = [\mathbf{e}_2]$  e  $W_3 = [\mathbf{e}_3]$ , de modo que:

$$v = (x, y, z) = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad W_i \cap W_j = \{\mathbf{0}\}, \quad i \neq j.$$

---

### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.6

1. Os vetores  $v = (a, b)$  e  $w = (c, d)$  são LI se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{cases}$$

tem solução única  $x = 0$  e  $y = 0$ . Isto equivale dizer que a matriz dos coeficientes tem posto 2. Se  $a$  e  $b$  forem ambos nulos, então os vetores serão LD e  $ad - bc = 0$ . Suponhamos, então, que  $a$  seja não nulo (raciocínio similar se aplica se  $b \neq 0$ ). Escalonando a matriz dos coeficientes, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c/a \\ 0 & (ad - bc)/a \end{pmatrix}$$

onde vemos que  $p(A) = 2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$ . Se preferir, pode usar a Regra de Cramer!

2. Se os vetores  $u$  e  $v$  são LD, existem escalares  $x$  e  $y$ , com um deles não nulo, tais que  $xu + yv = \mathbf{0}$ . Se, por exemplo,  $x \neq 0$ , obtemos  $u = (-y/x)v$  ( $u$  múltiplo de  $v$ ). Reciprocamente, se  $u$  for múltiplo de  $v$ , então existe um escalar  $\lambda$ , tal que  $u = \lambda v$  e daí resulta  $u + (-\lambda)v = \mathbf{0}$ . O que vemos na última igualdade é uma combinação linear nula de  $u$  e  $v$ , com um dos coeficientes  $\neq 0$ . Veja na Definição 5.4.1 o conceito de vetores LD!
3. No espaço  $\mathcal{F}$  das funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , o vetor nulo é a função  $\mathbf{0}$ , identicamente nula, isto é, aquela que assume o valor zero em cada  $t$ .

- (a) Se  $x \cdot 1 + y \cdot t = \mathbf{0}$ , consideremos  $t = 0$ , para obtermos  $x = 0$  e, em seguida, com  $t = 1$ , obtemos  $y = 0$ .
- (b) Considerando a combinação linear nula  $x \cdot \sin t + y \cdot e^{2t} = \mathbf{0}$  e fazendo  $t = 0$ , obtemos  $y = 0$ ; com  $t = \pi/2$ , obtemos  $x = 0$ .
- (c) Se  $x \cdot t + y \cdot e^t = \mathbf{0}$ , então considerando  $t = 0$  e em seguida  $t = 1$ , encontramos  $x = y = 0$ .
- (d) Se  $x \cdot t + y \cdot t^3 = \mathbf{0}$ , então  $x \cdot t + y \cdot t^3 = 0 \cdot t + 0 \cdot t^3, \quad \forall t$ , e igualando os coeficientes, chegamos a  $x = y = 0$ .
4. Sendo  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base, então o vetor  $v$  se expressa, de modo único, como combinação linear  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$  e daí resulta:

$$(-1)v + x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n = \mathbf{0}. \quad (5.22)$$

O que vemos em (5.22)? Uma combinação linear nula, com pelo menos um coeficiente ( $x_0 = -1$ ) não nulo. Então os vetores  $v, v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD.

5. (a)  $\dim V = 6$ .

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (b)  $\dim V = 6$ .

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (c)  $\dim V = 6$    (d)  $\dim V = 3$    (e)  $\dim V = n$ . (construa as respectivas bases!)

(f)  $\dim V = 2, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

6. (a)  $p_1$  e  $p_2$  são LD, porque  $p_2$  é um múltiplo escalar de  $p_1$ . ( $p_2 = 2p_1$ )

- (b) A partir da combinação linear nula  $x \cdot p_1 + y \cdot p_2 + z \cdot p_3 = \mathbf{0}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x(t + t^2) + 2y + z(1 + 2t^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y + z + xt + (x + 2z)t^2 &= 0, \quad \forall t, \\ \Leftrightarrow 2y + z = 0, \quad x = 0, \quad x + 2z &= 0 \\ \Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$



Logo,  $p_1, p_2$  e  $p_3$  são LI.

(c) Procedendo como no ítem (b), encontramos:

$$\begin{aligned} x(1+t) + y(2+t) + 2zt^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y + (x+y)t + 2zt^2 &= 0, \quad \forall t, \\ \Leftrightarrow x + 2y = 0, \quad x + y = 0, \quad z = 0 \\ \Leftrightarrow x = y = z = 0 \end{aligned}$$

e os vetores  $p_1, p_2$  e  $p_3$  são LI.

7. Em primeiro lugar, note que os vetores  $v_1 = (0, 2, 2)$  e  $v_2 = (0, 4, 1)$  são LI e resta-nos provar que esses vetores geram o subespaço  $W$ . Ora, dado  $v = (0, a, b)$  um vetor qualquer de  $W$ , resolva a equação  $v = x \cdot v_1 + y \cdot v_2$  e encontre  $x = (-a + 5b)/2$  e  $y = (a - b)/4$ . "Todo vetor de  $W$  é combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ ".
8. Basta mostrar que  $\mathcal{B}$  é um conjunto gerador de  $V_1 \times V_2$ , constituído de vetores LI. Para mostrar que  $\mathcal{B}$  gera  $V_1 \times V_2$ , seja  $(v, w)$  em  $V_1 \times V_2$ , de modo que  $v \in V_1$  e  $w \in V_2$  e, assim:

$$\begin{aligned} v &= x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k \\ w &= y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n \end{aligned}$$

e daí resulta que:

$$(v, w) = x_1(v_1, 0) + x_2(v_2, 0) + \cdots + x_k(v_k, 0) + y_1(0, w_1) + y_2(0, w_2) + \cdots + y_n(0, w_n).$$

Para mostrar que  $\mathcal{B}$  é um conjunto de vetores LI, observamos que:

$$x_1(v_1, \mathbf{0}) + x_2(v_2, \mathbf{0}) + \cdots + x_k(v_k, \mathbf{0}) + y_1(\mathbf{0}, w_1) + y_2(\mathbf{0}, w_2) + \cdots + y_n(\mathbf{0}, w_n) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

nos dá:

$$\begin{aligned} x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k &= \mathbf{0} \in V_1 \\ y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n &= \mathbf{0} \in V_2 \end{aligned}$$

e daí resulta  $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ .

9. Escalonando a *matriz geradora* de  $W$ , encontramos:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, conseqüentemente,  $\dim W = 3 = p(A_{\mathcal{E}})$ .

(a) As linhas não nulas da matriz escalonada  $A_{\mathcal{E}}$  formam uma base de  $W$  e, sendo assim:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}. \quad (5.23)$$

(b) Segue de (5.23) que um vetor  $v = (a, b, c, d)$  do  $\mathbb{R}^4$  pertence a  $W$  se, e só se,  $c = d$ . Assim, o vetor  $v = (2, -3, 2, 2)$  está em  $W$ .

(c)  $W$  é um subespaço próprio (menor) do que  $\mathbb{R}^4$ , porque  $\dim W = 3 < \dim \mathbb{R}^4$ .

10. O processo consiste em excluir (um a um) do conjunto gerador cada vetor que é combinação linear dos demais, até que sobrem apenas vetores LI que formarão uma base (veja o Exercício 13 da seção Escrevendo para Aprender 5.6). A combinação linear nula  $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = \mathbf{0}$ , nos conduz ao sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 & \text{(I)} \\ -5x + y - 4z - 7t = 0 & \text{(II)} \\ -4x - y - 5z - 5t = 0 & \text{(III)} \\ 2x + 5y + 7z + t = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

e, escalonando a matriz dos coeficientes, chegamos à matriz

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos posto é 3 e o grau de liberdade do sistema é  $GL = 4 - 3 = 1$ . O sistema é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{4}{3}t = 0 \\ y - \frac{1}{3}t = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

e escolhendo  $t = 1$  (variável livre), obtemos  $x = -4/3$  e  $y = 1/3$ . Com esses valores, a combinação linear fica

$$-\frac{4}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow v_4 = \frac{4}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2$$

e eliminamos o vetor  $v_4$  da coleção de geradores. O subespaço  $W$  é gerado pelos vetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  e para concluir, mostremos que os vetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são LI. De fato, consideramos a combinação linear nula  $xv_1 + yv_2 + zv_3 = \mathbf{0}$ , a qual é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 & \text{(V)} \\ -5x + y - 4z = 0 & \text{(VI)} \\ -x - y - 5z = 0 & \text{(VII)} \\ 2x + 5y + 7z = 0 & \text{(VIII)} \end{cases}$$

cuja solução é  $x = y = z = 0$ . Assim,  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são LI e geram o subespaço  $W$ , constituindo, portanto, uma base de  $W$ .

**FUGINDO DO ESCALONAMENTO** Trabalhando diretamente no sistema (I)-(IV), segue de (III) e (IV) que  $y + z = t/3$  e usando (I), encontramos  $x = -4t/3$ . Agora, de (II) e (III), obtemos:

$$-9x - 9z - 12t = 0 \Leftrightarrow 3x + 3z + 4t = 0$$

e, considerando que  $x = -4t/3$ , resulta  $z = 0$ . Para obter uma solução não nula, fazemos  $t = 3$  para chegarmos à solução:

$$x = -4, \quad y = 1, \quad z = 0 \quad \text{e} \quad t = 3.$$

Assim,

$$-4v_1 + v_2 + 0v_3 + 3v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow v_4 \in [v_1, v_2, v_3].$$

Para concluir, eliminamos  $v_4$  do conjunto gerador e mostramos que  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são LI. De fato, somando (VI) e (VII), encontramos  $x = -z$  e usando (V), chegamos a  $y = 0$ . Finalmente, usamos (VIII) e obtemos  $x = 0$  e  $z = 0$ .

11. Escalonando a matriz  $A$ , chegamos à matriz  $A_{\mathcal{E}}$  cujas linhas não nulas formam uma base de  $W$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

Como  $p(A) = 3$ , segue que  $\dim W = 3$  e  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 1/2), (0, 1, 0, 1/2), (0, 0, 1, 1/2)\}$  é uma base de  $W$ .

**EXTRAINDO UMA BASE POR ESCALONAMENTO** Escalonando a matriz cujas colunas são os vetores  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ , encontramos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{\mathcal{E}}$$

e observamos que, na forma escalonada, as colunas 1, 2 e 3 contêm os elementos pivôs destacados e, portanto,  $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4)\}$  é uma base de  $W$ , extraída do conjunto gerador.

12. Temos que  $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$  e o subespaço  $W_1 + W_2$  é gerado por  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

Escalonando a matriz geradora chegamos à matriz:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\dim(W_1 + W_2) = 3$  e, sendo assim,  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ . Para identificar  $W_1 \cap W_2$ , observamos inicialmente que:

$$W_1 = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

e, conseqüentemente,  $v = (1, 1, 2)$  está em  $W_1 \cap W_2$ . Como  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ , segue que:

$$W_1 \cap W_2 = [(1, 1, 2)] = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

13. Como ilustração, faremos o item (b). Escalonando a matriz  $A$  dos coeficientes, chegamos à matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde vemos que  $p(A) = 2$  e o grau de liberdade do sistema é  $GL = 5 - 2 = 3$ . Na tabela abaixo contruímos os vetores básicos  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  a partir ds valores atribuídos às variáveis livres  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

| $x$ | $y$ | $z$ | $r$    | $s$    | vetor básico                  |
|-----|-----|-----|--------|--------|-------------------------------|
| 1   | 0   | 0   | $-2/5$ | $-1/5$ | $v_1 = (1, 0, 0, -2/5, -1/5)$ |
| 0   | 1   | 0   | $-4/5$ | $-2/5$ | $v_2 = (1, 0, 0, -4/5, -2/5)$ |
| 0   | 0   | 1   | $6/5$  | $-2/5$ | $v_3 = (1, 0, 0, 6/5, -2/5)$  |

14. Temos

$$W_1 = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, 0, 1), (0, 1, -1)].$$

sendo  $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ .

(a) O subespaço  $W_1 \cap W_2$  é o espaço solução do sistema homogêneo

$$\begin{cases} z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

isto é,  $W_1 \cap W_2 = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 0)]$  e  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ . Por outro lado:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 3.$$

**( $W_1 \cap W_2$  é uma reta pela origem e  $W_1 + W_2$  coincide com o espaço  $\mathbb{R}^3$ )**

(b) Para justificar que  $W_1 \cup W_2$  não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^3$  é suficiente exibir dois vetores  $u$  e  $v$  de  $W_1 \cup W_2$ , tais que  $u + v \notin W_1 \cup W_2$ . Considere os vetores  $u = (1, 0, 0) \in W_1$  e  $v = (2, 1, 1) \in W_2$ . Temos que

$$u, v \in W_1 \cup W_2, \quad \text{mas} \quad u + v = (3, 1, 1) \notin W_1 \cup W_2.$$

15. Sejam  $A$  e  $B$  as matrizes dos coeficientes dos sistemas homogêneos que descrevem  $W_1$  e  $W_2$ , respectivamente. Temos que  $p(A) = 2$ ,  $p(B) = 1$  e, por conseguinte,  $\dim W_1 = 2$  e  $\dim W_2 = 3$ . (recorde-se que cada sistema tem 4 variáveis e a dimensão do espaço solução é o grau de liberdade do sistema). O subespaço  $W_1 \cap W_2$  é o espaço solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

com grau de liberdade 1. Assim,  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ . Temos:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 4$$

e, portanto,  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ . A construção das bases baseia-se no Exercício 13 da Seção 5.6. Por exemplo, se fizermos  $z = 1$  no sistema (5.24) que define  $W_1 \cap W_2$ , encontramos  $t = 1$ ,  $y = 0$  e  $x = 0$  e  $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, 1)\}$  é uma base de  $W_1 \cap W_2$ .

16. Dado  $v \in W_1 \cap W_2$ , então  $v = (x, t/2, t, t) = (a, b + c, b, c)$  e daí resulta  $x = a$ ,  $b = c = t = 0$ ; logo,  $v = (1, 0, 0, 0)$  e temos  $W_1 \cap W_2 = [(1, 0, 0, 0)]$ . Observando que:

$$W_1 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1/2, 1, 1)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)]$$

encontramos  $\dim W_1 = 2$  e  $\dim W_2 = 3$  e, assim,  $\dim(W_1 + W_2) = 4$ , acarretando  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ . A soma não é direta, porque  $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ .

17. (a) As bases  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$  de  $W_1$  e  $W_2$  são construídas de forma direta:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

O subespaço  $W_1 \cap W_2$  é constituído das matrizes do tipo  $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$  e uma base desse subespaço

é  $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ . A dimensão do subespaço  $W_1 + W_2$  é igual a 3 e ele é gerado pelos vetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que esses vetores são LD, porque  $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$ , e eliminando, por exemplo, o vetor  $v_1$  temos que  $\mathcal{B}_4 = \{v_2, v_3, v_4\}$  é base de  $W_1 + W_2$ .

(b)  $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y & x + z \\ x + y & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$  e o vetor  $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  não está em  $W_1 + W_2$ .

18. (a) Os vetores (polinômios)  $v_1, v_2$  e  $v_3$  são LD. De fato:

$$\begin{aligned} xv_1 + yv_2 + zv_3 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y(1 - t + t^2) + z(1 - 2t + 2t^2) = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow (x + y + z) + (-y - 2z)t + (y + 2z)t^2 = 0, \quad \forall t, \end{aligned}$$

e da última equação segue que os coeficientes  $x$ ,  $y$  e  $z$  devem satisfazer ao sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

com 1 grau de liberdade (uma variável livre). O sistema tem uma infinidade de soluções e, portanto, os vetores são LD.

- (b) O vetor  $v_3$  por ser combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ , pode ser sacado do conjunto gerador, restando  $v_1$  e  $v_2$  geradores LI de  $W$ , isto é,  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  é uma base de  $W$  e  $\dim W = 2$ .
- (c) Como  $\dim \mathbb{P}_2 = 3$ , para formar uma base de  $\mathbb{P}_2$  devemos acrescentar ao conjunto  $\{v_1, v_2\}$  um terceiro vetor LI com  $v_1$  e  $v_2$ . Seja  $v = a + bt + ct^2$  um tal vetor. Como  $v_1$  e  $v_2$  são LI, para que  $v_1, v_2$  e  $v$  também sejam LI basta que  $v$  não seja combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ . Ora,

$$\begin{aligned} v &= x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \Leftrightarrow v = (x + y) + (-y)t + yt^2 \\ &\Leftrightarrow a + bt + ct^2 = (x + y) + (-y)t + yt^2 \\ &\Leftrightarrow a = x + y, \quad b = -y \quad \text{e} \quad c = y. \qquad (\Rightarrow b = -c) \end{aligned}$$

Se  $b \neq -c$ , então o vetor  $v$  não é combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$  e considerando  $v = 1 + t + t^2$  o conjunto  $\{v_1, v_2, v\}$  é uma base de  $\mathbb{P}_2$ , contendo os vetores  $v_1$  e  $v_2$ .

19. Construa uma base do subespaço  $\mathcal{M}_S$  das matrizes simétricas e mostre, usando Indução Finita, que  $\dim \mathcal{M}_S = \frac{n(n+1)}{2}$ . Com o resultado, conclua que:

$$\dim \mathcal{M}_A = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

20. Recorde-se que  $\dim V = n^2$  e o subespaço  $W_S$ , das matrizes simétricas, tem dimensão  $\frac{1}{2}n(n+1)$ .
- (a) No máximo  $\frac{1}{2}n(n+1)$     (b) Não, porque  $\dim V > \dim W_S$ .

21. O conjunto

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

não pode ser uma base do  $\mathbb{R}^3$ , porque  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  e o conjunto  $\mathcal{B}$  tem 4 vetores.

22. O subespaço  $W_1$  é o espaço solução do sistema  $x+2y+z=0$ , o qual tem grau de liberdade 2. Assim,  $\dim W_1 = 2$  e o subespaço  $W_2$  que procuramos deve ter dimensão 1. Com a construção usada no Exercício 13 da Seção Escrevendo para Aprender 5.6, temos que  $\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -2)\}$  é uma base de  $W_1$  e acrescentando à  $\mathcal{B}_1$  o vetor  $v = (0, 0, 1)$  obtemos uma base do  $\mathbb{R}^3$ . Se  $W_2 = [(0, 0, 1)]$  é o subespaço gerado pelo vetor  $v$ , então  $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ .
23. Seja  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  uma base de  $V$  e os subespaços:  $W_1 = [v_1]$ ,  $W_2 = [v_2]$  e  $W_3 = [v_3]$ .
24. Dada uma matriz quadrada  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , considere as matrizes  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  e  $C = (c_{ij})_{n \times n}$ , sendo:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij}, \text{ se } i \neq j \text{ e } b_{ii} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n. \\ c_{ij} &= 0, \text{ se } i \neq j \text{ e } c_{ii} = a_{ii}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Deduzza que  $B \in W_1$ ,  $C \in W_2$  e  $A = B + C$ . Além disso, verifique que  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ . Quanto à dimensão, note que  $\dim W_2 = n$  e, portanto:

$$\dim W_1 = \dim \mathcal{M}_{n \times n} - \dim W_2 = n^2 - n.$$

---

### ESCREVENDO PARA APRENDER 5.7

$$1. \text{ (a) } [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{(b) } [v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \bullet [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

$$2. \text{ (a) } [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(b) } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. \text{ Por inversão, obtemos } [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ e, portanto, } [v]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \bullet [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Sendo  $f = (1 - t^2)^2$ , então

$$f' = -4t + 4t^3, \quad f'' = -4 + 12t^2, \quad f''' = 24t \quad \text{e} \quad f^{(4)} = 24$$



e, portanto,  $\mathcal{B}' = \{24, 24t, -4 + 12t^2, -4t + 4t^3\}$ . Tendo em vista que  $\dim P_3 = 4$ , é suficiente provar que  $\mathcal{B}'$  é um conjunto com 4 vetores LI. De fato, considerando uma combinação linear nula dos vetores de  $\mathcal{B}'$ , encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= 24x_1 + (24x_2)t + x_3(-4 + 12t^2) + x_4(-4t + 4t^3) \\ &\Leftrightarrow (24x_1 - 4x_3) + (24x_2 - 4x_4)t + (12x_3)t^2 + (4x_4)t^3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes a zero, resulta  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ .

(b) Para chegar à matriz  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , de mudança da base  $\mathcal{B}'$  para a base  $\mathcal{B}$ , iniciamos escrevendo cada vetor  $w_j$  da base  $\mathcal{B}'$  como combinação linear dos vetores  $v_i$  da base  $\mathcal{B}$ , como na tabela.

| $\mathcal{B}'$     | combinação linear de $v_1, v_2, v_3$ e $v_4$                           | $\mathcal{B}$ |
|--------------------|--|---------------|
| $w_1 = 24$         | $24 = 24 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$          | $v_1 = 1$     |
| $w_2 = 24t$        | $24t = 0 \cdot v_1 + 24 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$         | $v_2 = t$     |
| $w_3 = -4 + 12t^2$ | $-4 + 12t^2 = -4 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 12 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$ | $v_3 = t^2$   |
| $w_4 = -4t + 4t^3$ | $-4t + 4t^3 = 0 \cdot v_1 + -4 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 4 \cdot v_4$  | $v_4 = t^3$   |

Assim, a matriz de mudança  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  é:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. O procedimento para construir a matriz  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  é expressar cada vetor  $u_i$  da base  $\mathcal{B}$  como combinação linear dos vetores  $v_j$  da base  $\mathcal{B}'$ ; as colunas da matriz são precisamente os vetores coordenadas  $[u_i]_{\mathcal{B}'}$ . Fazendo  $v_1 = (a, b)$  e  $v_2 = (c, d)$  e observando a matriz  $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ , temos:

$$(1, 0) = 1 \cdot (a, b) + (-1) \cdot (c, d)$$

$$(0, 1) = 1 \cdot (a, b) + 2 \cdot (c, d)$$

de onde resulta  $a = 2/3$ ,  $b = 1/3$ ,  $c = -1/3$  e  $d = 1/3$ . Logo,  $v_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  e  $v_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

6. O sistema (5.18) é:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta & \text{(I)} \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta & \text{(II)} \end{cases}$$

(i) Multiplicamos (I) por  $\cos \theta$  e (II) por  $-\operatorname{sen} \theta$  e somamos membro a membro, para obter

$$\bar{x} \cos \theta - \bar{y} \operatorname{sen} \theta = x.$$

(ii) Multiplicamos (I) por  $\operatorname{sen} \theta$  e (II) por  $\cos \theta$ , somamos membro a membro e obtemos

$$\bar{x} \operatorname{sen} \theta + \bar{y} \cos \theta = y.$$

Daí resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

7. Não, porque a matriz  $A$  não é invertível. Note que  $\det A = 0$ .

8.  $\mathcal{B}' = \{(9, -22), (2, 12)\}$ .

9. Veja que as entradas da matriz de mudança de base  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  abaixo da diagonal principal são nulas e, por esta razão, ela é triangular superior.

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### REVISANDO O CONTEÚDO

1. O conjunto  $\{u + v + 2w, u + v, u - v - w\}$  é também LI. De fato, a equação vetorial

$$x \cdot (u + v + 2w) + y \cdot (u + v) + z \cdot (u - v - w) = \mathbf{0}$$

nos conduz à solução  $x = y = z = 0$ . Procedimento similar pode ser utilizado para testar se o conjunto  $\{u + v - 3w, u + v, u + 3v - w\}$  é LI ou LD.

2. O vetor  $v = (\pi, \pi)$  está em  $W$ , enquanto  $\frac{1}{2}v = (\pi/2, \pi/2) \notin W$ , já que  $\cos(\pi/2 + \pi/2) = -1$ . Para verificar que  $U$  não é um subespaço vetorial, considere o vetor  $w = (\pi/2, \pi/2, 0)$  de  $U$  e note que  $\frac{1}{2}w$  não pertence a  $U$ .

3. O conjunto  $\mathcal{B} = \{1\}$  é uma base do espaço vetorial  $\mathbb{F}$ . O conjunto  $\mathcal{B}' = \{1, i\}$  é uma base do espaço  $\mathbb{C}$ , quando considerado um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Olhando  $\mathbb{C}$  como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ , uma base é  $\mathcal{B} = \{1\}$ .

4. É claro que cada vetor  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , jaz no subespaço  $[v_1, v_2, \dots, v_k]$ . Se  $W$  é qualquer subespaço de  $V$  contendo os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , então as combinações lineares

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_k \cdot v_k$$

estão em  $W$  e, conseqüentemente,  $[v_1, v_2, \dots, v_k] \subset W$ .

5. Se, por exemplo,  $W_1 \subset W_2$ , então  $W_1 \cup W_2 = W_2$  e nada há a demonstrar. Por outro lado, suponha que  $W_1 \cup W_2$  seja um subespaço e que nenhum deles esteja contido no outro. Escolha  $v_1$  e  $v_2$ , de modo que

$$v_1 \in W_1 \setminus W_2 \quad \text{e} \quad v_2 \in W_2 \setminus W_1.$$

Note que  $v_1, v_2 \in W_1 \cup W_2$  e, portanto,  $v_1 + v_2 \in W_1 \cup W_2$ . Ocorre que  $v_1 + v_2 \notin W_1$  e  $v_1 + v_2 \notin W_2$  e isso faz com que  $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$ .

6. Na forma escalonada, as matrizes geradoras têm posto igual a 2, com linhas não nulas iguais.
7. Mostremos que  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$  é uma base de  $W_1 + W_2$ .

