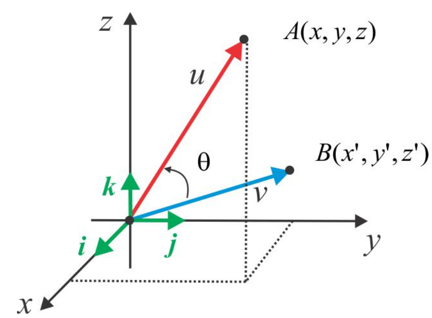
3. Produto Interno

3.1 Introdução

Quando tratamos com vetores geométricos determinados por dois pontos do espaço, as noções de ângulo e comprimento tornam-se bem claras. Na figura ao lado ilustramos dois vetores u e v e o ângulo θ entres eles, onde vemos que



$$u = OA = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad v = OB = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$

Define-se a *norma* (ou comprimento) e o *produto interno* (ou produto escalar) no espaço $\mathbb{R}^3$ por:

norma: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

produto interno: $u \bullet v = \|u\| \, \|v\| \cos\theta.$

Quando o ângulo θ for $\pi/2$, diremos que os vetores u e v são ortogonais ou perpendiculares e anotamos $u \perp v$. Em coordenadas, o produto interno vem dado por

$$u \bullet v = xx' + yy' + zz' \tag{3.1}$$

e as seguintes propriedades são válidas sejam quais forem os vetores u, v e w e seja qual for o escalar λ:

1. $u \bullet u = \|u\|^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad u \bullet u = 0 \Leftrightarrow u = 0.$

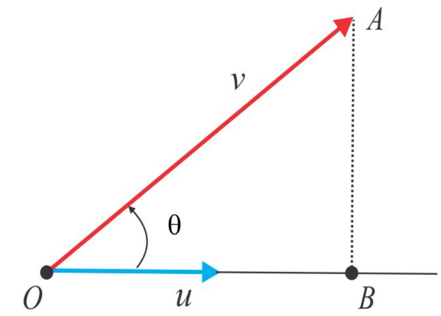
2. $u \bullet v = v \bullet u.$

3. $(\lambda u) \bullet v = u \bullet (\lambda v) = \lambda \left(u \bullet v\right).$

4. $u \bullet (v + w) = u \bullet v + u \bullet w.$

Com o objetivo de interpretar geometricamente o produto interno, deixe-nos considerar dois vetrores não nulos u e v, sendo u um vetor unitário, isto é, $\|u\| = 1$.

Na figura ao lado, o vetor **OB** representa a *projeção ortogonal* do vetor v sobre o vetor u. Essa projeção ortogonal é representada por $\operatorname{Proj}_u v$ e um cálculo simples nos dá:



$$\operatorname{Proj}_u v = \frac{v \bullet u}{||u||^2} \cdot u,$$

e, consequentemente, $\|\operatorname{Proj}_u v\| = |v \bullet u|$. De certa forma, o produto interno $v \bullet u$ pode ser visto