(a) Já sabemos que  $\{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$  gera o subespaço  $W_1 + W_2$ . (veja o Exemplo 5.3.14)

(b) Para mostrar que  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$  é um conjunto de vetores LI, suponha que

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x \cdot u_1 + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 = \mathbf{0}.$$

onde  $x_1, x_2, x, y_1$  e  $y_2$  são escalares. O vetor

$$v = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x \cdot u_1 = -y_1 \cdot v_1 - y_2 \cdot v_2$$

está em  $W_1 \cap W_2$  e, portanto, existem escalares  $t_1$  e  $t_2$ , tais que

$$v = -y_1 \cdot v_1 - y_2 \cdot v_2 = t_1 \cdot w_1 + t_2 \cdot w_2.$$

Logo:

$$y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + t_1 \cdot w_1 + t_2 \cdot w_2 = 0.$$

Como os vetores  $w_1, w_2, v_1, v_2$  são LI, segue que  $y_1 = y_2 = t_1 = t_2 = 0$  e, conseqüentemente,  $v = \mathbf{0}$  e, assim,  $x_1 = x_2 = x = 0$ .

8. Considere os subespaços  $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$  e  $W_2 = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , com bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\},$$

respectivamente. Ressaltamos que  $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$  e que  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  não é uma base de  $W_1 + W_2$ .

9. Não. Considere no espaço  $\mathbb{R}^3$  os subespaços  $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$  e  $W_2 = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Temos que:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$$

e, ainda assim, o espaço  $\mathbb{R}^3$  não é soma (e muito menos soma direta) de  $W_1$  e  $W_2$ . Note que  $W_1 + W_2 = W_1$ , porque  $W_2 \subset W_1$ .

10. Se  $W_1 = [v_1, v_2, \dots, v_k]$  e  $W_2 = [v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n]$ , então  $\dim W_1 = k$  e  $\dim W_2 = n - k$ , de modo que  $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ . Por outro lado, dado  $v \in W_1 \cap W_2$ , temos:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k = x_{k+1} v_{k+1} + x_{k+2} v_{k+2} + \dots + x_n v_n$$

e daí resulta

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k - x_{k+1} v_{k+1} - x_{k+2} v_{k+2} - \dots - x_n v_n = \mathbf{0}.$$

Logo,  $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  e, portanto,  $v = \mathbf{0}$ . Assim,  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  e teremos  $V = W_1 \oplus W_2$ .

11. Note que  $W_1$  e  $W_3$  são planos e, portanto, de dimensão 2, enquanto  $W_2$  é uma reta (o eixo  $z$ ). Nenhum dos planos  $W_1$  ou  $W_3$  contém a reta  $W_2$  e isto nos dá:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad W_3 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3.$$

Finalmente, a soma  $W_1 + W_3 = \mathbb{R}^3$  não é direta, já que  $W_1 \cap W_3 = [(1, -2, 1)]$  e, portanto,  $\dim(W_1 \cap W_3) = 1$ .

12. A partir da relação

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 9 - \dim(W_1 + W_2)$$

deduza que os possíveis valores de  $\dim(W_1 \cap W_2)$  são 2, 3 ou 4.

13. Como  $W_1 \cap W_2$  é um subespaço de  $W_1$  e de  $W_2$ , e  $W_1$  não está contido em  $W_2$ , deduzimos que  $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ . Assim,

$$\dim(W_1 + W_2) = 3 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

e a soma é direta, já que  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ .

14. O subespaço  $W$  é precisamente o espaço  $\mathcal{P}_0$  dos polinômios constantes. Temos  $\dim W = 1$  e uma base de  $W$  é, por exemplo,  $\mathcal{B} = \{1\}$ .

15. Um cálculo direto nos dá:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Se  $v_k \in [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}]$ , então

$$v_k = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_{k-1} v_{k-1}$$

e daí resulta a combinação linear nula

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_{k-1} v_{k-1} + (-1) v_k + 0 v_{k+1} + \dots + 0 v_n = \mathbf{0},$$

onde o escalar  $x_k = -1$  é não nulo. Isto mostra que os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LD. Reciprocamente, suponhamos que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  sejam LD e seja  $k$  o primeiro índice para o qual se tem  $x_k \neq 0$  e

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_{k-1} v_{k-1} + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \dots + x_n v_n = \mathbf{0}.$$

Daí segue que  $x_j = 0$ , para  $k+1 \leq j \leq n$  e, portanto:

$$v_k = \frac{x_1}{x_k} v_1 + \frac{x_2}{x_k} v_2 + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} v_{k-1}.$$



## Introdução

Vamos analisar, do ponto de vista gráfico/algébrico, as funções elementares do cálculo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:

$$f(x) = ax \quad \text{e} \quad g(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \quad \text{e} \quad b \neq 0.$$

Embora gráfica e algebricamente elas sejam muito parecidas, seus gráficos são retas paralelas, como ilustrado na Figura 6.0, a função  $f$  possui propriedades algébricas especiais não atendidas pela função  $g$ , tais como: **(i)**  $f(0) = 0$ , **(ii)**  $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$  e **(iii)**  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  e essas propriedades são válidas sejam quais forem os *vetores*  $x$  e  $y$  e seja qual for o valor atribuído ao escalar  $\lambda$ . De fato, **(i)** decorre de **(ii)**, com  $\lambda = 0$ , e temos:

$$f(\lambda \cdot x) = a \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (ax) = \lambda f(x) \quad \text{e}$$

$$f(x + y) = a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y = f(x) + f(y).$$

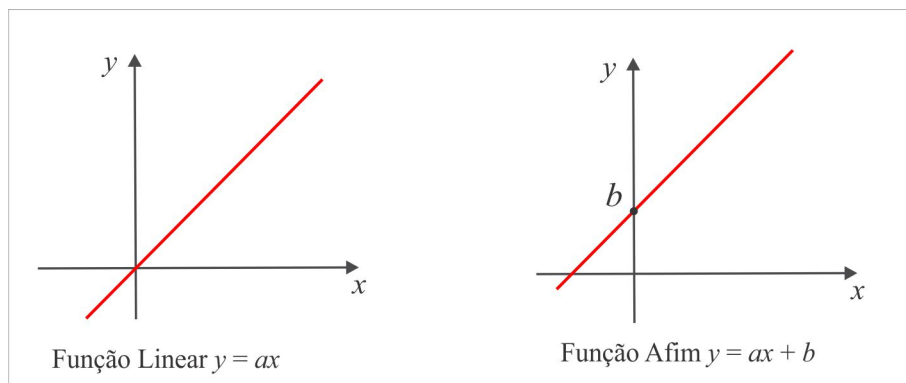


Figura 6.-2: Linear  $\times$  Afim

Como  $b \neq 0$ , vemos que a função  $g$  não goza de nenhuma das propriedades **(i)**, **(ii)** ou **(iii)**; a função  $f$  é conhecida por *Função Linear* e a função  $g$  por *Função Afim*.

Dados dois espaços vetoriais  $V$  e  $W$ , uma *aplicação* (ou *transformação*)  $T : V \rightarrow W$  é uma regra que associa a cada vetor  $v$  do espaço  $V$  um único vetor  $w = T(v)$  no espaço  $W$ . Os espaços  $V$  e  $W$  são, respectivamente, o domínio e o contradomínio da aplicação  $T$ ; o vetor  $w = T(v)$  é a imagem do vetor  $v$  pela aplicação  $T$  e o conjunto:

$$\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$$

recebe o nome de *Conjunto Imagem* ou simplesmente *Imagem* de  $T$ , também representado por  $T(V)$ .

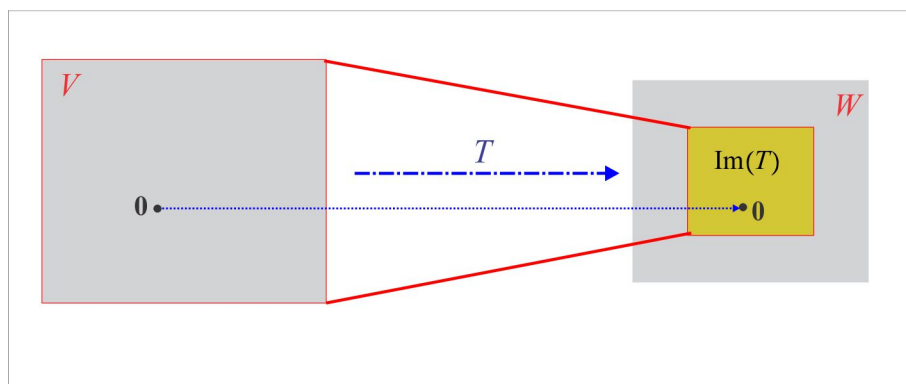


Figura 6.-1: Aplicação Linear  $T : V \rightarrow W$ .

Uma aplicação  $T : V \rightarrow W$  é dita **Linear** se atende às seguintes condições:

$$(i) T(u + v) = T(u) + T(v), \quad u, v \in V \quad \text{e} \quad (ii) T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \quad u \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

As condições (i) e (ii) podem ser compactadas em uma só e temos a equivalência:

$$\text{Uma aplicação } T : V \rightarrow W \text{ é linear se, e somente se, } T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot T(u) + T(v), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad u, v \in V.$$

É oportuno ressaltar que se  $T : V \rightarrow W$  é linear, então  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  (os vetores nulos de  $V$  e  $W$  estão representados pelo mesmo símbolo  $\mathbf{0}$ ). De fato, se  $T$  é linear, então por (ii), temos:

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

e, conseqüentemente, se  $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ , então a aplicação  $T$  não é linear. Confira as seguintes situações:

► A aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $T(x, y) = (x, y, 1)$  não é linear, porque:

$$T(\mathbf{0}) = T(0, 0) = (0, 0, 1) \neq \mathbf{0}.$$

- A aplicação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y, z) = (x, yz)$  não é linear, embora  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Se  $u = (0, 0, 1)$  e  $v = (0, 1, 0)$ , temos que:

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(0, 1, 1) = (0, 1) \quad \text{e} \\ T(u) + T(v) &= T(0, 0, 1) + T(0, 1, 0) = (0, 0). \end{aligned}$$

- A aplicação  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $T(p) = 1 + p(0)$  não é linear, porque  $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ .
- A aplicação  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(p) = p'(1)$  é linear. De fato, dados dois vetores  $p$  e  $q$  no espaço  $\mathbb{P}_3$  e um escalar  $\lambda$ , usando regras de derivação, encontramos:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot p + q) &= (\lambda \cdot p + q)'(1) = \lambda \cdot p'(1) + q'(1) \\ &= \lambda \cdot T(p) + T(q). \end{aligned}$$

Normalmente, as aplicações lineares  $T : V \rightarrow \mathbb{F}$ , em que o contradomínio é o corpo  $\mathbb{F}$ , recebem o nome de **Funcionais Lineares**.

- As translações  $T(x, y) = (x + a, y + b)$  não são lineares, exceto se  $a = 0$  e  $b = 0$ .
- A projeção  $\pi_{xy} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , no plano  $xOy$ , dada por  $\pi_{xy}(x, y, z) = (x, y, 0)$  é linear. Também são lineares as projeções  $\pi_x$  e  $\pi_y$  nos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, dadas por:

$$\pi_x(x, y, z) = (x, 0, 0) \quad \text{e} \quad \pi_y(x, y, z) = (0, y, 0).$$

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.0

---

1. Mostre que a aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  definida por  $T(u) = (u, u)$  satisfaz às condições (6.2).
  2. Repita o exercício precedente com a aplicação  $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $T(u, v) = v$ .
  3. Se  $v$  é um vetor fixado no espaço vetorial  $V$ , a aplicação  $T : V \rightarrow V \times V$ , definida por  $T(u) = (u, v)$ , satisfaz às condições (6.2)?
  4. Se  $V$  e  $W$  são espaços vetoriais, seria  $T : v \mapsto (v, \mathbf{0})$  uma aplicação linear de  $V \rightarrow V \times W$ ?
-



## 6.1 Transformações Elementares do Plano $\mathbb{R}^2$

Uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , além de descrever o tipo mais simples de dependência entre duas variáveis, goza de uma propriedade geométrica interessante: ela transforma retas em retas, como será estabelecido no Lema 6.1.1. Vejamos algumas transformações especiais.

**1. CONTRAÇÕES & DILATAÇÕES:** Dado um número real positivo  $\lambda$ , a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(v) = \lambda v$ , isto é,  $T(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ , recebe o nome de *contração* ou *dilatação*, conforme seja  $\lambda$  menor ou maior do que 1, como ilustrado na Figura 6.0.

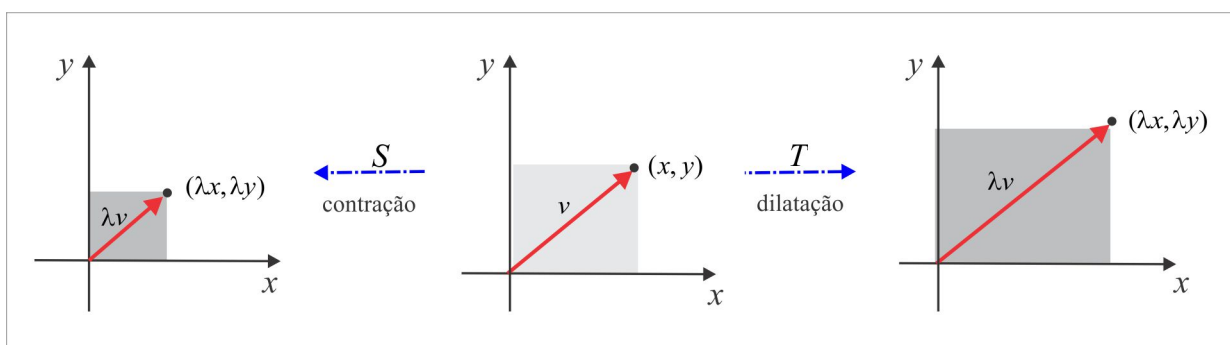


Figura 6.0: Contração & Dilatação.

**2. REFLEXÕES:** As transformações lineares  $R_x$ ,  $R_y$  e  $R_0$  de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definidas por:

$$R_x(x, y) = (x, -y), \quad R_y(x, y) = (-x, y) \quad \text{e} \quad R_0(x, y) = (-x, -y),$$

recebem os nomes de *reflexão no eixo x*, *reflexão no eixo y* e *reflexão na origem*, respectivamente, e estão ilustradas na Figura 6.1.

**3. ROTAÇÃO:** A transformação linear  $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por:

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

é conhecida por *rotação* de um ângulo  $\theta$  e com a notação matricial, temos:

$$R_\theta(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

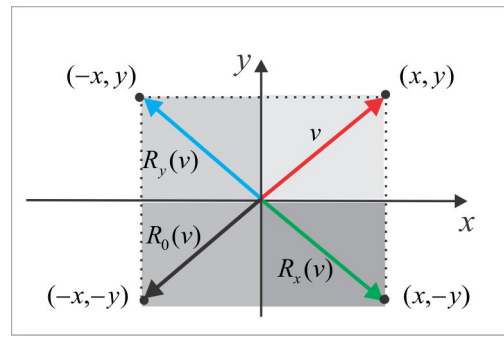


Figura 6.1: Reflexões.

**4. CISALHAMENTOS:** Por *cisalhamento horizontal*, entendemos qualquer transformação linear  $C_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , do tipo  $C_\lambda(x, y) = (x + \lambda y, y)$ , sendo  $\lambda$  uma constante real. Na Figura 6.2 ilustramos um cisalhamento em que  $\lambda > 1$ . Como seria um *cisalhamento vertical*?

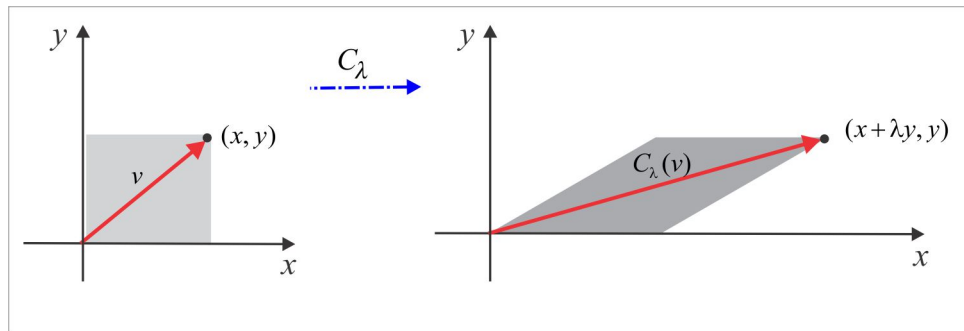


Figura 6.2: Cisalhamento Horizontal.

**LEMA 6.1.1** Uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  transforma retas em retas.

**Prova:** Primeiro observamos que se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma aplicação linear, existem escalares  $a, b, c$  e  $d$ , tais que:

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (u, v)$$

e mostremos que a imagem da reta  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0 + \alpha t, y = y_0 + \beta t, t \in \mathbb{R}\}$  é uma reta no plano  $\mathbb{R}^2$  (plano  $uv$ ). De fato, das relações:

$$u = ax + by \quad \text{e} \quad v = cx + dy$$

encontramos como imagem da reta  $S$  a reta  $S^*$ , dada por:

$$S^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = u_0 + \alpha_0 t, v = v_0 + \beta_0 t, t \in \mathbb{R}\},$$

sendo  $u_0 = ax_0 + by_0$ ,  $v_0 = cx_0 + dy_0$ ,  $\alpha_0 = a\alpha + b\beta$  e  $\beta_0 = c\alpha + d\beta$ . ■

**EXEMPLO 6.1.2** Seja  $S$  o quadrado de vértices  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(1,1)$  e  $C(0,1)$  e determinemos a imagem de  $S$  pela transformação linear  $T(x, y) = (x - y, x + 2y)$ . Considerando que  $T$  transforma retas em retas, vemos que a imagem  $T(S)$  é o quadrilátero ilustrado na Figura 6.3, de vértices

$$T(\mathbf{0}) = (0, 0), \quad T(A) = (1, 1), \quad T(B) = (0, 3) \quad \text{e} \quad T(C) = (-1, 2)$$

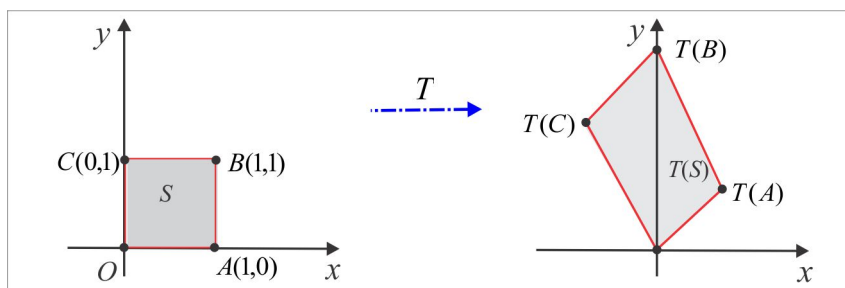


Figura 6.3: Imagem de um Quadrado.

## 6.2 Operações com Aplicações Lineares

Com o objetivo de tornar o conjunto  $\mathcal{L}(V, W)$  das aplicações lineares  $T : V \rightarrow W$  um espaço vetorial é necessário definir em  $\mathcal{L}(V, W)$  as operações soma de aplicações lineares e produto de uma aplicação linear por um escalar. Dadas duas aplicações lineares  $T : V \rightarrow W$  e  $S : V \rightarrow W$  e  $\lambda$  um escalar, definimos:

$$\begin{aligned} \text{SOMA:} \quad & (T + S)(v) = T(v) + S(v) \\ \text{PRODUTO:} \quad & (\lambda \cdot T)(v) = \lambda \cdot T(v). \end{aligned} \tag{6.3}$$

É claro  $\mathcal{L}(V, W)$  é fechado para essas operações, isto é,  $T + S$  e  $\lambda \cdot T$  estão em  $\mathcal{L}(V, W)$  e as propriedades (EV1)-(EV8) são atendidas, onde o vetor nulo é a aplicação linear identicamente nula  $\mathbf{0}(v) = \mathbf{0}$ ,  $\forall v \in V$ .

Aqui ressaltamos duas situações:

- (i) **FUNCIONAIS LINEARES** As aplicações lineares  $T : V \rightarrow \mathbb{F}$ , em que o espaço de chegada é o corpo  $\mathbb{F}$  (em geral  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  é o corpo dos números reais), são conhecidas na literatura por *funcionais lineares*. Decorre das propriedades da derivação e integração que os funcionais abaixo são lineares.

(a)  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(p) = \int_0^1 p(x) dx$  e (b)  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(p) = p'(0)$ .

(ii) **OPERADORES LINEARES** No caso em que  $W = V$ , o espaço  $\mathcal{L}(V, V)$  é normalmente indicado por  $\mathcal{L}(V)$  e seus vetores (que são as aplicações lineares  $T : V \rightarrow V$ ) são normalmente conhecidos por *Operadores* de  $V$ . Além do operador nulo, outro operador de  $V$ , de fundamental importância, é a identidade  $I : V \rightarrow V$ , dada por  $I(v) = v$ .

Além das operações usuais (6.3), ressaltamos a importância da *composição* de aplicações lineares. Dados  $U$ ,  $V$  e  $W$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{F}$ , sejam  $T : U \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow W$  aplicações lineares, como ilustrado na Figura 6.4, e definimos uma nova aplicação  $S \circ T : U \rightarrow W$  por:

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)), \quad u \in U,$$

que jaz no espaço  $\mathcal{L}(U, W)$ , ou seja, é uma aplicação linear de  $U \rightarrow W$ . De fato, da linearidade das aplicações  $S$  e  $T$ , temos:

$$\begin{aligned} (S \circ T)(\lambda \cdot u + v) &= S(T(\lambda \cdot u + v)) = S(\lambda \cdot T(u) + T(v)) = S(\lambda \cdot T(u)) + S(T(v)) \\ &= \lambda \cdot S(T(u)) + S(T(v)) = \lambda \cdot (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v). \end{aligned}$$

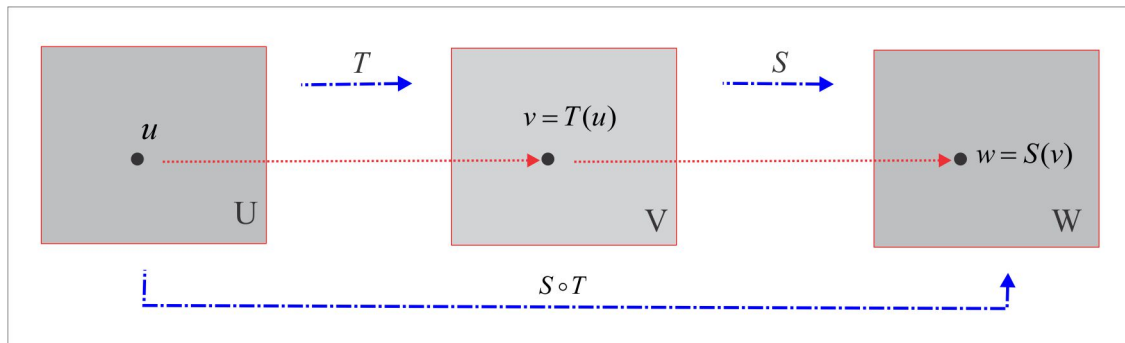


Figura 6.4: Composição de Aplicações Lineares.

**EXEMPLO 6.2.1** Se  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  são as aplicações lineares definidas por:

$$T(x, y) = (x, y, x + 2y) \quad e \quad S(x, y, z) = (2x, y - z),$$

a aplicação composta  $S \circ T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é tal que:

$$S \circ T(x, y) = S(x, y, x + 2y) = (2x, -x - y).$$

1. Verifique quais das aplicações  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  abaixo são lineares.
  - (a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x - y, 0)$
  - (b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y) = (x, y, x + y)$
  - (c)  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(x) = ax$
  - (d)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z, t) = (y - x, t - z)$
  - (e)  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x) = (x, \cos x)$
  - (f)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (x - 1, y + z)$
  - (g)  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T(x) = (x, -x, x^2, 0)$
  - (h)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (x, z - y)$
2. Seja  $A$  uma matriz quadrada  $2 \times 2$  e defina  $T_A : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$  por  $T_A(X) = AX$ . É a aplicação  $T_A$  linear?
3. Mostre que a aplicação  $T : \mathcal{M}_{3 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}$  definida por  $T(X) = X^t$  é linear.
4. Construa duas matrizes  $A$  e  $B$ , de ordem  $2 \times 2$ , tais que  $\det(A) = \det(B) = 0$  e  $\det(A + B) \neq 0$ . A partir daí conclua que a aplicação  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $T(X) = \det(X)$ , não é linear.
5. Verifique que as aplicações abaixo são lineares.
  - (a)  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{1 \times 2}$ ,  $T(x) = \begin{pmatrix} x & ax \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
  - (b)  $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(A) = \text{tr}(A)$ .
  - (c)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 1} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ ,  $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ .
  - (d)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{P}_2$ ,  $T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x - y, z - t)$ .
  - (e)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{P}_2$ ,  $T \begin{pmatrix} x & y \\ z & r \end{pmatrix} = (x - y)t^2 + zt + r$ .
6. Verifique se a transformação  $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$ , definida por  $T(p)(x) = x + xp(x)$  é linear. E a aplicação  $S : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ , definida por  $S(p)(x) = p(x) + x^2p'(x)$ , é linear?
7. Encontre a aplicação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $T(1, 2) = (1, 1)$  e  $T(0, 1) = (1, 0)$ .
8. Seja  $V = \mathcal{M}_{n \times n}$  o espaço das matrizes quadradas de ordem  $n$ . Fixada uma matriz  $A$  em  $V$ , decida sobre a linearidade das transformações:
  - (a)  $T(X) = A + X$
  - (b)  $S(X) = AX - XA$ .

9. Identifique a imagem do retângulo  $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2]$  pela aplicação  $T(x, y) = (x - y, -x + 2y)$ . Esboce graficamente o retângulo  $\mathcal{R}$  e sua imagem  $T(\mathcal{R})$ .
10. Qual a aplicação linear  $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$  que satisfaz a:  $T(x + 1) = x^2 - 1$  e  $T(x - 1) = x^2 + x$ ?
11. Qual o operador  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  que satisfaz às condições  $T(1) = x$ ,  $T(x) = 1 - x^2$  e  $T(x^2) = x + 2x^2$ ?
12. Encontre as aplicações  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que:

$$T(1, 1) = (3, 2, 1), T(0, -1) = (0, 1, 0), S(1, 2, 1) = (1, 1), S(0, 0, 1) = (0, 0) \text{ e } S(0, 1, 0) = (0, -2).$$

Calcule  $T(1, 0)$  e  $T(0, 1)$  e encontre  $S \circ T$ .

13. Encontre a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que representa uma rotação de  $\pi/4$  rad, seguida de uma dilatação de  $\sqrt{2}$ .
14. Descreva a transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que representa uma reflexão em torno da reta  $y = x$ .
15. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação linear, definida por  $T(x, y) = (x + y, x - y)$ . Mostre que:

$$T^2 = 2 \cdot T, \quad T^3 = 4 \cdot T \quad \text{e} \quad T^4 = 8 \cdot T.$$

Usando o processo indutivo, deduza que  $T^n = 2^{n-1} \cdot T$ .

16. Construa dois operadores lineares não nulos  $S, T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que  $T^2 = I$  e  $S^2 = S$ .

### 6.3 Núcleo, Imagem & Isomorfismo

A cada transformação linear  $T : V \rightarrow W$ , associamos os seguintes subconjuntos:

► NÚCLEO OU KERNEL DE  $T$  Indicado por  $\mathcal{N}(T)$  ou  $\ker(T)$  o núcleo da transformação linear  $T$  é definido por:

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}\} = \ker(T). \quad (\text{subespaço vetorial de } V)$$

► IMAGEM DE  $T$  Indicada por  $\text{Im}(T)$  ou  $T(V)$  a imagem da transformação linear  $T$  é definida por:

$$\text{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v), \text{ para algum } v \in V\} = T(V). \quad (\text{subespaço vetorial de } W)$$

Tendo em vista que  $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , concluímos que o vetor nulo  $\mathbf{0}$  de  $V$  jaz no subconjunto  $\ker(T)$ , enquanto o vetor nulo  $\mathbf{0}$  de  $W$  jaz na imagem  $\text{Im}(T)$  e, portanto,  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  são subconjuntos não vazios ( $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  são subespaços vetoriais de  $V$  e  $W$ , respectivamente). Na Figura 6.5 ilustramos graficamente o núcleo e a imagem de uma aplicação linear  $T : V \rightarrow W$ .

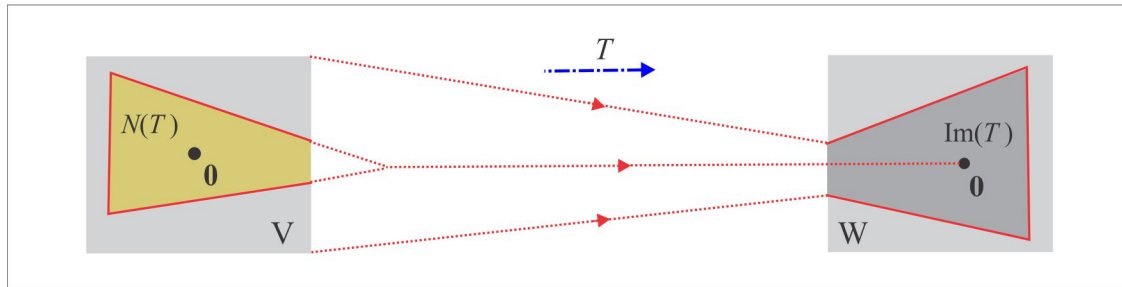


Figura 6.5: Núcleo & Imagem.

**LEMA 6.3.1 (Estrutura Linear de  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$ )** *Os subconjuntos  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  são subespaços vetoriais de  $V$  e  $W$ , respectivamente.*

**Prova:** Sejam  $u$  e  $v$  dois vetores de  $\ker(T)$  e  $\lambda$  um escalar. Temos que  $T(u) = T(v) = \mathbf{0}$ , e assim:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de onde resulta que  $\ker(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ . Por outro lado, dados  $w_1$  e  $w_2$  em  $\text{Im}(T)$ , existem  $v_1$  e  $v_2$  no espaço  $V$ , tais que  $T(v_1) = w_1$  e  $T(v_2) = w_2$  e pela linearidade de  $T$  deduzimos que:

$$\lambda \cdot w_1 + w_2 = \lambda \cdot T(v_1) + T(v_2) = T(\lambda \cdot v_1 + v_2) \quad (6.4)$$

e a relação (6.4) nos diz que  $\lambda \cdot w_1 + w_2$  jaz em  $\text{Im}(T)$ . ■

**LEMA 6.3.2 (Conjunto Gerador de  $\text{Im}(T)$ )** *Se  $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é um conjunto gerador do espaço vetorial  $V$ , então  $\mathcal{G}' = \{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$  é um conjunto gerador da imagem  $\text{Im}(T)$ .*

**Prova:** Seja  $w = Tv$ ,  $v \in V$ , um vetor genérico do subespaço  $\text{Im}(T)$ . Como  $\mathcal{G}$  gera o espaço  $V$ , existem escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tais que:

$$v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n$$

e daí resulta:

$$w = Tv = x_1 \cdot Tv_1 + x_2 \cdot Tv_2 + \dots + x_n \cdot Tv_n. \quad (6.5)$$

Como queríamos, vemos em (6.5) o vetor  $w$  escrito como combinação linear dos vetores de  $\mathcal{G}'$ . ■

É oportuno ressaltar que se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$ , então o subespaço  $\text{Im}(T)$  é gerado pelos vetores  $Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n$  e dentre esses geradores podemos extrair uma base de  $\text{Im}(T)$ . Por outro lado, o núcleo de  $T$  pode ser visto, em muitos casos, como o espaço solução de um sistema linear homogêneo, cuja dimensão é igual ao grau de liberdade, e uma base do núcleo pode ser construída usando as variáveis livres do sistema.

**EXEMPLO 6.3.3** Uma aplicação linear com kernel nulo, isto é,  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ , transforma vetores LI em vetores LI. De fato, se  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LI e

$$x_1 \cdot Tv_1 + x_2 \cdot Tv_2 + \dots + x_n \cdot Tv_n = \mathbf{0}$$

então  $T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2, \dots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0}$  e daí resulta

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2, \dots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

já que  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ . Como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  são LI, segue de (6.6) que  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

**EXEMPLO 6.3.4** Seja a transformação linear  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dada por:

$$T(x, y, z) = (x - z, 0, y, x + y - z).$$

Vamos encontrar uma base de  $\ker(T)$ , outra de  $\text{Im}(T)$  e com o resultado comprovar a relação:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T).$$

(i) **Explorando**  $\ker(T)$ : Dado um vetor  $v = (x, y, z)$  do núcleo de  $T$ , temos:

$$T(v) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x - z = 0, \quad y = 0, \quad \text{e} \quad x + y - z = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ e } x = z.$$

Logo,  $\ker(T) = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$  e  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1)\}$  é uma base de  $\ker(T)$ . ( **$\dim \ker(T) = 1$** )

(ii) **Explorando**  $\text{Im}(T)$ : Seja  $w = (x - z, 0, y, x + y - z)$  um vetor genérico de  $\text{Im}(T)$ . Temos:

$$\begin{aligned} w &= (x - z, 0, y, x + y - z) = (x, 0, 0, x) + (0, 0, y, y) + (-z, 0, 0, -z) \\ &= x \cdot (1, 0, 0, 1) + y \cdot (0, 0, 1, 1) + z \cdot (-1, 0, 0, -1) \end{aligned}$$

Logo,  $\text{Im}(T) = [(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (-1, 0, 0, -1)]$  e uma base de  $\text{Im}(T)$  pode ser extraída do conjunto gerador de duas maneiras:



- (a) **Eliminando a dependência linear dos geradores:** O vetor  $w_3 = (-1, 0, 0, -1)$  é um múltiplo escalar do vetor  $w_1 = (1, 0, 0, 1)$  e pode ser sacado do conjunto gerador, restando os geradores LI  $w_1 = (1, 0, 0, 1)$  e  $w_2 = (0, 0, 1, 1)$ , que formam a base  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2\}$  de  $\text{Im}(T)$ . (dim Im(T) = 2)
- (b) **Por escalonamento da matriz geradora:** Escalonando a matriz  $A$  cujas colunas são os geradores  $w_1, w_2$  e  $w_3$ , encontramos:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde destacamos as colunas-pivô  $j_1 = 1$  e  $j_2 = 2$  (primeira e segunda colunas) e isto nos conduz à base  $\{w_1, w_2\}$ . (dim Im(T) = 2)

Por fim, temos

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = 1 + 2 = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T).$$

**EXEMPLO 6.3.5** Seja  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}$  a aplicação linear definida por:

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z-t & 0 \end{pmatrix}$$

e identifiquemos os subespaços  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$ .

**Solução:** Um vetor (matriz)  $A$  jaz no núcleo de  $T$  se, e só se,  $T(A) = \mathbf{0}$ .

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z-t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \text{ e } z = t.$$

Logo, o núcleo de  $T$  é constituído das matrizes  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & z \end{pmatrix}$  e temos  $\dim \ker(T) = 1$ . A imagem de  $T$  é o

subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 3}$  constituído das matrizes  $B$  do tipo:

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z-t & 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e do conjunto gerador  $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$  extraímos, por eliminação da dependência linear, a base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Logo,  $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$  e, mais uma vez, comprovamos a relação:

$$\dim \mathcal{M}_{2 \times 2} = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \operatorname{Im}(T). \quad (4 = 1 + 3)$$

O seguinte resultado, que relaciona as dimensões do domínio  $V$ , do núcleo  $\mathcal{N}(T)$  e da imagem  $\operatorname{Im}(T)$  de uma transformação linear  $T : V \rightarrow W$ , é conhecido por *Teorema do Núcleo e da Imagem* e se constitui em um dos mais importantes resultados de álgebra linear em dimensão finita.

**TEOREMA 6.3.6 (Teorema do Núcleo e da Imagem)** *Se  $T : V \rightarrow W$  é uma transformação linear entre espaços vetoriais  $V$  e  $W$ , de dimensão finita, então:*

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \operatorname{Im}(T). \quad (6.7)$$

**Demonstração:** No caso em que  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  e  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$ , combinando o Lema 6.3.2 com o Exemplo 6.3.3 resulta que  $\mathcal{B}' = \{Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n\}$  é uma base de  $\operatorname{Im}(T)$  e o teorema está demonstrado, neste caso. Suponhamos  $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$  e seja  $\mathcal{B}'' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de  $\ker(T)$ , a qual é completada a uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  do espaço  $V$ , e mostremos que  $\mathcal{B}''' = \{Tv_{k+1}, \dots, Tv_n\}$  é uma base de  $\operatorname{Im}(T)$ . De fato, é claro que  $\mathcal{B}'''$  é um conjunto LI e dado  $w \in \operatorname{Im}(T)$ , então:

$$w = T \left( \underbrace{\sum_{i=1}^k x_i \cdot v_i}_{= \mathbf{0}} \right) + T \left( \sum_{j=k+1}^n x_j \cdot v_j \right) = \sum_{j=k+1}^n x_j \cdot T(v_j). \quad (6.8)$$

Resulta de (6.8) que  $\mathcal{B}'''$  é um conjunto gerador de  $\operatorname{Im}(T)$ , constituído de vetores LI, sendo, por conseguinte, uma base de  $\operatorname{Im}(T)$ . Para concluir, resta-nos observar que:

$$\dim V = n = k + (n - k) = \dim \ker(T) + \dim \operatorname{Im}(T). \quad \blacksquare$$

**EXEMPLO** Como ilustração, vamos encontrar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem do operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por  $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ . Inicialmente, observamos que:

$$(x, y, z) \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (z, x - y, -z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{e} \quad x - y = 0$$

e, portanto, o núcleo de  $T$  é o subespaço  $\mathcal{N}(T) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Uma base  $\mathcal{N}(T)$  é  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0)\}$  e  $\dim \mathcal{N}(T) = 1$ . Quanto à imagem, esta é gerada pelos vetores  $T(\mathbf{e}_1)$ ,  $T(\mathbf{e}_2)$  e  $T(\mathbf{e}_3)$ , isto é:

$$\text{Im}(T) = [(0, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, -1)].$$

e escalonando a matriz geradora de  $\text{Im}(T)$ , encontramos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde extraímos a base  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$  de  $\text{Im}(T)$  e  $\dim \text{Im}(T) = 2$ . Por fim, notamos que

$$w \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow w = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 0) \Leftrightarrow w = (x, y, -x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

e, sendo assim,  $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x\}$ .

### 6.3.1 Conceito & Ações de um Isomorfismo

Uma aplicação linear  $T : V \rightarrow W$  diz-se *Injetora* ou *Injetiva* quando:

$$T(u) = T(v) \Leftrightarrow u = v$$

e isto indica que vetores distintos de  $V$  têm imagens distintas em  $W$ . O núcleo de  $T$  pode ser usado para determinar a injetividade, como mostra o seguinte resultado.

**LEMA 6.3.7** *A transformação  $T : V \rightarrow W$  é injetora se, e somente se,  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ .*

**Prova:** Suponhamos que  $T$  seja injetora e seja  $v$  um vetor do núcleo de  $T$ . Temos:

$$T(v) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0})$$

e da injetividade resulta  $v = \mathbf{0}$ . Reciprocamente, se  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  e  $T(u) = T(v)$ , então:

$$T(u - v) = \mathbf{0} \Leftrightarrow u - v \in \ker(T) \Leftrightarrow u = v$$

e daí segue a injetividade de  $T$ . ■

**EXEMPLO 6.3.8** Para comprovar que a aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $T(x, y) = (x - y, 2x + y, x - 4y)$ , é injetora, basta notar que:

$$\begin{aligned} v &= (x, y) \in \ker(T) \Leftrightarrow T(x, y) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (x - y, 2x + y, x - 4y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Logo,  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  e do Lema 6.3.7 segue a injetividade de  $T$ .

No caso em que  $\text{Im}(T) = W$  a aplicação linear  $T : V \rightarrow W$  é dita *Sobrejetora* ou *Sobrejetiva*. Dito de outra forma,  $T : V \rightarrow W$  é sobrejetora quando todo vetor  $w$  de  $W$  for imagem de algum vetor  $v$  de  $V$ , isto é,  $T(v) = w$ . No caso em que  $W \neq \{\mathbf{0}\}$ , isto ocorre se, e somente se,  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim W$ .

**EXEMPLO 6.3.9** A aplicação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$  é sobrejetora. De fato, dado  $w = (a, b)$  um vetor do  $\mathbb{R}^2 = W$ , então os vetores  $v = (x, x - a, b - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , satisfazem a equação vetorial  $w = T(v)$ .

Imaginemos uma aplicação linear  $T : V \rightarrow W$ , com a seguinte propriedade: dado um vetor  $w$  no espaço  $W$ , existe no espaço  $V$  **um único vetor  $v$** , tal que  $T(v) = w$ . Uma tal aplicação é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora e, por essa razão, denominada *Isomorfismo* e os espaços vetoriais  $V$  e  $W$  ditos *isomorfos* e anota-se  $V \approx W$ .

Uma aplicação linear  $T : V \rightarrow W$  entre dois espaços vetoriais  $V$  e  $W$  é um isomorfismo se, e só se: dado  $w \in W$ , existe um único  $v \in V$ , tal que  $T(v) = w$ . Se  $V$  e  $W$  têm dimensão finita a aplicação  $T : V \rightarrow W$  é um isomorfismo se, e só se,  $\dim \ker(T) = 0$  e  $\dim \text{Im}(T) = \dim W$ .

**EXEMPLO 6.3.10** A aplicação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $T(x, y) = (x + 2y, 3x - 4y)$  é um isomorfismo. De fato:

- (i)  **$T$  é injetora:** Se  $T(x, y) = (0, 0)$ , então  $(x + 2y, 3x - 4y) = (0, 0)$  e daí resulta  $x = 0$  e  $y = 0$ , ou seja  $\ker T = \{\mathbf{0}\}$ .
- (ii)  **$T$  é sobrejetora:** Do Teorema 6.3.6, resulta que  $\dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker(T) = 2$  e, portanto  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$ .

**TEOREMA 6.3.11** Um isomorfismo  $T : V \rightarrow W$  entre espaços vetoriais de dimensão finita transforma uma base de  $V$  em uma base de  $W$ .

**Demonstração:** Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$ , vimos no Lema 6.3.2 que os vetores  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  geram o espaço  $W = \text{Im}(T)$  e resta-nos provar que eles são LI. Da combinação linear nula  $x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \dots + x_n \cdot T(v_n) = \mathbf{0}$ , decorrem os seguintes fatos:

$$\begin{aligned} T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n) &= \mathbf{0} && \text{(por linearidade de } T) \\ x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n &= \mathbf{0} && \text{(por injetividade de } T) \\ x_1 = x_2 = \dots = x_n &= 0 && \text{(pela independência linear de } v_1, \dots, v_n) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**TEOREMA 6.3.12** *Dois espaços vetoriais de dimensão finita  $V$  e  $W$  são isomorfos se, e somente se,  $\dim V = \dim W$ .*

**Prova:** Se  $T : V \rightarrow W$  é um isomorfismo e  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$ , segue do Teorema 6.3.11 que  $\mathcal{B}' = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$  é uma base de  $W$  e, portanto,  $\dim W = \dim V = n$ . Reciprocamente, suponhamos  $\dim V = \dim W$  e sejam  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente. A aplicação linear  $T : V \rightarrow W$ , definida por:

$$T\left(\sum_{j=1}^n x_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot w_j,$$

é um isomorfismo. De fato, dado  $v = \sum_{j=1}^n x_j \cdot v_j$ , com  $T(v) = \mathbf{0}$ , então:

$$\sum_{j=1}^n x_j \cdot w_j = \mathbf{0} \tag{6.9}$$

e de (6.9) resulta que  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  e, assim,  $v = \mathbf{0}$ . Logo,  $T$  é injetora e como  $\dim V = \dim W$ , segue do Teorema 6.3.6 que  $T$  é sobrejetora.  $\blacksquare$

**EXEMPLO 6.3.13** *Os espaços vetoriais  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{P}_n$  não são isomorfos, porque têm dimensões diferentes. O espaço  $V = \mathbb{R}^2$  é isomorfo ao subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ , porque  $\dim V = \dim W = 2$ .*

**EXEMPLO 6.3.14** *A aplicação  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow M_{2 \times 2}$ , definida por:*

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

*estabelece um isomorfismo entre  $\mathbb{R}^4$  e o espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  das matrizes reais  $2 \times 2$ .*

**COROLÁRIO 6.3.15** Um isomorfismo  $T : V \rightarrow W$  é uma aplicação linear invertível, isto é, existe uma aplicação linear  $S : W \rightarrow V$ , tal que:

$$S \circ T = I_V \quad e \quad T \circ S = I_W$$

onde  $I_V : V \rightarrow V$  e  $I_W : W \rightarrow W$  são os operadores identidade:  $I_V(v) = v$  e  $I_W(w) = w$ .

**Prova:** Com as bases  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ,  $w_k = T(v_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , de  $V$  e  $W$ , respectivamente, definimos a aplicação linear  $S : W \rightarrow V$ , tal que  $S(w_j) = v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . A aplicação  $S$  assim definida é a inversa de  $T$ . ■

► **INVERTENDO UMA APLICAÇÃO LINEAR** Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais de dimensão  $n$  e consideremos  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base de  $V$ . Como sabemos, uma aplicação linear invertível  $T : V \rightarrow W$  transforma a base  $\mathcal{B}$  de  $V$  em uma base de  $W$  e podemos usar a base  $\mathcal{B}$  para encontrar a transformação inversa  $S = T^{-1}$ . Se  $w_k = T(v_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , então a inversa  $S : W \rightarrow V$  é caracterizada por  $S(w_k) = v_k$ , isto é:

$$T(v_k) = w_k \Leftrightarrow S(w_k) = v_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

e dado  $w \in W$ , temos  $w = y_1 \cdot T(v_1) + y_2 \cdot T(v_2) + \dots + y_n \cdot T(v_n)$  e, portanto:

$$S(w) = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \dots + y_n \cdot v_n$$

Dado um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$  (por exemplo, o corpo  $\mathbb{R}$ ), é simples verificar que a aplicação identidade  $I(v) = v$  é linear e se  $T$  e  $S$  são aplicações lineares de  $V \rightarrow V$ , tais que  $S \circ T = I$ , diremos que  $S$  é a inversa de  $T$  e anotamos  $S = T^{-1}$ . Por exemplo, a inversa da aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida por  $T(x, y) = (x - y, y)$  é a aplicação  $S(x, y) = (x + y, y)$ .

**EXEMPLO 6.3.16** Vamos encontrar o operador inverso de  $T(x, y, z) = (x + y, x, y + 2z)$  usando a base canônica  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  do  $\mathbb{R}^3$ . Considerando

$$w_1 = T(\mathbf{e}_1) = (1, 1, 0), \quad w_2 = T(\mathbf{e}_2) = (1, 0, 1) \quad e \quad w_3 = T(\mathbf{e}_3) = (0, 0, 2)$$

e notando que:

$$w = (x, y, z) = y \cdot w_1 + (x - y) \cdot w_2 + \frac{1}{2}(-x + y + z) \cdot w_3$$

obtemos o operador inverso  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dado por:

$$S(x, y, z) = y \cdot \mathbf{e}_1 + (x - y) \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2}(-x + y + z) \cdot \mathbf{e}_3 = (y, x - y, \frac{1}{2}(-x + y + z))$$

► CONSEQUÊNCIAS Seja  $T : V \rightarrow W$  uma aplicação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Temos os seguintes resultados:

(I) Se  $\dim V = \dim W$ , então:

$$T \text{ é injetora} \Leftrightarrow T \text{ é sobrejetora.}$$

Prova: Sabemos que  $T$  é injetora se, e só se,  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  e segue do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6 que:

$$\dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \dim W = \dim \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(T) = W.$$

(II) Se  $\dim V > \dim W$ , então  $T$  não pode ser injetora e muito menos um isomorfismo.

Prova: Do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6, lembrando que  $\dim \operatorname{Im}(T) \leq \dim W$ , segue que:

$$\dim \ker(T) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(T) \geq \dim V - \dim W > 0$$

e sendo  $\dim \ker(T) > 0$ , a aplicação  $T$  não pode ser injetora.

(III) Se  $\dim V < \dim W$ , então  $T$  não pode ser sobrejetora e muito menos um isomorfismo.

Prova: Do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6, segue que:

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim V - \dim \ker(T) \leq \dim V < \dim W$$

e sendo  $\dim \operatorname{Im}(T) < \dim W$ , a aplicação  $T$  não pode ser sobrejetora.

**EXEMPLO 6.3.17** Seja  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$  a aplicação linear definida por:

$$T(p) = p + x^2 p'' \quad \left( p'' = \frac{d^2 p}{dx^2} \right)$$

(i) A aplicação  $T$  é linear. De fato, dados dois vetores (polinômios)  $p$  e  $q$  no espaço  $\mathbb{P}_2$  e um escalar  $\lambda$ , temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot p + q) &= \lambda \cdot p + q + x^2 (\lambda \cdot p + q)'' = \lambda \cdot p + q + x^2 (\lambda p'' + q'') \\ &= \lambda \cdot (p + x^2 p'') + (q + x^2 q'') = \lambda \cdot T(p) + T(q) \end{aligned}$$

(ii) Para identificar a imagem da aplicação  $T$ , notamos que  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  jaz na imagem de  $T$  se, e só se,  $a_3 = 0$ . De fato:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 &= T(b_0 + b_1x + b_2x^2) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + x^2(2b_2) \\ &= b_0 + b_1x + 3b_2x^2 \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes, encontramos:  $a_3 = 0$ ,  $a_2 = 3b_2$ ,  $a_1 = b_1$  e  $a_0 = b_0$ . Logo,  $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_2$  e  $\dim \text{Im}(T) = 3$ .

(iii) Qual a dimensão do núcleo de  $T$ ? Como consequência do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6, deduzimos que:

$$\dim \ker(T) = \dim \mathbb{P}_2 - \dim \text{Im}(T) = 0.$$

(iv) A aplicação  $T$  é injetora, porque  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ , mas, não é um isomorfismo, porque não é sobrejetora ( $\dim \text{Im}(T) < \dim W$ ).

**EXEMPLO 6.3.18 (Usando o Núcleo e a Imagem)** Certo operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é tal que:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (1, 0, -1) = w.$$

Para identificar um tal operador seguimos o seguinte roteiro:

**Etapa I** Encontrar uma base  $\mathcal{B}$  do núcleo de  $T$ :

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\} = \{v_1, v_2\}.$$

**Etapa II** Acrescentar à base  $\mathcal{B}$  do núcleo o vetor  $v_3 = (0, 0, 1)$ , cuja imagem é  $w$ , como sugere a Figura 6.6, para chegar à base  $\mathcal{B}'$  do domínio  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (0, 0, 1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

Expressando o vetor  $v = (x, y, z)$  na base  $\mathcal{B}'$ , encontramos:

$$v = (x, y, z) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + (x + y + z) \cdot v_3 \tag{6.10}$$

e de (6.10) resulta:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= x \cdot T(v_1) + y \cdot T(v_2) + (x + y + z) \cdot T(v_3) \\ &= x \cdot \mathbf{0} + y \cdot \mathbf{0} + (x + y + z) \cdot (1, 0, -1) = (x + y + z, 0, -x - y - z). \end{aligned}$$



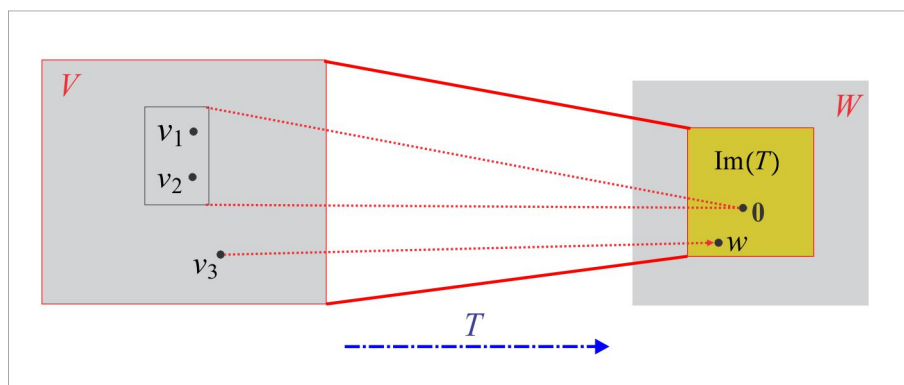


Figura 6.6: Construindo Aplicação Linear.

1. Encontre a transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cujo núcleo contém o vetor  $(0, 2)$ , e é tal que  $T(-1, 1) = (1, 2, 0)$ .
2. Em cada caso, encontre uma base do núcleo e outra da imagem da transformação linear.
  - (a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (2x - y, 0)$ .
  - (b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$ .
  - (c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x + y, x + y)$ .
  - (d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y, z) = (x + 2y, z)$ .
3. Seja  $T_A : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ , definida por  $T_A(X) = A \cdot X$ , sendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ . Determine uma base de  $\mathcal{N}(T_A)$  e outra de  $\text{Im}(T_A)$ .
4. Encontre o núcleo e a imagem do operador  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ , definido por  $T(p(x)) = x^2 p''(x)$ .
5. Encontre um operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\text{Im}(T) = [(1, 2, 3), (4, 0, 5)]$ . Um tal operador pode ser um isomorfismo? Por quê?
6. Encontre uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\mathcal{N}(T) = [(1, 1, 0)]$ . Uma tal aplicação pode ser um isomorfismo? Por quê?

7. Se  $T_1, T_2 : V \rightarrow V$  são operadores lineares, tais que  $\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_2) = 0$ , mostre que  $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) = 0$ .
8. Estabeleça um isomorfismo entre os seguintes pares de espaços vetoriais:
- (a)  $\mathbb{R}^2$  e o subespaço  $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$  (b)  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{P}_2$  (c)  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ .
9. Encontre uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cujo núcleo seja a reta  $y = 2x$ .
10. Seja  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$  o operador definido por:

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c).$$

- (a) O operador  $T$  é injetor? É sobrejetor?
- (b) Dê uma base do núcleo e outra da imagem de  $T$ . Qual o valor de  $\dim \mathcal{N}(T) + \dim \text{Im}(T)$ ?
- (c)  $p(x) = -4x^2 + 2x - 2$  pertence a  $\mathcal{N}(T)$ ? E  $q(x) = 2x + 1$  pertence a  $\text{Im}(T)$ ?
11. Um operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem núcleo  $\mathcal{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  e é tal que  $T(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$ . Encontre um tal operador.
12. Considere o operador derivação  $\partial_1 : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ , definido por  $\partial_1(p(x)) = p'(x)$ . Determine o núcleo e a imagem do operador  $\partial_1$ . Qual o núcleo do operador  $\partial_2(p(x)) = p''(x)$ ?
13. Encontre uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com as seguintes propriedades:
- (i)  $T(1, -1) = (1, 2, 0)$  e (ii)  $(1, 0) \in \mathcal{N}(T)$ .
14. Mostre que um operador  $T : V \rightarrow V$  é invertível se, e somente se,  $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2)$ .
15. No espaço  $\mathbb{P}_\infty$  de todos os polinômios com coeficientes reais, mostre que a transformação linear  $T : \mathbb{P}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_\infty$  definida por:
- $$T(p) = \int_0^t p(s) ds$$
- é injetora mas não é sobrejetora.
16. Prove ou apresente um contra-exemplo. Em cada caso,  $T : V \rightarrow V$  é um operador linear não nulo.
- (a)  $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2)$ .
- (b)  $\mathcal{N}(T^2) \subset \mathcal{N}(T)$ .

- (c)  $\text{Im}(T) \subset \text{Im}(T^2)$ .
- (d)  $\text{Im}(T^2) \subset \text{Im}(T)$ .
- (e) Se  $T^2 = \mathbf{0}$ , então  $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ .

## 6.4 Representação Matricial

Nesta seção há dois problemas a serem investigados e os exemplos que seguem à formulação de cada um deles ilustram como resolvê-los.

► APLICAÇÃO LINEAR ASSOCIADA A UMA MATRIZ Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  são bases de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente, e  $A = (a_{ij})$  é uma matriz de ordem  $n \times m$ , encontrar a aplicação linear  $T_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , determinada pela relação:

$$\boxed{[T_A(v)]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}} \quad (6.11)$$

onde  $[v]_{\mathcal{B}}$  e  $[T_A(v)]_{\mathcal{B}'}$  são as matrizes coordenadas de  $v$  e de  $T(v)$  nas bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ . Dado  $v \in \mathbb{R}^m$ , temos

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m, \quad \text{isto é,} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

e consideremos os escalares  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , que satisfazem à relação (6.11), ou seja

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

A aplicação linear  $T_A$  procurada é definida por  $T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_n w_n$ .

**EXEMPLO 6.4.1** Sejam  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 2)\}$  bases de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente, e consideremos a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dado  $v = (x, y)$  um vetor do  $\mathbb{R}^2$ , temos que:

$$v = x(1, 0) + y(0, 1) \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e usando a relação (6.11), encontramos

$$[T_A(v)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + 2y \\ x - 3y \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow y_1 \\ \leftarrow y_2 \\ \leftarrow y_3 \end{array}$$

e, sendo assim:

$$\begin{aligned} T_A(x, y) &= x(1, 1, 0) + (x + 2y)(0, 1, -1) + (x - 3y)(1, 0, 2) \\ &= (2x - 3y, 2x + 2y, x - 8y) \end{aligned}$$

é a aplicação linear procurada.

**EXEMPLO 6.4.2** Se  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  são as bases canônicas de  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente, então a transformação  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  que satisfaz (6.11) é dada por:

$$T_A(x_1, x_2, \dots, x_m) = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \text{onde} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, com relação às bases canônicas a aplicação linear  $T_A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  associada à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

é precisamente

$$T_A(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x = y + 2z, -2x + y + 3z + t, y + 2z - t).$$

► **MATRIZ ASSOCIADA A UMA APLICAÇÃO LINEAR** Dada uma aplicação linear  $T : V \rightarrow W$  entre espaços vetoriais de dimensão finita, sejam  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente. Associada à aplicação linear  $T$  consideramos a  $n \times m$  matriz  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ , cuja  $j$ -ésima coluna é  $[T(v_j)]_{\mathcal{B}'}$ ; a matriz  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  é construída da seguinte forma: escrevemos cada vetor  $T(v_j)$  como combinação linear da base  $\mathcal{B}'$  e formamos a  $j$ -ésima coluna da matriz.

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\ T(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\ &\dots\dots\dots \\ T(v_j) &= a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n \\ &\dots\dots\dots \\ T(v_m) &= a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \cdots + a_{nm}w_n \end{aligned}$$

Assim, a matriz associada à aplicação  $T$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

No caso em que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ , a matriz  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  será indicada simplesmente por  $[T]_{\mathcal{B}}$ .

### 6.4.1 Matriz da Aplicação Composta

Sejam  $T : U \rightarrow V$  e  $S : V \rightarrow W$  duas aplicações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita e fixemos as bases:

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}. \quad (\text{Base de } U)$$

$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}. \quad (\text{Base de } V)$$

$$\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}. \quad (\text{Base de } W)$$

A aplicação composta  $S \circ T$  é dada por  $S \circ T(v) = S(T(v))$  e considerando as representações:

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}v_j \quad \text{e} \quad S(v_j) = \sum_{l=1}^n b_{jl}w_l, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

encontramos:

$$S \circ T(u_i) = S\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}v_j\right) = \sum_{j=1}^m a_{ij}S(v_j) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{jl}w_l$$

e daí resulta a representação matricial da aplicação composta:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \quad (6.12)$$

No caso em que  $T : U \rightarrow V$  é um isomorfismo, com inversa  $S : V \rightarrow U$ , consideramos (6.12), com  $\mathcal{B} = \mathcal{B}''$  e  $S \circ T = I_U$ , e obtemos:

$$[I_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \quad (6.13)$$

Por fim, notando que  $[I_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$  é a matriz identidade  $I_k$ , deduzimos de (6.13) a relação:

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = \left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} \quad (6.14)$$

Em (6.13) temos um produto matricial enquanto o lado direito de (6.14) indica uma inversão de matrizes.

**EXEMPLO 6.4.3** O operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por  $T(x, y, z) = (x - y, y, y + z)$ , é um isomorfismo e em relação à base canônica  $\mathcal{B}$  temos:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde observamos que  $[T]_{\mathcal{B}} \cdot [T^{-1}]_{\mathcal{B}} = I_{3 \times 3}$ .

**EXEMPLO 6.4.4** Em relação à base canônica, os operadores  $T$  e  $S$  do  $\mathbb{R}^3$  são representados pelas matrizes:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Identifiquemos o operador  $T^*$ , sabendo que  $T = S \circ T^*$ .

**Solução:** Inicialmente, notamos que  $S$  é um isomorfismo, tendo em vista que  $\det[S] \neq 0$ , e das relações (6.12) e (6.14) obtemos:

$$\begin{aligned} [T^*] &= [S^{-1}] \cdot [T] \\ &= [S]^{-1} \cdot [T] \end{aligned}$$

e o problema se reduz em encontrar a matriz inversa de  $[S]$ . Por escalonamento, ou qualquer outro método de inversão de matriz, encontramos:

$$[S]^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

e, assim:

$$[T^*] = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 4 & 0 & 5 \\ -13 & -8 & -15 \end{pmatrix}.$$

Em coordenadas, temos:

$$T^*(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 9 \\ 4 & 0 & 5 \\ -13 & -8 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (8x - y + 9z, 4x + 5z, -13x - 8y - 15z).$$

### ESCREVENDO PARA APRENDER 6.3

1. Seja  $I : V \rightarrow V$  o *operador identidade* de  $V$ , isto é,  $I(v) = v, \forall v$ . Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$ , determine a matriz  $[I]_{\mathcal{B}}$ . Se  $\mathcal{B}'$  é outra base de  $V$ , quem é  $[I]_{\mathcal{B}'}$ ?

2. Qual é a aplicação linear  $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$ , cuja representação matricial em relação às bases canônicas

$$\text{é } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

3. Seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a aplicação definida por  $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - y - z)$  e considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -2, -1)\}.$$

Determine a matriz  $[T]_{\mathcal{B}'}$ .

4. Sejam  $\mathcal{B} = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(-1, 0), (0, -1)\}$  bases de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^2$ , respectivamente, e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determine  $T(x, y, z)$ .
- (b) Determine bases para  $\mathcal{N}(T)$  e  $\text{Im}(T)$ . É a transformação  $T$  injetora?
5. Em relação às bases ordenadas  $\mathcal{B} = \{t, 1\}$  e  $\mathcal{B}' = \{t^2, t-1, t+1\}$  de  $\mathbb{P}_1$  e  $\mathbb{P}_2$ , respectivamente, qual a matriz da transformação linear  $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2$ , definida por  $T(p(t)) = tp(t)$ ?
6. Sejam  $\mathcal{B} = \{(1, -1), (0, 2)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$  bases de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente, e seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determine  $T(x, y)$ .
- (b) Encontre uma base  $\mathcal{B}''$  do  $\mathbb{R}^3$ , tal que

$$[T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Seja  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a transformação linear, definida por

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x+z, y+t)$$

e sejam  $\mathcal{B}$  a base canônica de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1, -1), (1, 2)\}$ .

- (a) Encontre a matriz de  $T$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ .
- (b) Se  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$  é tal que

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



determine, caso exista, um vetor  $v$ , tal que  $S(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador linear, cuja matriz em relação à base canônica  $\mathcal{B}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine, caso exista, vetores  $u$  e  $v$  tais que  $Tu = u$  e  $Tv = -v$ .

(b) Determine  $\dim \mathcal{N}(T)$  e  $\dim \text{Im}(T)$ .

(c)  $T$  é um isomorfismo? Se for, encontre  $T^{-1}(x, y)$  e a matriz  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$ .

9. Seja  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcional linear definido por:

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx.$$

Determine a matriz de  $T$  em relação às bases canônicas.

10. Seja  $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$  o operador linear definido por  $T(p(x)) = (1-x)p'(x)$ . Determine a matriz de  $T$  em relação à base canônica de  $\mathbb{P}_1$ .

11. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e sejam  $T_A$  e  $T_B$  as aplicações definidas em (6.11) pelas matrizes  $A$  e  $B$ , respectivamente, como no Exemplo 6.4.2. Encontre bases dos subespaços

$$\mathcal{N}(T_A), \mathcal{N}(T_B), \mathcal{N}(T_B \circ T_A), \text{Im}(T_A), \text{Im}(T_B) \quad \text{e} \quad \text{Im}(T_B \circ T_A).$$

12. Em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ , respectivamente, considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 1)\}$$

e seja  $A$  a matriz  $3 \times 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre a aplicação linear  $T_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $[T_A(v)]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}'}$ . Essa é a aplicação associada à matriz  $A$  e às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  e, como vimos no Exemplo 6.4.2, no caso em que  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  são as bases canônicas, teremos:

$$T_A(v) = A \cdot v, \quad \text{isto é,} \quad T_A(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

13. Sejam  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  as transformações lineares definidas por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, x - z) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (x, x - y, 2y, 2x + y).$$

e considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad (\text{base do } \mathbb{R}^2)$$

$$\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, -1)\} \quad (\text{base do } \mathbb{R}^3)$$

$$\mathcal{B}'' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\} \quad (\text{base do } \mathbb{R}^4)$$

- (a) Encontre as matrizes  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  e  $[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}$  e calcule o produto  $[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .
- (b) Determine  $(S \circ T)(x, y, z)$ .
- (c) Encontre a matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ .

14. Sejam  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  bases do  $\mathbb{R}^3$  e considere o operador linear  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definido por:

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x - y, x + z).$$

- (a) Mostre que  $T$  é um isomorfismo e encontre a matriz  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ .
- (b) Encontre a transformação inversa  $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e a matriz  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .
- (c) Escalone a matriz ampliada  $\left[ [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}, I_3 \right]$ .

15. Considere as seguintes bases do espaço  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

e seja  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  o operador definido por:  $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$ . Verifique diretamente que a matriz  $M$ , de mudança da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{B}'$ , satisfaz a relação:

$$[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}'} \cdot M. \quad (6.15)$$

A relação (6.15) estabelece a equivalência entre as matrizes  $[T]_{\mathcal{B}}$  e  $[T]_{\mathcal{B}'}$  e a matriz  $M$  recebe o nome de matriz de *Similaridade*.

16. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador definido por  $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ , com  $a, b, c$  e  $d$  números reais positivos. Se  $A$  é a matriz de  $T$  em relação à base canônica encontre as raízes da equação  $\det[A - \lambda I_2] = 0$ .

## 6.5 Autovalor, Autovetor & Autoespaço

Dado um operador linear  $T : V \rightarrow V$ , um problema típico de álgebra linear consiste em encontrar um escalar  $\lambda$  e um vetor  $v$ , tais que  $T(v) = \lambda v$ . É claro que  $v = \mathbf{0}$  satisfaz à equação  $T(v) = \lambda v$ , seja qual for o escalar  $\lambda$ , e o problema torna-se interessante quando o vetor procurado  $v$  for não nulo. Um tal escalar  $\lambda$  denomina-se *Autovalor* (ou *Valor Característico*) do operador  $T$  e o vetor não nulo  $v$  um *Autovetor* (ou *Vetor Característico*) de  $T$ , associado ao autovalor  $\lambda$ . Se  $v$  é um autovetor de  $T$ , associado ao autovalor  $\lambda$ , então qualquer múltiplo escalar de  $v$  também o é; se  $\lambda$  é um autovalor de  $T$ , representamos por  $V_\lambda$  o subespaço vetorial de  $V$  constituído pelos vetores  $v$ , tais que  $T(v) = \lambda v$ . Esse subespaço recebe o nome de *Autoespaço* associado a  $\lambda$ . O auto-espaço  $V_\lambda$  é constituído dos autovetores associados ao autovalor  $\lambda$ , mais o vetor nulo.

Dada uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$ , se representarmos por  $A$  a matriz de  $T$  na base  $\mathcal{B}$ , os autovalores de  $T$  são as soluções  $\lambda$  da equação matricial  $A \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}}$ , isto é, as soluções da equação  $(A - \lambda I) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$ . No caso em que  $V = \mathbb{R}^n$ , esta equação nos conduz a um sistema linear homogêneo, o qual terá solução não nula quando  $\det(A - \lambda I) = 0$ , ou seja, quando  $\lambda$  for uma raiz do polinômio  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ , denominado *Polinômio Característico* de  $T$ .

**LEMA 6.5.1** *Se  $\lambda$  é um autovalor do operador  $T : V \rightarrow V$ , então o subconjunto  $V_\lambda$  de  $V$ , dado por:*

$$V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda \cdot v\}$$

*é um subespaço vetorial de  $V$ , conhecido por **AUTOESPAÇO** de  $V$  associado ao autovalor  $\lambda$ .*

**Prova:** Dados  $u$  e  $v$  em  $V_\lambda$  e um escalar  $x$ , mostremos que  $x \cdot u + v$  pertence a  $V_\lambda$ . De fato, da linearidade do operador  $T$ , temos:

$$T(x \cdot u + v) = x \cdot T(u) + T(v) = x \cdot (\lambda u) + \lambda v = \lambda \cdot (x \cdot u + v)$$

e daí resulta que  $x \cdot u + v$  jaz em  $V_\lambda$ , provando que  $V_\lambda$  é um subespaço vetorial de  $V$ . ■

**EXEMPLO 6.5.2** *Determinemos os autovalores e autovetores do operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por:*

$$T(x, y) = (x + 3y, x - y).$$

**Solução:** Considerando  $\mathcal{B}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ , encontramos o polinômio característico de  $T$ :

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

com raízes  $\lambda = \pm 2$  que são os autovalores de operador  $T$ . Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda = 2$  são as soluções da equação  $T(v) = 2v$ , e temos  $T(x, y) = 2(x, y) \Leftrightarrow x = 3y$ ; com o autovalor  $\lambda = -2$ , encontramos  $T(x, y) = -2(x, y) \Leftrightarrow x = -y$ . Os respectivos auto-espaços são, portanto:

$$V_2 = \{(3x, x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_{-2} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

**LEMA 6.5.3** *Autovetores associados a autovalores distintos são LI.*

**Prova:** Sejam  $u$  e  $v$  dois autovetores do operador  $T$ , associados, respectivamente, aos autovalores distintos  $\lambda$  e  $\mu$ , isto é,  $T(u) = \lambda \cdot u$  e  $T(v) = \mu \cdot v$ . Dada uma combinação linear nula:

$$x \cdot u + y \cdot v = \mathbf{0} \tag{6.16}$$

temos:

$$(T - \lambda I)(x \cdot u + y \cdot v) = \mathbf{0} \tag{6.17}$$

e de (6.17) resulta:

$$\begin{aligned} x \cdot (T(u) - \lambda \cdot u) + y(\mu \cdot v - \lambda \cdot v) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow y(\mu - \lambda) \cdot v = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

e retornando a (6.12) com  $y = 0$ , encontramos  $x = 0$ . ■

**LEMA 6.5.4** *Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base de  $V$ , contendo apenas autovetores de  $T$ , então a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  é uma matriz diagonal.*

**Prova:** Basta observar que para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , temos:

$$T(v_j) = \lambda_j v_j = \mathbf{0} \cdot v_1 + \mathbf{0} \cdot v_2 + \dots + \mathbf{0} \cdot v_{j-1} + \lambda_j \cdot v_j + \mathbf{0} \cdot v_{j+1} + \dots + \mathbf{0} \cdot v_n.$$

e os escalares destacados formam a  $j$ -ésima coluna da matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$ , isto é:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

### 6.5.1 O Polinômio Característico

Dada uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n \times n$ , seja  $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o operador linear associado à matriz  $A$ , com respeito à base canônica do  $\mathbb{R}^n$ , isto é:

$$T_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um vetor do  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $T_A(v) = \lambda \cdot v$ , então:

$$\begin{aligned} T_A(v) &= \lambda \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v - \lambda \cdot v = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot v = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e a equação matricial  $(A - \lambda I) \cdot v = \mathbf{0}$  terá uma solução não nula  $v$  se, e somente se,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . O polinômio  $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  é conhecido por **POLINÔMIO CARACTERÍSTICO** da matriz  $A$  (ou do operador  $T_A$ ) e suas raízes são precisamente os autovalores do operador  $T_A$  (ou da matriz  $A$ ). É oportuno ressaltar que se  $\mathcal{B}'$  é outra base do  $\mathbb{R}^n$ , demonstra-se (veja o Exercício 15) que existe uma matriz invertível  $M$ , tal que:

$$[T_A]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [T_A]_{\mathcal{B}'} \cdot M,$$

de modo que:

$$[T_A]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I = M^{-1} \cdot ([T_A]_{\mathcal{B}'} - \lambda \cdot I) \cdot M$$

e, portanto:

$$\det([T_A]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I) = \det([T_A]_{\mathcal{B}'} - \lambda \cdot I).$$

Isto mostra que o polinômio característico  $p(\lambda)$  não depende da base escolhida.

**EXEMPLO 6.5.5** Associado à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

temos o operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dado por:

$$T_A(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ -x + y \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

com polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Os autovalores da matriz  $A$  (ou do operador  $T_A$ ) são as raízes do polinômio característico:  $\lambda_1 = 2$ , de multiplicidade  $k = 2$ , e  $\lambda_2 = 3$ .

**O Autoespaço  $V_{\lambda_1}$**  Um vetor  $v = (x, y, z)$  jaz no autoespaço  $V_{\lambda_1}$  se, e só se,  $A \cdot v = 2 \cdot v$ , isto é:

$$4x + 2y = 2x, \quad -x + y = 2y \quad e \quad y + 2z = 2z \quad (6.18)$$

e de (6.18) resulta  $x = 0$  e  $y = 0$ . Logo,  $V_{\lambda_1} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$  ou  $V_{\lambda_1} = [(0, 0, 1)]$ .

**O Autoespaço  $V_{\lambda_2}$**  Um vetor  $v = (x, y, z)$  jaz no autoespaço  $V_{\lambda_2}$  se, e só se,  $A \cdot v = 3 \cdot v$ , isto é:

$$4x + 2y = 3x, \quad -x + y = 3y \quad e \quad y + 2z = 3z \quad (6.19)$$

e de (6.19) resulta  $x = 2z$  e  $y = z$ . Logo,  $V_{\lambda_2} = \{(2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$  ou  $V_{\lambda_2} = [(2, 1, 1)]$ .

**OBSERVAÇÃO 6.5.6** No caso geral em que  $v$  é um autovetor de certo operador  $T : V \rightarrow V$ , associado ao autovalor  $\lambda$ , e  $\mathcal{B}$  é uma base de  $V$ , então:

$$\begin{aligned} T(v) &= \lambda \cdot v \Leftrightarrow [T(v)]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow ([T]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I) [v]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.20)$$

e (6.20) terá uma solução não nula  $v$  se, e somente se,  $\det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I) = 0$ . Este determinante, que não depende da escolha da base  $\mathcal{B}$ , é o **POLINÔMIO CARACTERÍSTICO** do operador  $T : V \rightarrow V$ .

1. Em cada caso, determine o polinômio característico do operador, seus autovalores e autovetores correspondentes. Por fim, encontre uma base dos autoespaços associados.

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (2y, x)$ .

(b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$ .

(c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$ .

(d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $T(x, y, z) = (x + y, x - y + z, 2x + y - z)$ .

(e)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t)$ .

(f)  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $T(x, y, z, t) = (2x + y, 2y, 2z, 3t)$ .

(g)  $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ ,  $T(A) = A^t$ . ( $A^t$  é a transposta de  $A$ )

(h)  $T : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ ,  $T(ax + b) = 2ax - b$ .

(i)  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ,  $T(p(x)) = p'(x)$ .

(j)  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ,  $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$ .

(k)  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ ,  $T(p(x)) = p(x + 1)$ .

(l)  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ ,  $T(p(x)) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$ .

2. Mostre que um operador  $T : V \rightarrow V$ , com um autovalor nulo, não pode ser injetor.
3. No espaço  $\mathbb{R}^2$ , considere as bases  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e  $\mathcal{B}' = \{(-1, 0), (1, 2)\}$ . Determine o polinômio característico do operador  $T(x, y) = (x, x + y)$ , usando as matrizes  $[T]_{\mathcal{B}}$  e  $[T]_{\mathcal{B}'}$ .
4. Seja  $R_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  o operador de rotação. Se  $\theta = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , mostre que os autovalores de  $R_{\theta}$  são  $\lambda = \pm 1$ .
5. Identifique o operador de  $\mathbb{R}^2$ , com autovalores  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 3$ , e respectivos autovetores  $v_1 = (3, 1)$  e  $v_2 = (-2, 1)$ .
6. Se  $T$  é um isomorfismo, com autovalor  $\lambda$ , mostre que  $\frac{1}{\lambda}$  é um autovalor do operador inverso  $T^{-1}$ .
7. Se  $\lambda$  e  $\mu$  são autovalores distintos do operador  $T : V \rightarrow V$ , mostre que  $V_{\lambda} \cap V_{\mu} = \{\mathbf{0}\}$ .
8. Se  $\lambda$  é um autovalor do operador  $T : V \rightarrow V$ , mostre que  $\lambda^2$  é um autovalor do operador  $T^2$ .

9. **SUBESPAÇO INVARIANTE** Dado um operador  $T : V \rightarrow V$ , diremos que um subespaço  $W$  de  $V$  é *invariante* pelo operador  $T$  ou é  *$T$ -invariante*, quando  $T(W) \subset W$ . Se  $\lambda$  é um autovalor do operador  $T$ , mostre que o autoespaço  $V_\lambda$  é invariante por  $T$ .

## 6.6 Operadores Diagonalizáveis

Um problema importante de Álgebra Linear consiste em encontrar, caso seja possível, uma base do espaço vetorial  $V$  em relação à qual a matriz de certo operador  $T : V \rightarrow V$  seja diagonal. Isto significa *diagonalizar* o operador  $T : V \rightarrow V$ . Como ficou estabelecido no Lema 6.5.4 uma base de  $V$  constituída de autovetores diagonaliza o operador  $T$ .

**REGRA DE DIAGONALIZAÇÃO** Suponhamos  $\dim V = n$  e que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sejam os autovalores distintos do operador  $T : V \rightarrow V$ . Se  $V_{\lambda_j}$  são os autoespaços correspondentes e

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_k} = n$$

então o operador  $T$  é diagonalizável e se  $\mathcal{B}_j$  é uma base do autoespaço  $V_{\lambda_j}$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, k$ , então:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$$

é uma base de  $V$  que diagonaliza  $T$ , isto é, a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  é diagonal. Na diagonal principal da matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  figuram os autovalores de  $T$  e o número de vezes que cada autovalor aparece na diagonal corresponde à sua multiplicidade como raiz do polinômio característico.

**EXEMPLO 6.6.1** Um operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que possui dois autovalores distintos é diagonalizável. Neste caso, os dois autoespaços têm dimensão igual a 1. De forma mais geral, se  $\dim V = n$  e o operador  $T : V \rightarrow V$  possui  $n$  autovalores distintos, um tal operador  $T$  é diagonalizável. De fato, basta construir uma base de  $V$  com autovetores de  $T$  e usar o Lema 6.5.4.

**EXEMPLO 6.6.2** Seja  $T$  o operador do  $\mathbb{R}^3$ , definido por  $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$ . Os autovalores de  $T$  são  $\lambda_1 = 3$  (de multiplicidade 2) e  $\lambda_2 = -1$ , que são as raízes do polinômio característico  $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(-1 - \lambda)$ , e os autoespaços correspondentes são:

$$V_3 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad e \quad V_{-1} = \{(4z, -5z, 4z) : z \in \mathbb{R}\}.$$



Considerando as bases  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$  e  $\mathcal{B}'' = \{(4, -5, 4)\}$  dos autoespaços  $V_3$  e  $V_{-1}$ , respectivamente, vemos que  $\dim V_3 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$  e, portanto,  $T$  é diagonalizável; a base de autovetores  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (4, -5, 4)\} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$  diagonaliza  $T$  e temos:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}.$$

**EXEMPLO 6.6.3** Seja  $T$  o operador do  $\mathbb{R}^3$ , definido por  $T(x, x, z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$ . Os autovalores de  $T$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 3$ , que são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12,$$

e os autoespaços correspondentes são:

$$V_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \quad e \quad V_3 = \{(-2y, y, y) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Vemos que  $\dim V_2 + \dim V_3 = 1 + 1 \neq \dim \mathbb{R}^3$  e, portanto,  $T$  não é diagonalizável.

**EXEMPLO 6.6.4** O operador derivação  $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ , dado por  $T(p) = p'$  tem polinômio característico  $p(\lambda) = -\lambda^3$  e, portanto, o único autovalor de  $T$  é  $\lambda = 0$ . O autoespaço  $V_0$  correspondente é constituído dos polinômios constantes e tem dimensão  $n = 1$ . O operador  $T$  não é diagonalizável.

1. Em cada caso, encontre uma base de  $V$  que diagonaliza o operador  $T : V \rightarrow V$ .

(a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2x, x - y).$

(b)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y, -2y, z).$

(c)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (-2x, x - y, 4x + 3y).$

(d)  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x, -2x + 2y, 12x - 3z).$

2. Se a matriz do operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em relação à base canônica é simétrica, mostre que  $T$  é diagonalizável.

3. Determine, caso exista algum, os valores de  $a$  que tornam os operadores  $T(x, y) = (x + y, ay)$  e  $S(x, y) = (x + ay, y)$  diagonalizáveis.

1. Sejam  $W_1$  e  $W_2$  subespaços vetoriais de  $V$ , tais que  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ . Mostre que  $T(u, v) = u + v$  define um isomorfismo de  $W_1 \times W_2$  sobre  $W_1 \oplus W_2$ .
2. Se duas transformações lineares  $S, T : V \rightarrow W$  são iguais nos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de uma base de  $V$ , mostre que  $S(v) = T(v)$ ,  $\forall v \in V$ .
3. Se  $T : V \rightarrow W$  é um isomorfismo, mostre que a aplicação inversa  $T^{-1} : W \rightarrow V$  também o é.
4. Se  $T : V \rightarrow W$  é um isomorfismo linear, mostre que  $\dim V = \dim W$  e  $T$  transforma uma base de  $V$  em uma base de  $W$ .
5. Seja  $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  o operador definido por  $P(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$ . Mostre que:

(a)  $P^2 = P \quad (P^2 = P \circ P)$ .

(b)  $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ .

(c) Em relação à base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, \lambda, 0), (0, 0, 0, \mu)\}$ , sendo  $\lambda \neq 0$  e  $\mu \neq 0$ , verifique que a matriz do operador  $P$  é a "matriz de blocos":

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [I_2] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

6. Se  $\dim V < \infty$  e  $T : V \rightarrow V$  é um isomorfismo, qual a relação entre as matrizes  $[T]_{\mathcal{B}}$  e  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}'}$ ?
7. Identifique a imagem da circunferência  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , pelo operador  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $T(x, y) = (ax + by, bx + ay)$ , sendo  $|a| \neq |b|$ .
8. Se  $p(\lambda) = (\lambda - a)^n$  é o polinômio característico de um operador diagonalizável  $T : V \rightarrow V$ , com  $\dim V = n$ , mostre que  $[T]_{\mathcal{B}} = aI$ , seja qual for a base  $\mathcal{B}$  de  $V$ .
9. Sejam  $T$  e  $R$  os operadores do  $\mathbb{R}^3$  que representam, respectivamente, a projeção e a reflexão no plano  $\pi : 3x + 2y + z = 0$ .
  - (a) Encontre  $T(x, y, z)$  e  $R(x, y, z)$ .

(b) Encontre bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  do  $\mathbb{R}^3$ , tais que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [R]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(tais bases devem conter dois vetores  $v_1$  e  $v_2$  do plano e um vetor  $v_3$  ortogonal ao plano  $\pi$ )

10. Encontre os autovalores do operador  $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ , dado por  $T(p(x)) = p(x+1)$ , e os correspondentes autoespaços. O operador  $T$  é diagonalizável?

11. Seja  $r$  a reta do  $\mathbb{R}^3$  que passa pela origem, na direção do vetor  $v = (1, 1, 0)$ .

(a) Qual o operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que representa uma reflexão através da reta  $r$ ?

(b) Encontre a expressão do operador  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que representa uma rotação de  $\pi/3$  rad em torno da reta  $r$ .

12. Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o operador que representa uma reflexão através da reta  $y = 3x$ . Encontre  $T(x, y)$  e uma base  $\mathcal{B}$  do  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

## RESPOSTAS & SUGESTÕES

---

### ESCREVENDO PARA APRENDER 6.0

1. Dados  $u, v \in \mathbb{R}^2$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos:

$$T(\lambda \cdot u + v) = (\lambda \cdot u + v, \lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot (u, u) + (v, v).$$

2. Basta observar que:

$$T(\lambda \cdot (u, v) + (u', v')) = \lambda \cdot v + v' = \lambda \cdot T(u, v) + T(u', v').$$

3. Se  $v = \mathbf{0}$ , as condições (i) e (ii) são satisfeitas. Se  $v \neq \mathbf{0}$ , nem condição (i) nem a condição (ii) é satisfeita para  $u \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

4. Sim. Dados  $u, v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos:

$$T(\lambda \cdot u + v) = (\lambda \cdot u + v, 0) = (\lambda \cdot u, 0) + (v, 0) = \lambda \cdot T(u) + T(v).$$

---

### ESCREVENDO PARA APRENDER 6.1

1. São lineares as aplicações (a), (b), (c), (d) e (h). Nos casos (e) e (f), temos  $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$  e, portanto,  $T$  não é linear. Para verificar que a aplicação (g) não é linear, basta observar que  $T(-1) \neq -T(1)$ .

2. Sim. Usando as propriedades do produto matricial, temos

$$T_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda T_A(X) + T_B(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Usando as propriedades da transposição de matrizes, temos:

$$T(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)^t = \lambda X^t + Y^t = \lambda T(X) + T(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2 \times 3}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , então  $\det A = \det B = 0$  e  $\det(A + B) = \det I_2 = 1$ . Para essas matrizes, temos  $T(A + B) \neq T(A) + T(B)$  e isso mostra que  $T$  não é linear.

5. Vejamos o ítem (c), como ilustração. Sejam  $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$  dois vetores em  $\mathcal{M}_{2 \times 1}$  e seja  $\lambda$  um escalar. Temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u + v) &= T \begin{pmatrix} \lambda x + z \\ \lambda y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + z & 0 \\ 0 & \lambda y + t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot T(u) + T(v). \end{aligned}$$

6. A transformação  $T$  não é linear, porque  $T(\mathbf{0})$  é o vetor (polinômio) não nulo  $p(x) = x$ . No caso da aplicação  $S$ , dados  $p$  e  $q$  no espaço  $\mathbb{P}_1$  e um escalar  $\lambda$ , temos:

$$\begin{aligned} S(\lambda \cdot p + q)(x) &= (\lambda \cdot p + q)(x) + x^2(\lambda \cdot p + q)'(x) \\ &= \lambda \cdot (p(x) + x^2 p'(x)) + q(x) + x^2 q'(x) = [\lambda \cdot S(p) + S(q)](x). \end{aligned}$$

Logo,  $S(\lambda \cdot p + q) = \lambda \cdot S(p) + S(q)$  e, portanto,  $S$  é linear.

7.  $T(x, y) = (-x + y, x)$ .

8. (a) A aplicação  $T$  não é linear, a menos que  $A = \mathbf{0}$ . (b) A aplicação  $S$  é linear. De fato, usando as operações com matrizes, encontramos:

$$\begin{aligned} S(\lambda \cdot X_1 + X_2) &= A \cdot (\lambda \cdot X_1 + X_2) - (\lambda \cdot X_1 + X_2) \cdot A \\ &= \lambda \cdot (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) = \lambda \cdot S(X_1) + S(X_2). \end{aligned}$$

9.  $T(\mathcal{R})$  é o quadrilátero de vértices  $A(1, -1)$ ,  $B(-1, 2)$ ,  $C(0, 1)$  e  $D(-1, 3)$ .
10.  $T(ax + b) = ax^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)x - \frac{a+b}{2}$ .
11.  $T(ax^2 + bx + c) = (2a - b)x^2 + (a + c)x + b$ .
12.  $T(x, y) = (3x, x - y, x)$ ,  $S(x, y, z) = (x, -3x + 2y)$  e  $(S \circ T)(x, y) = (3x, -7x - 2y)$ .
13.  $T(x, y) = (x - y, x + y)$ .
14. Seja  $T(x, y) = (a, b)$ . O ponto médio do segmento que liga os pontos  $A(x, y)$  e  $B(a, b)$  está sobre a reta  $y = x$  e, assim,  $a + x = b + y$ . Como o segmento  $AB$  é ortogonal à reta  $y = x$ , segue que  $a + b = x + y$ . Agora, conclua que  $a = y$  e  $b = x$  e, portanto,  $T(x, y) = (y, x)$ .
15. O caso geral  $T^n = 2^{n-1} \cdot T$  é deduzido de forma indutiva. Como ilustração, vejamos o caso  $n = 2$ . Temos:
- $$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x + y, x - y) = T(2x, 2y) = 2 \cdot T(x, y).$$
16.  $T(x, y) = (y, x)$  e  $S(x, y) = \frac{1}{2}(x - y, y - x)$ .

### ESCREVENDO PARA APRENDER 6.2

1. Considere a base  $\mathcal{B} = \{(0, 2), (-1, 1)\}$  do  $\mathbb{R}^2$  e observe que  $(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)(0, 2) + x(-1, 1)$ , de modo que:

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(x + y) \cdot T(0, 2) - x \cdot T(-1, 1) = -x \cdot (1, 2, 0) = (-x, -2x, 0).$$

2. Em cada caso, identifique o núcleo e a imagem da aplicação linear.

(a)  $\mathcal{N}(T) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$  e uma base do núcleo é  $\mathcal{B} = \{(1, 2)\}$ . A imagem do operador  $T$  é o eixo  $x$  e uma base de  $\text{Im}(T)$  é  $\mathcal{B}' = \{(1, 0)\}$ .

(b)  $\mathcal{B} = \{(-2, 1, 1)\}$  é uma base do núcleo de  $T$ . O subespaço  $\text{Im}(T)$  é consiste dos vetores da forma:

$$(x + 2y, y - z, x + 2z) = x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (0, -1, 2)$$

e  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2)\}$  é uma base de  $\text{Im}(T)$ .

3. O núcleo de  $T$  é constituído da matrizes da forma  $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$  e uma base de  $\mathcal{N}(T)$  é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Acrescentando à base  $\mathcal{B}$  os vetores  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , obtemos uma base de  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  e o conjunto  $\mathcal{B}' = \{T(X_3), T(X_4)\}$  é uma base de  $\text{Im}(T)$ .

4. Um vetor  $p(x) = ax^2 + bx + c$  jaz no núcleo de  $T$  se, e somente se,  $x^2 p'' = \mathbf{0}$ , isto é,  $a = 0$ . Logo,  $\ker(T) = \mathbb{P}_1$ ; a imagem de  $T$  é constituída dos vetores  $q = ax^2$  e  $\mathcal{B} = \{x^2\}$  é uma base de  $\text{Im}(T)$ .

5. Considere a base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  do  $\mathbb{R}^3$  e defina o operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por:

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, 3), \quad T(0, 1, 0) = (4, 0, 5) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Um tal operador não pode ser um isomorfismo, porque  $\dim \text{Im}(T) = 2$ . Para que a imagem seja preservada, o vetor  $T(1, 0, 0)$  dever ser combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$  e, por simplicidade, escolhemos  $T(0, 0, 1) = \mathbf{0}$ .

6. Seja  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  a base do  $\mathbb{R}^3$ , construída por completamento da base do núcleo do operador  $T$ , e defina:

$$T(1, 1, 0) = (0, 0, 0), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Dessa forma, construímos o operador  $T(x, y, z) = (0, -x + y, z)$ , com núcleo gerado pelo vetor  $(1, 1, 0)$ . Um tal operador não é injetor e muito menos um isomorfismo.

7. Basta notar que  $v \in \mathcal{N}(T_2 \circ T_1) \Leftrightarrow T_1(v) \in \mathcal{N}(T_2)$ .

8. Os isomorfismos são estabelecidos de forma natural.

(a)  $T(x, y) = (x, y, 0); \quad \mathbb{R}^2 \approx W$ .

(b)  $T(x, y, z) = x + yt + zt^2; \quad \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{P}_2.$

(c)  $T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; \quad \mathbb{R}^4 \approx \mathcal{M}_{2 \times 2}.$

9. Adicionando o vetor  $v = (1, 0)$  á base  $\mathcal{B} = \{(1, 2)\}$  do núcleo, chegamos à base  $\mathcal{B}' = \{(1, 0), (1, 2)\}$  do  $\mathbb{R}^2$ . A aplicação linear a ser construída depende da escolha do vetor  $T(0, 1)$ . Por exemplo, se  $T(1, 0) = (2, 2, 0)$ , encontramos:

$$(x, y) = \frac{1}{2}(2x - y) \cdot (1, 0) + \frac{y}{2} \cdot (1, 2) \Rightarrow T(x, y) = (2x - y, 2x - y, 0).$$

10. O núcleo de  $T$  é o subespaço de  $\mathbb{P}_2$  gerado pelo vetor  $p = 2x^2 - x + 1$ . A imagem de  $T$  é o subespaço gerado por  $\{1, x\}$ , isto é, o espaço  $\mathbb{P}_1$ . É claro que  $T$  não é injetor nem sobrejetor.
11. Adicionando o vetor  $v = (1, 0, 0)$  á base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$  do núcleo, chegamos à base  $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$  do  $\mathbb{R}^3$  e notando que:

$$(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (1, 0, 0) + (-y - z) \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, -1)$$

encontramos  $T(x, y, z) = (x + y + z) \cdot (1, 1, 1)$ .

12.  $\mathcal{N}(\partial_1)$  é o subespaço  $\mathbb{P}_0$  dos polinômios constantes e a imagem  $\text{Im}(\partial_1)$  é constituída dos polinômios  $p(x)$ , tais que  $p(0) = 0$ . Para o operador  $\partial_2$ , temos:

$$\mathcal{N}(\partial_2) = \mathbb{P}_1 \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_2) = \{p \in \mathbb{P}_n : p(0) = p'(0) = 0\}.$$

13. Considerando a base  $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, -1)\}$  do  $\mathbb{R}^2$ , obtemos:

$$(x, y) = (x + y) \cdot (1, 0) + (-y) \cdot (1, -1) \quad \text{e} \quad T(x, y) = (-y, 2y, 0).$$

14. Basta notar que  $v \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow T(v) \in \mathcal{N}(T)$ .

15. O polinômio  $q(t) \equiv 1$  jaz em  $\mathbb{P}_\infty$ , mas não pertence a  $\text{Im}(T)$ .

16. São verdadeiras as afirmações (a) e (d). Verifique que o operador  $T(x, y) = (0, x)$  é tal que:

$$(i) T^2 = \mathbf{0} \quad (ii) \ker(T) = \text{Im}(T) = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\} \quad (iii) T^2 = \mathbf{0} \quad (iv) \ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$$

e serve de contra-exemplo para as afirmações falsas.

1. Em qualquer base  $\mathcal{B}$  do espaço  $V$  a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  é a matriz identidade  $n \times n$ .
2. Um vetor (polinômio) genérico de  $\mathbb{P}_1$  é  $p(t) = a + bt$  e a aplicação é  $T(a + bt) = a + bt$ .
3. A matriz de  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. (a)  $T(x, y, z) = (-2y + z, -x + y)$ .
- (b) Considerando  $v_1 = (0, 1, 1)$ ,  $v_2 = (1, 0, 0)$  e  $v_3 = (1, 0, 1)$ , então a imagem de  $T$  é gerada pelos vetores  $T(v_1)$ ,  $T(v_2)$  e  $T(v_3)$  e como  $T(v_1) = (-1, 1)$  é combinação linear do vetores LI  $T(v_2)$  e  $T(v_3)$ , segue que  $\{T(v_2), T(v_3)\}$  é uma base de  $\text{Im}(T)$ . O núcleo de  $T$  tem dimensão 1 e  $\mathcal{N}(T) = [(1, 1, 2)]$ .

5. Considerando as bases ordenadas  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$ , encontramos:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. O ponto de partida é a relação  $[T]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}$ .

(a)  $T(x, y) = \frac{1}{2}(x - y, x - y, 4x + 2y)$ .

- (b) Considere a base  $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$ , sendo

$$w_1 = T(1, -1) = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad w_3 = T(0, 2) = (-1, -1, 2)$$

e escolha  $w_2$  LI com  $w_1$  e  $w_3$ . Por exemplo,  $w_2 = (0, 0, 1)$ .

7. (a) A matriz  $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  é a matriz  $2 \times 4$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Dado  $v = (x, y)$ , temos que  $[v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{3}(2x - y, x + y)$  e, portanto:

$$[Sv]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ x - 2y \\ 2x - y \\ x + y \end{bmatrix} \Leftrightarrow Sv = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 3y & x - 2y \\ 2x - y & x + y \end{bmatrix}.$$



Logo,

$$Sv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

e, como o sistema não tem solução, um tal vetor  $v$  não existe.

8. A aplicação  $T$  é dada por  $T(x, y) = (-x - 2y, y)$ .

(a) Os vetores  $u = (x, -x)$  satisfazem a  $Tu = u$  e os vetores  $v = (x, 0)$  satisfazem a  $Tv = -v$ .

(b) Temos que  $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ , de modo que  $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ . On the other hand,

$$\dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathcal{N}(T) = 2.$$

(c)  $T$  é um isomorfismo, por ser injetora e sobrejetora, e se  $T^{-1}(x, y) = (a, b)$ , então:

$$(x, y) = T(a, b) = (-a - 2b, b)$$

e, assim,  $a = -x - 2y$  e  $b = y$ . Logo,  $T^{-1}(x, y) = (-x - 2y, y)$  e na forma matricial, temos:

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. As bases canônicas de  $\mathbb{P}_3$  e  $\mathbb{R}$  são, respectivamente:

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{1\}$$

e um cálculo direto nos conduz a:  $T(1) = 1$ ,  $T(t) = 1/2$ ,  $T(t^2) = 1/3$  e  $T(t^3) = 1/4$ . Assim:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

10. A base canônica de  $\mathbb{P}_1$  é  $\mathcal{B} = \{1, t\}$  e temos:

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \quad \text{e} \quad T(t) = 1 - t = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t$$

e, portanto:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. As aplicações  $T_A$  e  $T_B$  são dadas por:

$$T_A(x, y) = (y, 2y, y) \quad \text{e} \quad T_B(x, y, z) = (0, x + 2y + z, -x)$$

e, portanto,  $T_B \circ T_A(x, y) = (0, 6y, -y)$ . Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T_A) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \mathcal{B} &= \{(1, 0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_A) &= 1. \\ \mathcal{N}(T_B) &= \{(0, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \mathcal{B} &= \{(0, 1, -2)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) &= 1. \\ \mathcal{N}(T_B \circ T_A) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \mathcal{B} &= \{(1, 0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B \circ T_A) &= 1. \end{aligned}$$

As colunas da matriz que representa a aplicação linear geram a imagem de tal aplicação. Observando as matrizes das aplicações  $T_A$ ,  $T_B$  e  $T_B \circ T_A$ , deduzimos que

$$\begin{aligned} \text{Im}(T_A) &= [(1, 2, 1)] & \text{Base: } \mathcal{B} &= \{(1, 2, 1)\}, & \dim \text{Im}(T_A) &= 1. \\ \text{Im}(T_B) &= \{(0, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \mathcal{B} &= \{(0, 1, 0), (0, 1, -1)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) &= 2. \\ \text{Im}(T_B \circ T_A) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \mathcal{B} &= \{(0, 6, -1)\}, & \dim \text{Im}(T_B \circ T_A) &= 1. \end{aligned}$$

12. Dado  $v = (x, y, z, t)$  do  $\mathbb{R}^4$ , um cálculo direto nos dá:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

e, por conseguinte,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z + 2t \\ 4x + 8z + 4t \\ x + 3y - 3z - t \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(v) &= \frac{1}{4} \cdot (2x + 2y + 2z + 2t)(1, 0, 0) + (4x + 8z + 4t)(-1, 0, 1) + (x + 3y - 3z - t)(1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-x - 3y - z - t, x + 3y - 3z - t, 4x + 8z + 4t). \end{aligned}$$

13. Ponto de partida:  $T(x, y, z) = (x + 2y, x - z)$  e  $S(x, y) = (x, x - y, 2y, 2x + y)$ .

(a) Temos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1),$$

$$T(1, 1, 1) = (3, 0) = 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1),$$

$$T(0, 1, -1) = (2, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1) \quad e$$

$$S(1, 0) = (1, 1, 0, 2) = 2 \cdot (1, 0, 0, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1, 1) + (-2) \cdot (0, 0, 1, 0) + (-1) \cdot (1, -1, 0, 0),$$

$$S(1, 1) = (1, 0, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1, 1) + (-1) \cdot (0, 0, 1, 0) + 0 \cdot (1, -1, 0, 0).$$

Logo:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad [S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto:

$$[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) A aplicação composta  $S \circ T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  vem dada por:

$$(S \circ T)(x, y, z) = S(T(x, y, z)) = S(x + 2y, x - z) = (x + 2y, 2y + z, 2x - 2z, 3x + 4y - z).$$

(c) A matriz  $[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$  coincide com o produto  $[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  encontrado em (b).

14. Recorde-se que um operador  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  será um isomorfismo se, e somente se, for injetor.

(a) Mostremos que  $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ . De fato:

$$T(x, y, z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Assim,  $T$  é injetor e, conseqüentemente, um isomorfismo. A matriz de  $T$  é:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) A inversa é dada por  $T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{4} \cdot (x + y + 2z, x - 3y + 2z, -x - y + 2z)$  e temos:

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$  invertível, ao escalonar a matriz ampliada  $[A, I_n]$  chegamos à matriz  $[I_n, A^{-1}]$ . No caso, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

15. Um cálculo direto nos dá:

$$M = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e temos:

$$M^{-1}[T]_{\mathcal{B}'}M = [T]_{\mathcal{B}}.$$

$$16. \lambda = \frac{1}{2} \left[ a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \right].$$

#### ESCREVENDO PARA APRENDER 6.4

1. Em cada caso, considere a matriz de  $T$  com relação às bases canônicas.

(a) Considerando a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ , temos:

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2.$$

Os autovalores são  $\lambda_1 = \sqrt{2}$  e  $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ , com autoespaços correspondentes  $V_{\lambda_1} = [(\sqrt{2}, 1)]$  e  $V_{\lambda_2} = [(-\sqrt{2}, 1)]$ .

(b) Neste caso, o polinômio característico é  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$  e os autovalores são  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$  e  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ . Os autoespaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right].$$

- (c) Temos  $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$  e os autovalores são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ . Os auto-espacos correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1, 0, 0)], \quad V_{\lambda_2} = [(1, 1, 0)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = [(1, 1, 1)].$$

- (d) O polinômio característico é  $p(\lambda) = (\lambda + 1)(3 - \lambda^2)$  e os autovalores são  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{3}$  e  $\lambda_3 = -\sqrt{3}$ . Os autoespaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1, -2, -1)], \quad V_{\lambda_2} = \left[ \left( 1, \sqrt{3} - 1, 1 \right) \right], \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = \left[ \left( 1, 1 - \sqrt{3}, 1 \right) \right].$$

- (e) O polinômio característico é  $p(\lambda) = (1 - \lambda)^4$  e  $\lambda_1 = 1$  é o autovalor de ordem 4. O auto-espaco correspondente é:

$$V_{\lambda_1} = [(0, 0, 0, 1)]$$

e os auto-vetores são do tipo  $v = (x, 0, 0, t)$ ,  $x, t \in \mathbb{R}$ .

- (f) Temos  $p(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)^3$  e os autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ . Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = [(0, 0, 0, 1)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)] \quad (\dim V_{\lambda_1} = 1 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 2).$$

- (g) No espaco  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , consideramos a base canônica:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e encontramos  $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3(\lambda + 1)$ . Os autovalores são, portanto,  $\lambda = 1$ , de ordem 3 e  $\lambda = -1$ . Os auto-espacos correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

- (h) Os autovalores são  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 2$ , com auto-espacos correspondentes:  $V_{\lambda_1} = \mathbb{R}$  e  $V_{\lambda_2} = [x]$ .

- (i) No espaco  $\mathbb{P}_2$ , consideramos a base canônica  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$  e encontramos  $p(\lambda) = -\lambda^3$ . O único autovalor é  $\lambda = 0$  e  $V_\lambda = \mathbb{R}$ .

- (j) Temos  $T(1) = x$ ,  $T(x) = 1$  e  $T(x^2) = x^2$  e, portanto:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é  $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$ , com raízes (autovalores)  $\lambda_1 = 1$  (dupla) e  $\lambda_2 = -1$ . Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1$  são os polinômios não nulos do tipo  $ax^2 + bx + b$ , enquanto os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2$  são os polinômios não nulos do tipo  $bx - b$ . Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = [x + 1, x^2] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [x - 1] \quad (\dim V_{\lambda_1} = 2 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 1).$$

(k) Dado  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , temos que  $T(p)(x) = p(x + 1) = ax^2 + (2a + b)x + a + b + c$ , de modo que:

$$T(1) = 1, \quad T(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad T(x^2) = x^2 + 2x + 1$$

e a matriz de  $T$  na base  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$  é, portanto:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é  $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3$ . O autovalor é  $\lambda = 1$ , de multiplicidade 3, e o autoespaço correspondente é o subespaço de dimensão  $n = 1$ , dado por:

$$V_{\lambda_1} = [1] = \mathbb{R}.$$

(l) Dado  $v = ax^2 + bx + c$ , temos que  $T(v) = -6ax^2 - 2bx - 2a$  de onde segue que:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = -2 \quad \text{e} \quad T(x^2) = -6x^2 - 2.$$

O polinômio característico é  $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2$ , com raízes (autovalores)  $\lambda_1 = 0$  (dupla) e  $\lambda_2 = -6$ . Os autoespaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [x, 1 + 3x^2].$$

Em outras palavras,  $V_{\lambda_1}$  é constituído pelos polinômios constantes, enquanto  $V_{\lambda_2}$  é o subespaço constituído pelos polinômios do tipo  $3ax^2 + bx + a$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

2. Recorde-se que  $T$  é injetor se, e somente se,  $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ . Se  $\lambda = 0$  é um autovalor de  $T$ , existe  $v \neq 0$ , tal que  $T(v) = 0 \cdot v = \mathbf{0}$  e daí resulta que  $v \in \mathcal{N}(T)$  e, portanto,  $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$ .

3. As matrizes de  $T$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  são, respectivamente:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e temos:

- (a) Em relação à base  $\mathcal{B}$  :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2.$$

- (b) Em relação à base  $\mathcal{B}'$  :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (1 - \lambda)^2.$$

4. Temos que  $R_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  e, considerando  $\theta = k\pi$ , encontramos:

$$R_{\theta}(x, y) = \left( (-1)^k x, (-1)^k y \right).$$

Com relação à base canônica, temos:

$$[R_{\theta}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é  $p(\lambda) = \pm 1$ , conforme seja  $k$  par ou ímpar.

5. Com os autovalores  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = 3$ , construímos a base de autovetores  $\mathcal{B} = \{(3, 1), (-2, 1)\}$  e teremos:

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 \\ 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}.$$

Assim,  $T(x, y) = (-6y, -x + y)$ .

6. Sendo  $T$  um isomorfismo, qualquer autovalor  $\lambda$  é não nulo e existe  $v \neq \mathbf{0}$ , tal que:

$$T(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow v = T^{-1}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T^{-1}(v) \Leftrightarrow T^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} \cdot v.$$

7. Se  $v \in V_{\lambda} \cap V_{\mu}$ , então  $T(v) = \lambda \cdot v = \mu \cdot v$  e daí resulta  $(\lambda - \mu) \cdot v = 0$  e como  $\lambda \neq \mu$ , segue  $v = \mathbf{0}$ .
8. Existe  $v \neq \mathbf{0}$ , tal que  $T(v) = \lambda \cdot v$  e, assim,  $T^2(v) = T(T(v)) = \lambda^2 \cdot v$ .

9. Basta notar que se  $v \in V_\lambda$ , então  $T(v) = \lambda \cdot v \in V_\lambda$ . ( $V_\lambda$  é um subespaço vetorial!)

### ESCREVENDO PARA APRENDER 6.5

1. Como ilustração faremos o item (d). Ressaltamos que o procedimento é o mesmo em todos os casos: encontramos os autovalores e uma base de autovetores.
- (d) Os autovalores do operador  $T$  são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = -3$ , com autoespaços correspondentes:

$$V_{\lambda_1} = \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

$$V_{\lambda_2} = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

$$V_{\lambda_3} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Em relação à base  $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , de autovetores, o operador  $T$  é representado pela matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{pmatrix}$$

2. A matriz de  $T$  é do tipo:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

com polinômio característico  $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$ . Se  $a = c$  e  $b = 0$  é claro que a matriz  $[T]_{\mathcal{B}}$  é diagonal e no caso em que  $a \neq c$  ou  $b \neq 0$  o polinômio  $p(\lambda)$  tem duas raízes distintas, e autovetores corespondentes LI, e a matriz é, também, diagonal.

3. Se  $a \neq 1$ , o operador  $T$  é diagonalizável. Por outro lado,  $S$  é diagonalizável apenas no caso em que  $a = 0$ .

### REVISANDO O CONTEÚDO

1. Para verificar que  $T$  é linear, observe que

$$\begin{aligned} T(\lambda(u_1, v_1) + (u_2, v_2)) &= T(\lambda u_1 + u_2, \lambda v_1 + v_2) = \lambda u_1 + u_2 + \lambda v_1 + v_2 \\ &= \lambda(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 = \lambda T(u_1, v_1) + T(u_2, v_2). \end{aligned}$$



Dado  $u + v$  em  $W_1 \oplus W_2$ , então  $T(u, v) = u + v$  e, portanto,  $T$  é sobrejetora. Por outro lado, se  $(u, v) \in \ker(T)$ , então  $u + v = \mathbf{0}$  em  $W_1 \oplus W_2$  e como  $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ , segue que  $u = v = \mathbf{0}$ . Assim,  $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$  e  $T$  é injetora.

2. Dado  $v$  em  $V$ , então  $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$  e, considerando que  $T(v_j) = S(v_j)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} S(v) &= x_1 \cdot S(v_1) + x_2 \cdot S(v_2) + \cdots + x_n \cdot S(v_n) \\ &= x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \cdots + x_n \cdot T(v_n) \\ &= T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = T(v). \end{aligned}$$

3. Sendo  $T : V \rightarrow W$  um isomorfismo, então  $\dim V = \dim W$ , e  $T^{-1}$  será um isomorfismo se, e somente se, for injetora. Ora,

$$T^{-1}(w_1) = T^{-1}(w_2) \Leftrightarrow T(T^{-1}(w_1)) = T(T^{-1}(w_2)) \Leftrightarrow w_1 = w_2.$$

Logo,  $T^{-1}$  é injetor e, portanto, um isomorfismo.

4. Sendo  $T : V \rightarrow W$  um isomorfismo, então  $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$  e  $\text{Im}(T) = W$  ( $T$  é injetor e sobrejetor).

Logo,

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \text{Im}(T) = 0 + \dim W = \dim W.$$

Por outro lado, dada uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , então  $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$  são LI. De fato:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \cdots + x_n \cdot T(v_n) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0. \end{aligned}$$

5. Dado que  $P(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$ , temos:

(a)  $P^2(x, y, z, t) = P(P(x, y, z, t)) = P(x, y, 0, 0) = (x, y, 0, 0) = P(x, y, z, t)$ .

(b) Dado  $v = (x, y, z, t)$  um vetor do  $\mathbb{R}^4$ , então:

$$v = (x, y, z, t) = (x, y, 0, 0) + (0, 0, z, t) = P(x, y, z, t) + (0, 0, z, t) \in \text{Im}(P) + \mathcal{N}(P).$$

Considerando que  $\text{Im}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{\mathbf{0}\}$ , deduzimos que  $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ .

(c) Proceda como nos exemplos e expresse cada vetor  $T(v_k)$  da base  $\mathcal{B}$  como combinação linear:

$$T(v_k) = \sum_{i=1}^4 x_i v_i, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

6. As matrizes  $[T^{-1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  e  $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  são inversas uma da outra.
7. A elipse do plano  $\mathbb{R}_{uv}^2$  descrita por:  $Au^2 - 4abuv + Av^2 = a^2(a^2 - b^2)$ , com  $A = a^2 + b^2$ .
8. Um tal operador possui autovalor  $\lambda = a$ , de multiplicidade  $n$ , e existe uma base  $\mathcal{B}'$  de  $V$  em relação a qual a matriz de  $T$  é diagonal, ou seja,  $[T]_{\mathcal{B}'} = a \cdot I$ . Se  $\mathcal{B}$  é uma outra base de  $V$ , as matrizes  $[T]_{\mathcal{B}}$  e  $[T]_{\mathcal{B}'}$  são equivalentes, isto é, existe uma matriz invertível  $M$ , such that  $[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}'} \cdot M$  e, conseqüentemente:

$$[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}'} \cdot M = M^{-1} \cdot (a \cdot I) \cdot M = a(M^{-1} \cdot I \cdot M) = a \cdot I.$$

9. Na Figura 6.7 ilustramos os operadores  $T$  e  $R$ , onde  $Q$  é o ponto médio de  $PQ'$ , e vemos que  $T(P) = Q$  e  $R(P) = Q'$ .

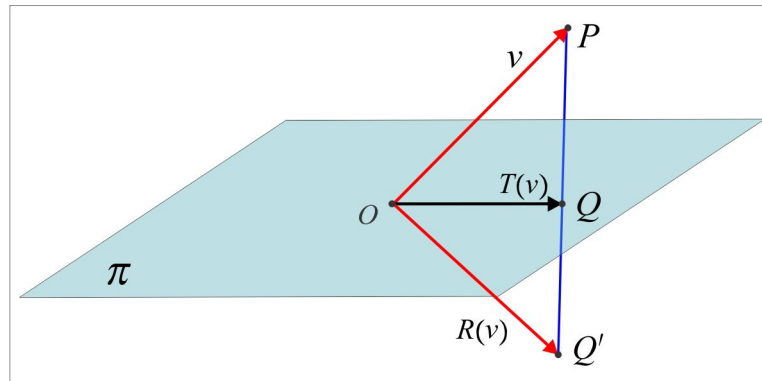


Figura 6.7: Ilustração do Exercício 9.

- (a) Um ponto genérico da reta  $r$  que passa por  $P(x, y, z)$  e é perpendicular ao plano  $\pi$  é  $X = (x + 3t, y + 2t, z + t)$  e no instante  $t_0 = -\frac{1}{14}(3x + 2y + z)$  o ponto  $X$  estará sobre o plano  $\pi$ . Logo

$$T(x, y, z) = Q = \frac{1}{14}(5x - 6y - 3z, -6x + 10y - 2z, -3x - 2y - 13z).$$

Por outro lado, considerando que  $Q$  é o ponto médio de  $PQ'$ , temos

$$Q = \frac{1}{2}(P + Q') \Rightarrow Q' = 2Q - P = \frac{1}{7}(-2x - 6y - 3z, -6x + 3y - 2z, -3x - 2y + 6z).$$

(b) É oportuno observar que se  $u$  é um vetor perpendicular ao plano  $\pi$ , então  $R(u) = -u$  e que

$$T(v) = 0 \Leftrightarrow v \perp \pi \quad \text{e} \quad T(u) = u \Leftrightarrow u \in \pi.$$

A base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  deve ser tal que  $T(v_1) = v_1$ ,  $T(v_2) = 0$  e  $T(v_3) = v_3$ . Escolha  $v_1$  e  $v_3$  LI, ambos no plano  $\pi$ , e  $v_2$  ortogonal ao plano.

10. O único autovalor é  $\lambda = 1$ , de multiplicidade 4, e o autoespaço correspondente é  $V_1 = \mathbb{R}$ . O operador não é diagonalizável.

11. (a)  $T(x, y, z) = (y, x, -z)$ .

12.  $T(x, y) = \frac{1}{5}(-4x - 3y, 3x + 4y)$ . Com a base  $\mathcal{B} = \{(1, -3), (3, 1)\}$  chegamos à matriz sugerida.

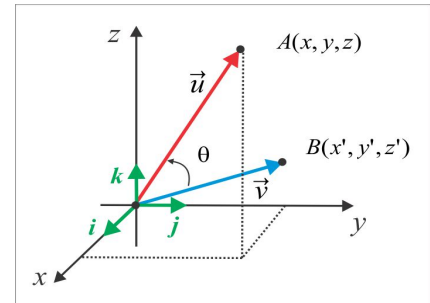
---



## Introdução

Quando tratamos com vetores geométricos determinados por dois pontos do espaço, as noções de ângulo e comprimento tornam-se bem claras. Na figura ao lado ilustramos dois vetores  $u$  e  $v$  e o ângulo  $\theta$  entre eles, onde vemos que:

$$\vec{u} = OA = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = OB = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$



Define-se a *norma* (ou comprimento) e o *produto interno* (ou produto escalar) no espaço  $\mathbb{R}^3$  por:

$$\begin{aligned} \text{NORMA:} \quad & \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{PRODUTO INTERNO:} \quad & \vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta. \end{aligned}$$

Quando o ângulo  $\theta$  for  $\pi/2$ , diremos que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais ou perpendiculares e anotamos  $\vec{u} \perp \vec{v}$ . Considerando que os vetores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  são unitários e mutuamente ortogonais, obtemos a seguinte expressão para o produto interno em coordenadas:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz' \tag{7.2}$$

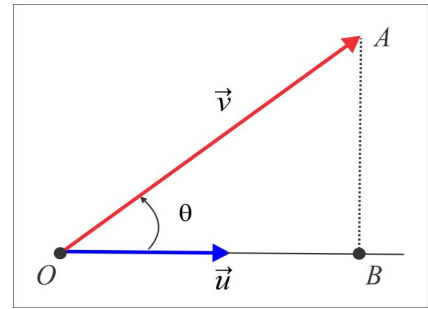
e as seguintes propriedades são válidas sejam quais forem os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  e seja qual for o escalar  $\lambda$ :

1.  $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$  e  $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .
2.  $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ .
3.  $(\lambda \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v})$ .
4.  $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$  e  $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$ .

Com o objetivo de interpretar geometricamente o produto interno, deixe-nos considerar dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , sendo  $\vec{u}$  um vetor unitário, isto é,  $\|\vec{u}\| = 1$ .

Na figura ao lado, o vetor  $\overrightarrow{OB}$  representa a *Projeção Ortogonal* do vetor  $\vec{v}$  sobre o vetor  $\vec{u}$ . Esta projeção ortogonal é representada por  $\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}$  e um cálculo simples nos dá:

$$\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \vec{u} = \left( \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \cdot \vec{u},$$



e, conseqüentemente,  $\|\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}\| = |\vec{u} \bullet \vec{v}|$ . De certa forma, o produto interno  $\vec{u} \bullet \vec{v}$  pode ser visto como o comprimento da projeção ortogonal  $\text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}$  e o vetor  $\vec{v} - \text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}$  é ortogonal ao vetor  $\vec{u}$ . De fato, basta observar que:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet (\vec{v} - \text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v}) &= \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \text{Proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \left( \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \right) \vec{u} \\ &= \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

► **Um produto Interno no Espaço  $\mathbb{R}^n$**  Podemos usar o produto escalar (7.2) como guia para definir um produto interno no espaço  $\mathbb{R}^n$ . Dados  $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vetores do  $\mathbb{R}^n$ , o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (7.3)$$

é conhecido por *produto interno usual* do  $\mathbb{R}^n$ . A *norma induzida* por esse produto interno é:

$$\|u\| = \sqrt{u \bullet v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

## 7.1 Preliminares

Em um espaço vetorial  $V$ , em que os objetos (vetores) não são, necessariamente, vetores geométricos (setas) as noções de comprimento e ângulo, embora bem definidas, não são tão óbvias. Por *produto interno* em  $V$  entendemos uma operação que associa a cada par de vetores  $(u, v)$  um escalar  $\langle u, v \rangle$ , preservando as propriedades do produto escalar entre vetores geométricos. Em símbolos, um produto interno em  $V$  é uma aplicação  $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , onde anotamos  $B(u, v) = \langle u, v \rangle$ , com as seguintes propriedades válidas para  $u, v$  e  $w$  em  $V$  e  $\lambda$  escalar:

$$(PI)_1 \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in V \quad \text{e} \quad \langle u, u \rangle = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0. \quad (B \text{ é positiva definida})$$

$$(PI)_2 \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in V. \quad (B \text{ é simétrica})$$

$$(PI)_3 \quad \langle u, \lambda \cdot v + w \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \text{e} \quad \langle \lambda \cdot u + v, w \rangle = \lambda \cdot \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle. \quad (B \text{ é bilinear})$$

Um produto interno induz no espaço  $V$  uma norma (distância), definida por  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ , a qual goza das seguintes propriedades:

$$(N1) \quad \|u\| \geq 0, \quad \forall u \in V \quad \text{e} \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0. \quad (\text{o \uacute{nico vetor de norma 0 \u00e9 o vetor nulo})$$

$$(N2) \quad \|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \|u\|, \quad \forall u \in V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{propriedade homog\u00eanea})$$

$$(N3) \quad |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{Desigualdade de Cauchy-Schwarz})$$

$$(N4) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in V. \quad (\text{Desigualdade Triangular})$$

Em um contexto mais geral, as propriedades (N1), (N2) e (N4) s\u00e3o usadas para definir a norma como um funcional  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

**EXEMPLO 7.1.1** O valor de  $x$  que ortogonaliza os vetores  $u = (1, -1, x, 2)$  e  $v = (0, x, 2, 1)$  do  $\mathbb{R}^4$  \u00e9 determinado a partir da rela\u00e7\u00e3o  $\langle u, v \rangle = 0$ . De fato:

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow -x + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

**EXEMPLO 7.1.2** No espa\u00e7o  $C([a, b])$ , das fun\u00e7\u00f5es cont\u00ednuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , o produto interno usual \u00e9 definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) dt. \quad (7.4)$$

Consideremos  $a = 0$ ,  $b = \pi$  e calculemos as normas e o produto interno entre os vetores  $f(t) = \cos t$  e  $g(t) = \sin t$ . A norma induzida pelo produto interno (7.4) \u00e9:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^\pi [f(t)]^2 dt \right)^{1/2}$$

e usando as identidades  $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$  e  $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ , encontramos

$$\begin{aligned} \|\cos t\|^2 &= \int_0^\pi (\cos t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2t) dt = \pi/2 \Rightarrow \|\cos t\| = \sqrt{\pi/2} \\ \|\sin t\|^2 &= \int_0^\pi (\sin t)^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = \pi/2 \Rightarrow \|\sin t\| = \sqrt{\pi/2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle \cos t, \sin t \rangle = \int_0^\pi \cos t \sin t dt = \frac{1}{2} [\sin^2 t]_0^\pi = 0. \quad (7.5)$$

**DEFINI\u00c7\u00c3O 7.1.3** Em um espa\u00e7o vetorial  $V$ , com produto interno, diremos que dois vetores  $u$  e  $v$  s\u00e3o ortogonais, e anotamos  $u \perp v$ , quando  $\langle u, v \rangle = 0$ . O \u00e2ngulo  $(u, v)$  entre dois vetores n\u00e3o nulos  $u$  e  $v$  \u00e9 definido a partir da rela\u00e7\u00e3o:

$$\cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

**LEMA 7.1.4** Vetores n\u00e3o nulos e ortogonais s\u00e3o LI.

**Prova:** Sejam  $u$  e  $v$  dois vetores não nulos e ortogonais e suponhamos que  $x \cdot u + y \cdot v = \mathbf{0}$ . Então:

$$\langle x \cdot u + y \cdot v, u \rangle = \langle \mathbf{0}, u \rangle = 0 \Leftrightarrow x \|u\|^2 + y \cdot \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

De modo similar prova-se que  $y = 0$ . ■

**EXEMPLO 7.1.5** Os vetores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  e  $e_3 = (0, 0, 1)$  da base canônica do  $\mathbb{R}^3$  são mutuamente ortogonais, em relação ao produto interno usual (7.3). De fato, basta observar que:

$$\|e_j\| = 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad e \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0.$$

Já a relação (7.5) nos diz que as funções  $\sin t$  e  $\cos t$  são ortogonais, em relação ao produto interno (7.4), com  $a = 0$  e  $b = \pi$ .

**LEMA 7.1.6** Em um espaço vetorial  $V$ , com produto interno, temos as seguintes regras de ortogonalidade:

- (i)  $\mathbf{0} \perp u$ ,  $\forall u \in V$ . (o vetor nulo é ortogonal a todos os vetores de  $V$ )
- (ii) Se  $u \perp v$ ,  $\forall v \in V$ , então  $u = \mathbf{0}$ .
- (iii) Se  $u \perp v$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda \cdot u \perp v$ .
- (iv) Se  $u \perp w$  e  $v \perp w$ , então  $u + v \perp w$ .

**Prova:** As comprovações são consequências diretas das definições. Como ilustração, temos:

$$(iii) \quad \langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle = 0, \quad \text{já que } \langle u, v \rangle = 0.$$

$$(iv) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0, \quad \text{já que } \langle u, w \rangle = 0 \text{ e } \langle v, w \rangle = 0.$$

**DEFINIÇÃO 7.1.7** Se os vetores de uma base de  $V$  são dois a dois ortogonais, a base denomina-se **BASE ORTOGONAL**. Se, além disso, os vetores da base são todos unitários (de norma igual a 1) ela denominar-se-á **BASE ORTONORMAL**.

**EXEMPLO 7.1.8** Em relação ao produto interno usual, a base canônica do  $\mathbb{R}^n$  é ortonormal. Uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $V$  é ortonormal em relação a um dado produto interno se, e só se, para cada  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , tem-se:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

### 7.1.1 Identidades & Desigualdades

No Capítulo 1, estabelecemos os Produtos Notáveis para vetores geométricos e esses produtos continuam válidos em espaços vetoriais com produto interno.

(a) **Quadrado da Soma:**  $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$

Prova:

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.\end{aligned}$$

(b) **Quadrado da Diferença:**  $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2.$

(c) **Produto da Soma pela Diferença:**  $\langle u + v, u - v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2.$

Prova:

$$\begin{aligned}\langle u + v, u - v \rangle &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2.\end{aligned}$$

(d) **Identidades do Paralelogramo e de Polarização:** Como consequência direta dos Produtos Notáveis, temos as identidades:

$$\begin{aligned}\text{Id. do Paralelogramo:}^3 \quad & \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2). \\ \text{Id. de Polarização:} \quad & \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle.\end{aligned}$$

Em um espaço vetorial  $V$  com produto interno, além dessas identidades destacamos duas desigualdades fundamentais: a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* e a *Desigualdade Triangular*. Dados dois vetores  $u$  e  $v$  no espaço  $V$ , temos:

(e) **Desigualdade de Cauchy-Schwarz:**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \tag{7.6}$$

---

<sup>3</sup> Ao fazer referência à Identidade do Paralelogramo, a norma considerada é induzida por um produto interno, isto é,  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ . Aliás, a Identidade do Paralelogramo é o indicador que determina se uma dada norma provém ou não de um produto interno (veja o Exercício 13).



**Prova:** Partindo da desigualdade  $\|u + t \cdot v\|^2 \geq 0$ , encontramos:

$$0 \leq \|u + t \cdot v\|^2 = \|v\|^2 t^2 + 2\langle u, v \rangle t + \|u\|^2 = At^2 + Bt + C, \quad (7.7)$$

sendo  $A = \|v\|^2$ ,  $B = 2\langle u, v \rangle$  e  $C = \|u\|^2$ . O trinômio do lado direito de (7.7) será não negativo se, e só se,  $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$ . Ora:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$$

e daí segue a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**(f) Desigualdade Triangular:**

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (7.8)$$

**Prova:** Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (7.6), obtemos:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

e daí resulta a Desigualdade Triangular (7.8).

### 7.1.2 Explorando as Desigualdades

Nas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Triangular, um fato que nos chama atenção é sobre a ocorrência das igualdades naquelas inequações. Se  $u$  ou  $v$  for o vetor nulo  $\mathbf{0}$ , é claro que  $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\|$  e, também,  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ ; no caso em que  $u$  e  $v$  são unitários, temos:

$$\langle u, v \rangle = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm v. \quad (7.9)$$

De fato:

$$u = \pm v \Leftrightarrow \|u \mp v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|u\|^2 \mp 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \mp 2\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = \pm 1.$$

**LEMA 7.1.9** *Os vetores  $u$  e  $v$  são LD se, e somente se,  $|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$ . Em outras palavras, na Desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorre a igualdade apenas para vetores LD.*

**Prova:** Se  $u = \mathbf{0}$  ou  $v = \mathbf{0}$ , nada há a provar. Suponhamos  $u$  e  $v$  não nulos e observemos que:

$$|\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow \left\langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \pm 1$$

e de (7.9) deduzimos que  $u = (\pm \|u\| / \|v\|) \cdot v$ , isto é,  $u$  e  $v$  são LD. ■

**LEMA 7.1.10** Os vetores  $u$  e  $v$  são LD se, e somente se,  $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ . Em outras palavras, na Desigualdade Triangular ocorre a igualdade apenas para vetores LD.

**Prova:** Temos que:

$$\begin{aligned}\|u + v\| &= \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u + v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\langle u, v \rangle| = \|u\| \cdot \|v\|\end{aligned}$$

e do Lema 7.2 deduzimos que os vetores  $u$  e  $v$  são LD. ■

**EXEMPLO 7.1.11 (Extremos de um Funcional)** No espaço vetorial  $V$ , dado um vetor unitário  $u_0$ , deixe-nos considerar o funcional (não linear)  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por  $\varphi(v) = \|u_0 - v\|$ , onde  $S = \{v \in V : \|v\| = 1\}$  é a esfera unitária de  $V$ . Em que pontos (vetores) o funcional  $\varphi$  atinge seus valores extremos?

**Solução:** É claro que  $\|u_0 - v\| \geq 0$  e o valor mínimo de  $\|u_0 - v\|$  é zero, atingido no vetor  $v_1 = u_0$ . Por outro lado, se  $\|v\| = 1$ , temos:

$$\begin{aligned}\varphi(v)^2 &= \|u_0 - v\|^2 = \|u_0\|^2 - 2\langle u_0, v \rangle + \|v\|^2 = 2 - 2\langle u_0, v \rangle \\ &\leq 2 + 2\|u_0\| \cdot \|v\| \leq 4\end{aligned}$$

e, portanto:

$$\varphi(v)^2 = 4 \Leftrightarrow 2 - 2\langle u_0, v \rangle = 4 \Leftrightarrow \langle u_0, v \rangle = -1$$

e de (7.9) segue que  $v = -u_0$ . O valor máximo de  $\varphi(v)$  em  $S$  é 2, atingido no vetor  $v = -u_0$ .

---

ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

---

1. No espaço  $\mathbb{R}^2$ , dados  $u = (x, y)$  e  $v = (x', y')$ , verifique que a operação

$$\langle u, v \rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy' \tag{7.10}$$

define um produto interno em relação ao qual os vetores  $u = (1, 1)$  e  $v = (1, -1)$  são ortogonais.

2. A operação  $\langle (x, y), (x', y') \rangle = |x' - x| + |y' - y|$  define um produto interno no  $\mathbb{R}^2$ ? Por quê?
3. Se  $u$  e  $v$  são unitários e  $\langle u, v \rangle = \pm 1$ , é correto afirmar que  $u = \pm v$ ? Se não, apresente um contra-exemplo.

4. Se dois vetores  $u$  e  $v$  de um espaço vetorial  $V$  com produto interno são unitários e ortogonais, mostre que  $\|u - v\| = \sqrt{2}$ .
5. No espaço  $V = \mathcal{M}_{2 \times 2}$  das matrizes reais  $2 \times 2$ , dados  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$ , defina a operação:

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, \quad (7.11)$$

- (a) Verifique que a operação (7.11) define um produto interno em  $V$ .
- (b) Calcule as normas e o ângulo entre os vetores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Encontre o valor de  $x$  que torna ortogonais os vetores:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{pmatrix}.$$

6. Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno e considere dois vetores  $u$  e  $v$  em  $V$ , com  $v \neq \mathbf{0}$ . Mostre que a função real  $f(x) = \|u + xv\|^2$  atinge um valor mínimo.
7. No espaço  $\mathbb{R}^3$  considere a norma induzida pelo produto interno:

$$\langle u, v \rangle = 2xx' + yy' + 4zz', \quad (7.12)$$

sendo  $u = (x, y, z)$ ,  $v = (x', y', z')$ . Qual o trabalho realizado pelo campo de forças (constante)  $\mathbf{F} = (1, 2, 6)$ , para transportar uma partícula do ponto  $A(1, 1, 2)$  ao ponto  $B(2, 3, -1)$ , em linha reta. Recorde-se que o trabalho é o *produto* da força pelo deslocamento.

8. Dados dois vetores não nulos  $v_1$  e  $v_2$ , qual valor deve-se atribuir à constante  $\lambda$  para que os vetores  $v_1$  e  $v'_2 = v_2 - \lambda v_1$  sejam ortogonais?
9. Sejam  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  vetores não nulos e suponha que  $v_1$  e  $v_2$  sejam ortogonais. Quais valores devem assumir as constantes  $\lambda$  e  $\mu$ , para que o vetor  $v'_3 = v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1$  seja ortogonal a  $v_1$  e  $v_2$ , simultaneamente?
10. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em  $\mathbb{R}^3$  e mostre que:

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9, \quad \text{com } x, y, z > 0.$$

11. Se  $u$  e  $v$  são ortogonais, mostre que

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad (\text{Teorema de Pitágoras})$$

Ilustre graficamente a situação com vetores no plano  $\mathbb{R}^2$ .

12. No espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  considere a seguinte operação:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A). \quad (7.13)$$

Mostre que a operação (7.13) define um produto interno em  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  e encontre um vetor  $Y \neq \mathbf{0}$ , ortogonal ao vetor

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. No espaço  $\mathbb{R}^2$ , mostre que o funcional  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$  define uma norma, a qual não atende a Identidade do Paralelogramo e, portanto, não é induzida por um produto interno.

## 7.2 Ortogonalização

Por que as bases ortogonais são importantes e como ortogonalizar uma dada base? As coordenadas de um vetor numa base ortogonal são relativamente simples de calcular e isso já justifica a importância das bases ortogonais. Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base ortogonal de  $V$  e  $u$  é um vetor qualquer, então

$$u = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n \quad (7.14)$$

e para calcular a coordenada  $x_j$  fazemos o produto interno dos dois lados de (7.14) pelo vetor  $v_j$ , usamos a ortogonalidade e encontramos:

$$\langle u, v_j \rangle = x_j \langle v_j, v_j \rangle = x_j \|v_j\|^2 \Rightarrow x_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (7.15)$$

O escalar  $\frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$  que figura em (7.15) é o **COEFICIENTE DE FOURIER** de  $u$  com respeito ao vetor  $v_j$ .

**EXEMPLO 7.2.1** No espaço  $\mathbb{R}^3$ , com o produto interno usual, a base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, 2)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

é ortogonal, tendo em vista que  $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Os coeficientes de Fourier do vetor  $u = (3, -1, 2)$  em relação à base  $\mathcal{B}$  são:

$$x_1 = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = 1, \quad x_2 = \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} = -2 \quad e \quad x_3 = \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} = 1$$

e, consequentemente:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O processo que apresentamos aqui para ortogonalizar uma base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  do espaço vetorial  $V$  é devido a **Gram-Schmidt** e se inicia fixando uma das direções, digamos  $v'_1 = v_1$ , e construindo vetores  $v'_2, v'_3, \dots, v'_n$  de modo que  $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  seja uma base ortogonal, como sugerido nos Exercícios 8 e 9 da seção Escrevendo para Aprender 7.0. O vetor  $v'_k$  da base  $\mathcal{B}'$  vem dado por:

$$v'_k = v_k - \frac{\langle v_k, v'_{k-1} \rangle}{\|v'_{k-1}\|^2} \cdot v'_{k-1} - \frac{\langle v_k, v'_{k-2} \rangle}{\|v'_{k-2}\|^2} \cdot v'_{k-2} - \dots - \frac{\langle v_k, v'_2 \rangle}{\|v'_2\|^2} \cdot v'_2 - \frac{\langle v_k, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} \cdot v'_1, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

De forma explícita, temos:

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 \\ v'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} \cdot v'_1 \\ v'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v'_2 \rangle}{\|v'_2\|^2} \cdot v'_2 - \frac{\langle v_3, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} \cdot v'_1 \\ &\vdots \\ v'_n &= v_n - \frac{\langle v_n, v'_{n-1} \rangle}{\|v'_{n-1}\|^2} \cdot v'_{n-1} - \frac{\langle v_n, v'_{n-2} \rangle}{\|v'_{n-2}\|^2} \cdot v'_{n-2} - \dots - \frac{\langle v_n, v'_2 \rangle}{\|v'_2\|^2} \cdot v'_2 - \frac{\langle v_n, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} \cdot v'_1 \end{aligned}$$

**EXEMPLO 7.2.2** No espaço  $\mathbb{P}_1$  dos polinômios de grau  $\leq 1$ , considere o produto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^2 p(x)q(x) dx.$$

A partir da base  $\mathcal{B} = \{1, x\}$  vamos construir, em duas etapas, uma base ortonormal de  $\mathbb{P}_1$ .

**(i) ORTOGONALIZANDO A BASE  $\mathcal{B}$ .** Sejam  $v_1 = 1$ ,  $v_2 = x$  e consideremos

$$\begin{aligned} v'_1 &= v_1 = 1 \quad e \\ v'_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} \cdot v'_1 = x - \frac{\int_0^2 x dx}{\int_0^2 1^2 dx} = x - 1. \end{aligned}$$

A base  $\mathcal{B}' = \{1, x - 1\}$  assim obtida é ortogonal.

(ii) **ORTONORMALIZANDO A BASE  $\mathcal{B}'$ .** Temos

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^2 dx = 2 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2}$$

$$\|x - 1\|^2 = \langle x - 1, x - 1 \rangle = \int_0^2 (x - 1)^2 dx = 2/3 \Rightarrow \|x - 1\| = \sqrt{2/3}$$

e a base  $\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x - 1) \right\}$  é ortonormal.

**EXEMPLO 7.2.3** Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^5$ , gerado pelos vetores  $v_1 = (1, 1, 0, 1, 2)$ ,  $v_2 = (0, 2, 1, -2, 0)$  e  $v_3 = (1, 0, 1, -1, 2)$ . Construir uma base ortogonal  $\mathcal{B}'$  de  $W$ , da qual façam parte os vetores  $v_1$  e  $v_2$ . Qual as coordenadas do vetor  $u = (1, 1, 2, 1, -1)$  na base  $\mathcal{B}'$ ?

**Solução:** Inicialmente notamos que  $v_1$  e  $v_2$  são ortogonais e, por isso, podem fazer parte da base ortogonal  $\mathcal{B}'$  a ser construída e resta-nos construir um vetor  $v'_3$ , ortogonal a  $v_1$  e  $v_2$ . De acordo com o método de Gram-Schmidt, consideramos:

$$v'_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 - \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1$$

e um cálculo direto nos dá  $v'_3 = \left( \frac{3}{7}, -\frac{26}{21}, \frac{2}{3}, -\frac{19}{21}, \frac{6}{7} \right)$  e temos a base ortogonal:

$$\mathcal{B}' = \left\{ (1, 1, 0, 1, 2), (0, 2, 1, -2, 0), \left( \frac{3}{7}, -\frac{26}{21}, \frac{2}{3}, -\frac{19}{21}, \frac{6}{7} \right) \right\}.$$

As coordenadas do vetor  $u$  na base  $\mathcal{B}'$  são os coeficientes de Fourier de  $u$  em relação aos vetores básicos  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v'_3$ , isto é:

$$[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{com } c_1 = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}, \quad c_2 = \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \quad \text{e} \quad c_3 = \frac{\langle u, v'_3 \rangle}{\|v'_3\|^2}.$$

Para finalizar esta seção, ressaltamos a importância de uma base ortonormal  $\mathcal{B}$ , de um espaço vetorial  $V$ , na representação matricial de um operador linear  $T : V \rightarrow V$ . Considerando  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  e os coeficientes de Fourier  $c_{ij} = \langle T(v_j), v_i \rangle$ ,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ , então:

$$T(v_j) = c_{1j} \cdot v_1 + c_{2j} \cdot v_2 + \dots + c_{nj} \cdot v_n, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n,$$

e, conseqüentemente, temos a representação matricial:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle T(v_1), v_1 \rangle & \langle T(v_2), v_1 \rangle & \dots & \langle T(v_n), v_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T(v_1), v_n \rangle & \langle T(v_2), v_n \rangle & \dots & \langle T(v_n), v_n \rangle \end{pmatrix}$$

1. Use o processo de ortogonalização para construir uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^2$ , a partir da base  $\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, 1)\}$ .
2. Repita o exercício precedente considerando a base  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$  do  $\mathbb{R}^3$ .
3. Ortonormalize a base  $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$  do  $\mathbb{R}^2$ , em relação ao produto interno (7.10).
4. Considere o produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$  e encontre uma base ortonormal para o subespaço

$$W = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}.$$

5. No espaço  $\mathbb{P}_2$  dos polinômios de grau  $\leq 2$ , considere o produto interno:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx.$$

Encontre uma base ortonormal para o subespaço de  $\mathbb{P}_2$  gerado pelos vetores  $v_1 = 1$  e  $v_2 = 1 - x$ .

6. No espaço  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ , considere o produto interno  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$  e ortonormalize a base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. No espaço das funções reais contínuas em  $[-\pi, \pi]$ , considere o produto interno usual:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

e deixe  $f$  ser a função dada por  $f(x) = \text{sen}(kx)$ , onde  $k$  é um inteiro positivo.

(a) Calcule  $\|f\|$ .

(b) Como se calcula coeficiente de Fourier de uma função contínua  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , com respeito à função  $f$ ? O que representa este coeficiente?

8. Considere o espaço das funções contínuas em  $[0, 2\pi]$ , equipado do produto interno usual:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Se  $g_n(x) = \cos(nx)$  e  $h_m(x) = \text{sen}(mx)$ , sendo  $m$  e  $n$  inteiros, com  $n \geq 0$  e  $m \geq 1$ , mostre que:

$$(a) \|g_0\| = \sqrt{2\pi} \quad \text{e} \quad \|g_n\| = \|h_n\| = \sqrt{\pi}, \quad \forall n \geq 1.$$

$$(b) g_n \perp h_m, \quad \forall m, n.$$

$$(c) g_n \perp g_m, \quad \text{se } m \neq n.$$

No cálculo das integrais use as relações

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A \cos B &= \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)] \\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]. \end{aligned}$$

9. Com a notação do exercício precedente, calcule a norma e os coeficientes de Fourier da função  $f(x) = x$ , com respeito às funções  $g_n$  e  $h_m$ .

10. Seja  $V$  o espaço das funções contínuas em  $[0, 1]$ , equipado do produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

(a) Encontre uma base ortonormal do subespaço gerado pelas funções  $f(x) = x$  e  $g(x) = x^2$ .

(b) Repita o ítem (a) com o subespaço  $W = [1, x, x^2]$ .

### 7.3 Complementar Ortogonal

No que se segue,  $V$  é um espaço vetorial real e  $\langle *, * \rangle$  um produto interno em  $V$ . Dado um subconjunto  $S$  de  $V$ , o **COMPLEMENTAR ORTOGONAL** de  $S$ , representado por  $S^\perp$  (lê-se "S perp"), é o subconjunto de  $V$  constituído pelos vetores ortogonais a  $S$ , isto é:

$$S^\perp = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in S\}.$$

**LEMA 7.3.1** *O subconjunto  $S^\perp$  é um subespaço vetorial de  $V$ , mesmo que  $S$  não o seja.*

**Prova:** Dados  $v_1$  e  $v_2$  em  $S^\perp$  e um escalar  $\lambda$ , devemos mostrar que  $\lambda v_1 + v_2 \in S^\perp$ . De fato, para cada vetor  $u$  de  $S$ , temos  $\langle u, v_1 \rangle = 0$  e  $\langle u, v_2 \rangle = 0$  e, portanto:

$$\langle u, \lambda v_1 + v_2 \rangle = \lambda \langle u, v_1 \rangle + \langle u, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda v_1 + v_2 \in S^\perp. \quad \blacksquare$$



**LEMA 7.3.2** Se  $W$  é o subespaço de  $V$ , gerado pelos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , então:

$$v \in W^\perp \Leftrightarrow \langle v, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, k.$$

**Prova:** Suponhamos que  $\langle v, v_j \rangle = 0$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots, k$  e seja  $u = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_k \cdot v_k$  um vetor genérico de  $W$ . Então:

$$\langle v, u \rangle = x_1 \cdot \langle v, v_1 \rangle + x_2 \cdot \langle v, v_2 \rangle + \dots + x_k \cdot \langle v, v_k \rangle = 0$$

de onde segue que  $v \in W^\perp$ . Reciprocamente, se  $v \in W^\perp$  então  $\langle v, u \rangle = 0$ , seja qual for o vetor  $u$  de  $W$  e, em particular,  $\langle v, v_j \rangle = 0$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, k$ . ■

**EXEMPLO 7.3.3** Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^4$ , gerado pelos vetores  $u_1 = (1, 1, 0, 0)$  e  $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$  e determinemos o complementar ortogonal  $W^\perp$ .

**Solução:** Temos que:

$$v = (x, y, z, t) \in W^\perp \Leftrightarrow v \cdot u_1 = 0 \quad \text{e} \quad v \cdot u_2 = 0$$

e daí resulta  $x + y = 0$  e  $-x + y + t = 0$ , isto é,  $y = -x$  e  $t = 2x$ . Logo,  $W^\perp = \{(x, -x, z, 2x) : x, z \in \mathbb{R}\}$  e  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$  é uma base do complementar ortogonal  $W^\perp$ .

**EXEMPLO 7.3.4** Decorre diretamente da definição que em um espaço vetorial  $V$ , tem-se:

$$V^\perp = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{0}\}^\perp = V.$$

### 7.3.1 Projeção Ortogonal sobre um Subespaço

Na introdução deste capítulo, estabelecemos a projeção ortogonal de um vetor geométrico  $\vec{v}$  sobre um vetor  $\vec{u}$  e com o objetivo de generalizar a noção de projeção ortogonal sobre um subespaço  $W$  de  $V$ , deixe-nos considerar uma base ortogonal  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de  $W$  e seja  $v$  um vetor de  $V$ . Se  $w$  é o vetor  $w$  de  $W$  dado por:

$$w = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k,$$

então  $v - w$  jaz no complementar ortogonal  $W^\perp$ . De fato, para cada  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ , temos, pela ortogonalidade da base  $\mathcal{B}$ , que:

$$\langle v - w, v_i \rangle = \langle v, v_i \rangle - \sum_{j=1}^k \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} \cdot \langle v_j, v_i \rangle = \langle v, v_i \rangle - \langle v, v_i \rangle = 0$$

e assim  $v - w \in W^\perp$ . Logo,

$$v = w + (v - w) \in W + W^\perp \quad (7.16)$$

e a relação (7.16) sugere olhar o vetor  $w$  como a projeção ortogonal do vetor  $v$  no subespaço  $W$  e anotamos  $w = \text{Proj}_W(v)$ , isto é:

$$\text{Proj}_W(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k.$$

**EXEMPLO 7.3.5** *Vamos encontrar a projeção ortogonal do vetor  $v = (1, 0, 0, 1, 2)$  no subespaço  $W$  do  $\mathbb{R}^5$ , gerado pelos vetores  $v_1 = (1, 2, 0, 0, 1)$  e  $v_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$ . Ortogonalizando a base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  de  $W$ , encontramos a base  $\mathcal{B}' = \{(1, 2, 0, 0, 1), (\frac{1}{2}, 0, 1, 0, \frac{1}{2})\} = \{v'_1, v'_2\}$  e temos:*

$$\text{Proj}_W(v) = \frac{\langle v, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} \cdot v'_1 + \frac{\langle v, v'_2 \rangle}{\|v'_2\|^2} \cdot v'_2 = (1, 1, 1, 0, 1). \quad \blacksquare$$

Da relação (7.16) deduzimos que  $V = W + W^\perp$  e para concluir que a soma é direta, resta-nos verificar que  $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ . De fato, se  $v \in W \cap W^\perp$ , então  $v \in W$  e  $\langle v, w \rangle$ , seja qual for o vetor  $w$  de  $W$  e, em particular,  $\langle v, v \rangle = 0$ , isto é,  $v = \mathbf{0}$ .

Em espaços vetoriais de dimensão finita, a decomposição em soma direta pode ser estabelecida utilizando o completamento de uma base de  $W$ , como mostra o seguinte resultado.

**LEMA 7.3.6 (Decomposição em Soma Direta)** *Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita. Se  $W$  é qualquer subespaço vetorial de  $V$ , então  $V = W \oplus W^\perp$ .*

**Prova:** Se  $W = \{\mathbf{0}\}$  ou  $W = V$  então  $W^\perp = V$  ou  $W^\perp = \{\mathbf{0}\}$  e, nestes casos, nada há a demonstrar, já que  $V = \{\mathbf{0}\} \oplus V$ . Suponhamos que  $0 < \dim W = k < \dim V = n$  e seja  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  uma base ortonormal de  $W$  e completemos essa base a uma base

$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$$

de  $V$ , a qual é suposta ortonormal (no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt os vetores  $v_1, v_2, \dots, v_k$  não mudam, porque já são ortonormais). Afirmamos que:

$$W^\perp = [v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n].$$

De fato, dado  $v$  em  $V$ , temos:

$$v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_k \cdot v_k + x_{k+1} \cdot v_{k+1} + x_{k+2} \cdot v_{k+2} + \dots + x_n \cdot v_n \quad (7.17)$$

e fazendo o produto interno de ambos os lados de (7.17) com  $v_j$ , encontramos

$$\langle v, v_j \rangle = x_j \langle v_j, v_j \rangle = x_j \|v_j\|^2 = x_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Consequentemente:

$$v \in W^\perp \Leftrightarrow \langle v, v_i \rangle = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k,$$

e de (7.17) resulta  $v = x_{k+1} \cdot v_{k+1} + x_{k+2} \cdot v_{k+2} + \dots + x_n \cdot v_n$ , isto é,  $v \in [v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n]$ . Logo,  $V = W + W^\perp$  e como  $W \cap W^\perp = \{0\}$ , temos a decomposição  $V = W \oplus W^\perp$ . ■

**EXEMPLO 7.3.7** Se  $W$  é um subespaço vetorial de  $V$ , como consequência do Lema 7.3.6, temos  $W^{\perp\perp} = W$ . De fato, se  $v = v_1 + v_2 \in W \oplus W^\perp$ , jaz no complementar  $W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp$ , então:

$$0 = \langle v, v_2 \rangle = \langle v_1 + v_2, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle = \|v_2\|^2$$

e assim,  $v_2 = 0$ ,  $v = v_1 \in W$  e temos  $W^{\perp\perp} \subset W$ . Reciprocamente, se  $v \in W$ , então  $\langle w, v \rangle = 0$ , seja qual for o vetor  $w$  do complementar  $W^\perp$  e assim, temos:

$$\langle v, w \rangle = 0, \quad \forall w \in W^\perp \Rightarrow v \in (W^\perp)^\perp = W^{\perp\perp}.$$

Logo,  $W^{\perp\perp} \subset W$  e  $W \subset (W^\perp)^\perp$ , isto é,  $W = W^{\perp\perp}$ . ■

1. Em cada caso, encontre uma base do subespaço  $W^\perp$ .

(a)  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$     (b)  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ .

2. Seja  $T$  o operador do  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ .

(a) Encontre uma base ortonormal do subespaço  $\mathcal{N}(T)^\perp$ .

(b) Repita o item (a), considerando no  $\mathbb{R}^3$  o produto interno (7.12).

3. Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores:  $v_1 = (1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1)$  e  $v_3 = (1, 0, -1)$ .

(a) Encontre o complementar ortogonal  $W^\perp$ .

(b) Qual o operador  $T$  do  $\mathbb{R}^3$ , que satisfaz a  $\text{Im}(T) = W^\perp$  e  $\mathcal{N}(T) = W$ ?

4. Seja  $W$  o subespaço  $\mathbb{R}^3$  gerado pelo conjunto  $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ .

(a) Há diferença entre  $S^\perp$  e  $W^\perp$ ?

(b) Encontre uma base ortogonal de  $W^\perp$ .

5. Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^3$ , gerado pelos vetores  $(1, 0, 1)$  e  $(1, 1, 0)$ . Determine uma base de  $W^\perp$ , considerando o produto escalar

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + yy' + zz'.$$

6. Mostre que o espaço solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

coincide com o complementar ortogonal em  $\mathbb{R}^3$  do subespaço  $[(2, 1, -1), (0, 1, 1)]$ . Encontre uma base ortonormal do espaço solução.

7. Repita o exercício precedente com os sistemas:

$$(a) \begin{cases} 3x - 2y + z + t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

8. Seja  $W$  o subespaço do  $\mathbb{R}^5$  gerado pelos vetores:  $v_1 = (1, 2, 3, -1, 2)$  e  $v_2 = (2, 4, 7, 2, -1)$ . Encontre uma base do subespaço  $W^\perp$ , considerando em  $\mathbb{R}^5$  o produto interno usual.

### REVISANDO O CONTEÚDO

1. Em um espaço vetorial  $V$  com produto interno, considere dois vetores  $u$  e  $v$ , unitários e ortogonais. Mostre que

$$(xu + yv) \perp (zu + tv) \Leftrightarrow xz + yt = 0.$$

2. O funcional  $\varphi(v)$ , definido no Exemplo 7.1.11, tem valor mínimo 0 e valor máximo 2 atingidos em  $v = u_0$  e  $v = -u_0$ , respectivamente. Mostre que  $\varphi(v) = \sqrt{2}$  se, e somente se,  $v \perp u_0$ .

3. Dada uma matriz real  $A$ , de ordem  $2 \times 2$ , mostre que a matriz  $A^t A$  é diagonal se, e somente se, as colunas de  $A$  são vetores ortogonais, em relação ao produto interno usual do  $\mathbb{R}^2$ .

4. Em um espaço vetorial  $V$ , considere dois produtos internos  $\langle *, * \rangle_1$  e  $\langle *, * \rangle_2$  e defina:

$$\begin{aligned}\langle *, * \rangle_3 &= \langle *, * \rangle_1 + \langle *, * \rangle_2 \\ \langle *, * \rangle_4 &= \lambda \cdot \langle *, * \rangle_1, \quad \lambda > 0\end{aligned}$$

Mostre que  $\langle *, * \rangle_3$  e  $\langle *, * \rangle_4$  definem produtos internos em  $V$ .

5. No espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$  construa dois produtos internos  $\langle *, * \rangle_1$  e  $\langle *, * \rangle_2$ , tais que a diferença  $\langle *, * \rangle_3 = \langle *, * \rangle_1 - \langle *, * \rangle_2$  não defina um produto interno.
6. Dado um operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\langle T(u), u \rangle = 0, \quad \forall u$ , mostre que

$$\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2.$$

7. Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz  $2 \times 2$  e defina  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $T(u) = A \cdot [u]$ , onde identifica-se  $\mathbb{R}^2 \approx M_{1 \times 2}$ . Em relação ao produto interno usual do  $\mathbb{R}^2$ , mostre que:

$$\langle T(1, 0), (0, 1) \rangle = a_{21} \quad \text{e} \quad \langle T(0, 1), (1, 0) \rangle = a_{12}.$$

8. Com a notação do exercício precedente e admitindo que  $\langle T(u), u \rangle = 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^2$ , mostre que a matriz  $A$  é antissimétrica.
9. Se  $\langle *, * \rangle$  é um produto interno no espaço vetorial  $\mathbb{R}$ , mostre que existe um escalar  $\lambda$ , tal que  $\langle x, y \rangle = \lambda(x \cdot y)$ . Em outras palavras, a menos de uma constante multiplicativa, um produto interno em  $\mathbb{R}$  coincide com o produto usual de números reais.
10. No espaço  $\mathbb{C}_0$ , das funções contínuas  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx,$$

encontre uma função  $g(x)$  ortogonal a  $f(x) = xe^x$ .

---

## RESPOSTAS & SUGESTÕES

---

### ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Comprove uma a uma as propriedades de produto interno. Sendo  $u = (1, 1)$  e  $v = (1, -1)$ , temos

$$\langle u, v \rangle = 2 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0.$$

2. Não. Se  $u = (1, 0)$  e  $v = (0, 0)$ , um cálculo direto nos dá:

$$\langle u, v \rangle = |0 - 1| + |0 - 0| = 1.$$

Se fosse um produto interno, teríamos  $\langle u, \mathbf{0} \rangle = 0$ .

3. Não. No  $\mathbb{R}^2$  os vetores  $u = (1, 1)$  e  $v = (-1, 0)$  atendem a  $\langle u, v \rangle = -1$  e, contudo,  $u \neq \pm v$ .

4. Sendo  $u$  e  $v$  unitários e ortogonais, temos  $\|u\| = \|v\| = 1$  e  $\langle u, v \rangle = 0$ . Assim,

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = 2.$$

5. (a) Comprove as condições que definem o produto interno.

(b) Temos

$$\|A\| = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2 \quad \text{e} \quad \|B\| = \sqrt{4 + 2 + 3 + 1} = \sqrt{10}.$$

Além disso,  $\langle A, B \rangle = 1$  e representando por  $\theta$  o ângulo entre  $A$  e  $B$ , temos:

$$\cos \theta = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \|B\|} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \arccos \left( \frac{1}{2\sqrt{10}} \right).$$

(c) Os vetores  $X$  e  $Y$  serão ortogonais quando  $\langle X, Y \rangle = 0$ . Um cálculo direto nos dá  $x = -15$ .

6. A função  $f(x)$  é o trinômio do segundo grau

$$f(x) = \|v\|^2 x^2 + 2\langle u, v \rangle x + \|u\|^2,$$

com discriminante  $\Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0$ . e seu valor mínimo é  $-\Delta/4 \|v\|^2$ , que é a ordenada do vértice.

7. O deslocamento é  $\mathbf{AB} = (1, 2, -3)$  e o trabalho é igual a:

$$\tau = \langle \mathbf{F}, \mathbf{AB} \rangle = \langle (1, 2, 6), (1, 2, -3) \rangle = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 6 \times (-3) = -66.$$

8. O vetor  $v'_2 = v_2 - \lambda v_1$  será ortogonal a  $v_1$ , quando  $\langle v'_2, v_1 \rangle = 0$  e daí resulta:

$$0 = \langle v'_2, v_1 \rangle = \langle v_2 - \lambda v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle - \lambda \langle v_1, v_1 \rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}.$$

9. O vetor  $v'_3 = v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1$  será ortogonal a  $v_1$  e  $v_2$ , quando o par  $(\lambda, \mu)$  for solução do sistema

$$\begin{cases} \langle v_1, v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1 \rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

e considerando que  $\langle v_2, v_1 \rangle = 0$ , obtemos:

$$\begin{cases} \langle v_3, v_1 \rangle - \mu \|v_1\|^2 = 0 \\ \langle v_3, v_2 \rangle - \lambda \|v_2\|^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\langle v_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}.$$

10. Considere os vetores  $u = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$  e  $v = (\sqrt{1/x}, \sqrt{1/y}, \sqrt{1/z})$  e use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

11. Temos que  $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle$  e expandindo o produto interno, encontramos:

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \underbrace{2\langle u, v \rangle}_{=0} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

### ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. Primeiro ortogonalize a base, substituindo o vetor  $v_2 = (2, 1)$  pelo vetor

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (2, 1) - \frac{\langle (2, 1), (1, 2) \rangle}{\|(1, 2)\|^2} (1, 2) = (2, 1) - \frac{4}{5} (1, 2) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Para concluir, normalize a base  $\{v_1, v'_2\}$  e encontre a base ortonormal

$$\mathcal{B} = \left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right), \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}.$$

2.  $\mathcal{B}^\perp = \left\{ (1, 1, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$ .

3. Com relação ao produto interno (7.10) a base  $\mathcal{B}$  é ortogonal e resta-nos *normalizá-la*. (*normalizar* uma base é tornar seus componentes unitários). Temos:

$$\|(1, -1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|(1, 1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

A base ortonormal correspondente é, portanto:

$$\mathcal{B}^\perp = \left\{ \left( 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2} \right), \left( 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2} \right) \right\}.$$

4. Considere, por exemplo, a base  $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$  de  $W$  e ortonormalize essa base, via Gram-Schmidt.

5. Os vetores  $v_1 = 1$  e  $v_2 = 1 - x$  são LI e formam uma base do subespaço. Temos

$$\begin{aligned}\|v_1\|^2 &= \|1\|^2 = \int_{-1}^1 dx = 2 \\ \|v_2\|^2 &= \|1 - x\|^2 = \int_{-1}^1 (1 - x)^2 dx = \int_{-1}^1 (1 - 2x + x^2) dx = 8/3 \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \int_{-1}^1 (1 - x) dx = 2.\end{aligned}$$

Para ortogonalizar a base, consideramos  $v'_1 = v_1$  e

$$v'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v'_1 \rangle}{\|v'_1\|^2} v'_1 = 1 - x - \frac{2}{2} = -x.$$

A base  $\mathcal{B} = \{1, -x\}$  de  $\mathbb{P}_2$  é ortogonal e a base

$$\mathcal{B}' = \left\{ 1/\sqrt{2}, -\sqrt{3/2} x \right\}.$$

é ortonormal.

6. Dado que  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot A)$ , as regras que definem o Produto Interno são facilmente comprovadas usando propriedades do traço e da transposição de matrizes:

$$(a) \langle A, A \rangle = \text{tr}(A^t \cdot A) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0. \quad (\text{aqui } A = [a_{ij}]_{2 \times 2})$$

$$(b) \langle B, A \rangle = \text{tr}(A^t \cdot B) = \text{tr}[(B^t \cdot A)]^t = \text{tr}(B^t \cdot A) = \langle A, B \rangle.$$

$$(c) \langle A + B, C \rangle = \text{tr}(C^t \cdot (A + B)) = \text{tr}(C^t \cdot A) + \text{tr}(C^t \cdot B) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle.$$

$$(d) \langle x \cdot A, B \rangle = \text{tr}(B^t \cdot (xA)) = x \text{tr}(B^t \cdot A) = x \langle A, B \rangle.$$

Para os vetores básicos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

temos:  $\|A\|^2 = 2$ ,  $\|B\|^2 = 2$ ,  $\|C\|^2 = 3$  e  $\|D\|^2 = 4$  e o processo de Gram-Schmidt nos ensina que a base ortogonal  $\mathcal{B}' = \{A', B', C', D'\}$  deve ser construída de tal forma que:

$$\begin{aligned}A' &= A \\ B' &= B - \frac{\langle B, A' \rangle}{\|A'\|^2} \cdot A' \\ C' &= C - \frac{\langle C, B' \rangle}{\|B'\|^2} \cdot B' - \frac{\langle C, A' \rangle}{\|A'\|^2} \cdot A' \\ D' &= D - \frac{\langle D, C' \rangle}{\|C'\|^2} \cdot C' - \frac{\langle D, B' \rangle}{\|B'\|^2} \cdot B' - \frac{\langle D, A' \rangle}{\|A'\|^2} \cdot A'\end{aligned}$$



Um cálculo direto nos conduz a:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. (a)  $\sqrt{\pi}$  (b)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen}(kx) dx$ .

8. (a) Temos  $g_n(x) = \cos(nx)$  e, portanto, a função  $g_0$  é constante e igual a 1. Logo,

$$\|g_0\|^2 = \int_0^{2\pi} g_0(x)^2 dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \Rightarrow \|g_0\| = \sqrt{2\pi}.$$

$$\|g_n\|^2 = \int_0^{2\pi} g_n(x)^2 dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 + \cos(2nx)] dx = \pi, \quad \forall m.$$

$$\|h_m\|^2 = \int_0^{2\pi} h_m(x)^2 dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos(2mx)] dx = \pi, \quad m \geq 1.$$

(b) Duas funções  $g$  e  $h$  são ortogonais quando  $\langle g, h \rangle = 0$ , isto é,  $\int_0^{2\pi} g(x) h(x) dx = 0$ . Se  $m \neq n$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle g_n, h_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(n-m)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m+n)x dx + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n-m)x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos(m+n)x}{m+n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{-\cos(m-n)x}{m-n} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

No caso em que  $m = n$ , temos:

$$\langle g_n, h_n \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{2n} [\operatorname{sen}^2(nx)]_0^{2\pi} = 0.$$

(c) Sendo  $m \neq n$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle g_n, g_m \rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m+n)x + \cos(n-m)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

9. Usando integração por partes, encontramos:

$$c_n = \frac{\langle f, g_n \rangle}{\|g_n\|^2} = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} x \cos nx dx \right) = \frac{1}{n\pi} \left( [x \operatorname{sen} nx]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx dx \right) = 0$$

Em relação a  $h_m$ , o coeficiente de Fourier de  $f$  é:

$$\begin{aligned} d_m &= \frac{\langle f, h_m \rangle}{\|h_m\|^2} = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}(mx) dx \right) = \frac{1}{m\pi} \left( [-x \cos(mx)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos mx dx \right) \\ &= -\frac{2\pi}{m\pi} = -\frac{2}{m}. \end{aligned}$$

10. (a)  $\{\sqrt{80}(x^2 - 3x/4), \sqrt{3}x\}$       (b)  $\{\sqrt{80}(x^2 - 3x/4), \sqrt{3}x, 10x^2 - 12x + 3\}$ .

---

**ESCREVENDO PARA APRENDER 7.3**

1. A construção de uma base de  $W^\perp$  baseia-seno Lema 7.3.6. A partir de uma base de  $W$  fazemos o completamento a uma base ortogonal de  $V$ .

(a) Vemos que  $W = [(1, 1)]$  e considerando um vetor  $v$  ortogonal a  $(1, 1)$  chegamos ao resultado.

Por exemplo, considerando  $v_2 = (1, -1)$ , vemos que  $W^\perp = [(1, -1)]$  é a reta  $y = -x$ .

(b) Neste caso,  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base ortogonal de  $W$  e considerando  $v_3 = (1, -1, 0)$ , obtemos a base ortogonal do  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 0)\}.$$

Assim,  $W^\perp = [(1, -1, 0)]$ .

2. Temos que  $\mathcal{N}(T) = [(1, 1, 0)]$  e um vetor  $v = (x, y, z)$  jaz em  $\mathcal{N}(T)^\perp$  se, e só se,

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0.$$

(a) Em relação ao produto interno usual, temos

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Assim,  $\mathcal{N}(T)^\perp = \{(x, -x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$  e  $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$  é uma base ortogonal de  $\mathcal{N}(T)$ . Normalizando  $\mathcal{B}$  encontramos a base ortonormal:

$$\mathcal{B}' = \left\{ (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1) \right\}.$$

(b) Em relação ao produto interno (7.12), temos

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

e, neste caso, temos  $\mathcal{N}(T)^\perp = \{(x, -2x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ . Uma base ortogonal de  $\mathcal{N}(T)^\perp$  é  $\mathcal{B} = \{(1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$  e normalizando-a, chegamos a:

$$\mathcal{B}' = \left\{ (1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5}, 0), (0, 0, 1/2) \right\}.$$

3. Escalonando a matriz geradora de  $W$ , encontramos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto,  $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$  é uma base de  $W$ .

(a) Um vetor  $v = (x, y, z)$  pertence a  $W^\perp$  se, e somente se,

$$\langle (x, y, z), (1, 0, -1) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0.$$

Assim,  $W^\perp$  é o espaço solução do sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

com um grau de liberdade e variável livre  $z$ . Uma base de  $W^\perp$  é  $\mathcal{B}' = \{(1, -1, 1)\}$ .

(b) Recorde-se que um operador linear estará determinado quando conhecermos sua ação nos vetores de uma base. Como desejamos que  $\mathcal{N}(T) = W$  e  $\text{Im}(T) = W^\perp$ , consideramos

$$\begin{aligned} T(1, 0, -1) &= (0, 0, 0) && \text{((1, 0, -1) vetor básico do núcleo)} \\ T(0, 1, 1) &= (0, 0, 0) && \text{((0, 1, 1) vetor básico do núcleo)} \\ T(1, -1, 1) &= (1, -1, 1) && \text{((1, -1, 1) vetor básico da imagem)} \end{aligned}$$

Escrevendo  $(x, y, z) = a \cdot (1, 0, -1) + b \cdot (0, 1, 1) + c \cdot (1, -1, 1)$ , encontramos  $c = \frac{1}{3}(x - y + z)$  e, portanto

$$T(x, y, z) = c \cdot T(1, -1, 1) = \frac{1}{3}(x - y + z, -x + y - z, x - y + z).$$

4. (a) Os subespaços  $S^\perp$  e  $W^\perp$  coincidem, embora os suconjuntos  $S$  e  $W$  sejam distintos.

(b) O subespaço  $W^\perp$  é o espaço-solução do sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

o qual é gerado por  $(0, 1, -1)$ .

5. O complementar ortogonal  $W^\perp$  é o espaço-solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

isto é, o subespaço unidimensional, gerado por  $(1, -2, -2)$ .

6. Considerando  $v_1 = (2, 1, -1)$  e  $v_2 = (0, 1, 1)$ , então:

$$u \in W^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

e temos  $W^\perp = [(1, -1, 1)]$  e  $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1) \right\}$  é uma base ortonormal de  $W^\perp$ .

7. Como ilustração, faremos o item (a). Neste caso, o complementar ortogonal é o subespaço do  $\mathbb{R}^4$ , de dimensão 2, dado por:

$$W^\perp = [(-1, 1, 5, 0), (-2, 0, 5, 1)],$$

sendo  $W = [(3, -2, 1, 1), (1, 1, 0, 2)]$ .

8. A fim de que um vetor  $u = (x, y, z, s, t)$  esteja em  $W^\perp$  é necessário e suficiente que  $\langle u, v_1 \rangle = 0$  e  $\langle u, v_2 \rangle = 0$ . Assim:

$$u \in W^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z - s + 2t = 0 \\ 2x + 4y + 7z + 2s - t = 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

Por escalonamento, vemos que o sistema (7.18) é equivalente a

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - s + 2t = 0 \\ z + 4s - 5t = 0 \end{cases} \quad (7.19)$$

com grau de liberdade 3 e variáveis livres  $y, s$  e  $t$ . Para construir a base de  $W^\perp$ , atribuímos valores às variáveis livres e a partir de (7.19) calculamos  $x$  e  $z$ . Veja a tabela abaixo.

| $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | vetores básicos de $W^\perp$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|------------------------------|
| -2  | 1   | 0   | 0   | 0   | $w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$     |
| 13  | 0   | -4  | 1   | 0   | $w_2 = (13, 0, -4, 1, 0)$    |
| -17 | 0   | 5   | 0   | 1   | $w_3 = (-17, 0, 5, 0, 1)$    |

Logo,  $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$  é uma base de  $W^\perp$ .

1. Se  $\|u\| = \|v\| = 1$  e  $\langle u, v \rangle = 0$ , então

$$\begin{aligned} \langle xu, +yv, zu + tv \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow (xz)\langle u, u \rangle + (xt)\langle u, v \rangle + (yz)\langle v, u \rangle + (yt)\langle v, v \rangle &= 0 \\ \Leftrightarrow xz + yt &= 0. \end{aligned}$$

2. Temos

$$\varphi(v)^2 = 2 - 2\langle u_0, v \rangle \Leftrightarrow \varphi(v) = \sqrt{2 - 2\langle u_0, v \rangle}$$

e  $\varphi(v) = \sqrt{2}$  se, e só se,  $\langle u_0, v \rangle = 0$ , isto é, se, e somente se,  $u_0 \perp v$ .

3. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

com vetores colunas  $u = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  e  $v = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ . A matriz

$$A^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

será diagonal se, e só se,  $ab + cd = 0$ . Ora, a condição  $ab + cd = 0$  é equivalente a  $\langle u, v \rangle = 0$ .

4. Mostremos que  $\langle *, * \rangle_3$  é um produto interno. Observe que:

- (a)  $\langle u, u \rangle_3 = \langle u, u \rangle_1 + \langle u, u \rangle_2 \geq 0$ , porque  $\langle u, u \rangle_1 \geq 0$  e  $\langle u, u \rangle_2 \geq 0$ .
- (b)  $\langle u + v, w \rangle_3 = \langle u + v, w \rangle_1 + \langle u + v, w \rangle_2 = \langle u, w \rangle_1 + \langle v, w \rangle_1 + \langle u, w \rangle_2 + \langle v, w \rangle_2 = \langle u, w \rangle_1 + \langle v, w \rangle_2 + \langle u, w \rangle_1 + \langle v, w \rangle_2 = \langle u, w \rangle_3 + \langle v, w \rangle_3$ .
- (c)  $\langle xu, v \rangle_3 = \langle xu, v \rangle_1 + \langle xu, v \rangle_2 = x\langle u, v \rangle_1 + x\langle u, v \rangle_2 = x[\langle u, v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_2] = x\langle u, v \rangle_3$ .
- (d)  $\langle u, v \rangle_3 = \langle u, v \rangle_1 + \langle u, v \rangle_2 = \langle v, u \rangle_1 + \langle v, u \rangle_2 = \langle v, u \rangle_3$ .

Com relação à operação  $\langle u, v \rangle_4$ , temos:

- (a)  $\langle u, u \rangle_4 = \lambda \cdot \langle u, u \rangle_1 \geq 0$ , porque  $\langle u, u \rangle_1 \geq 0$  e  $\lambda > 0$ .
- (b)  $\langle u + v, w \rangle_4 = \lambda \cdot \langle u + v, w \rangle_1 = \lambda \cdot [\langle u, w \rangle_1 + \langle v, w \rangle_1] = \lambda \cdot \langle u, w \rangle_1 + \lambda \cdot \langle v, w \rangle_1 = \langle u, w \rangle_4 + \langle v, w \rangle_4$ .
- (c)  $\langle xu, v \rangle_4 = \lambda \cdot \langle xu, v \rangle_1 = \lambda \cdot x\langle u, v \rangle_1 = x[\lambda \cdot \langle u, v \rangle_1] = x\langle u, v \rangle_4$ .

$$(d) \langle u, v \rangle_4 = \lambda \cdot \langle u, v \rangle_1 = \lambda \cdot \langle v, u \rangle_1 = \langle v, u \rangle_4.$$

5. Em  $\mathbb{R}^2$  considere os produtos internos:

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle_1 = xx' + yy' \quad \text{e} \quad \langle *, * \rangle_2 = \langle (x, y), (x', y') \rangle_2 = 2xx' + yy'.$$

Se  $u = (1, 0)$ , temos que

$$\langle u, u \rangle_2 = -2 < 0,$$

contradizendo a condição  $(PI)_1$  da definição de produto interno.

6. Partindo do princípio que  $\langle Tu, u \rangle = 0, \forall u$ , temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(u - v), u - v \rangle = \langle Tu - Tv, u - v \rangle = \underbrace{\langle Tu, u \rangle}_{=0} - \langle Tu, v \rangle - \langle Tv, u \rangle + \underbrace{\langle Tv, v \rangle}_{=0} \\ &= -\langle Tu, v \rangle - \langle Tv, u \rangle. \end{aligned}$$

Logo,  $\langle Tu, v \rangle = -\langle Tv, u \rangle$ .

7. Um cálculo direto nos dá  $T(1, 0) = (a_{11}, a_{21})$  e, sendo assim, temos:

$$\langle T(1, 0), (0, 1) \rangle = \langle (a_{11}, a_{21}), (0, 1) \rangle = a_{11} \cdot 0 + a_{21} \cdot 1 = a_{21}.$$

8. Inicialmente, recorde-se que  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  é antissimétrica se  $a_{11} = a_{22} = 0$  e  $a_{21} = -a_{12}$ . Considerando  $u = (1, 0)$  e, em seguida,  $u = (0, 1)$ , encontramos:

$$0 = \langle T(1, 0), (1, 0) \rangle = \langle (a_{11}, a_{21}), (1, 0) \rangle = a_{11} \cdot 1 + a_{21} \cdot 0 = a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0.$$

$$0 = \langle T(0, 1), (0, 1) \rangle = \langle (a_{12}, a_{22}), (0, 1) \rangle = a_{12} \cdot 0 + a_{22} \cdot 1 = a_{22} \Rightarrow a_{22} = 0.$$

Por fim, considere  $u = (1, 1)$  e, a partir da relação  $\langle T(1, 1), (1, 1) \rangle = 0$ , deduza que  $a_{12} = -a_{21}$ .

9. Uma particularidade do espaço vetorial  $\mathbb{R}$  é que seus vetores são, também, escalares. Assim, olhando os vetores  $x$  e  $y$  como escalares e o escalar 1 como vetor, temos

$$\langle x, y \rangle = \langle x \cdot 1, y \cdot 1 \rangle = (x \cdot y) \langle 1, 1 \rangle = \lambda \cdot (x \cdot y),$$

onde  $\lambda$  é o número real  $\langle 1, 1 \rangle$ .

10. Considere  $h(x) = 1$  e defina

$$g(x) = f(x) - \frac{\langle h, f \rangle}{\|h\|^2} \cdot h(x) = xe^x - 1.$$

---

”A mathematician is one to whom  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$   
is as obvious as that twice two makes four is to you.

Liouville was a mathematician.”

Lord Kelvin

---

# Referências Bibliográficas

- [1] Boldrini, J. L., Costa, S. R., Figueiredo, V. L. & Wetzler, H. G., *Álgebra Linear*, Editora Harbra Ltda, 3ª Edição.
- [2] Filho, J. C. D. & Favareto, M. S. C., Cálculo Vetorial, Notas de Aula - UFPB.
- [3] Halmos, P. R., Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer-Verlag.
- [4] Hoffman, K. & Kunze, R. Álgebra Linear, Editora LTC, 2ª Edição.
- [5] Lang, Serge, *Introduction to Linear Algebra*, Springer 2ª Edition.
- [6] Lehmann, C.H., Geometria Analítica, Editora Globo, 4ª Edição.
- [7] Murdoch, D. C. Analytic Geometry with an Introduction to Vectors and Matrices, John Wiley & Sons.
- [8] Nathan, M. dos S., Vetores e Matrizes, LTC, 3ª Edição.
- [9] Silva, A.A. e & Nogueira, J. B., Cálculo Vetorila e Geometria Analítica, Notas de Aula - UFPB.
- [10] Spiegel, M. R., Análise Vetorial, Editora Ao Livro Técnico S. A.
- [11] Williamson, R. E., Crowell, R. H. & Trotter, H. F., *Calculus of Vector Functions*, Editora Prentice-Hall, 3ª Edição, 1972.



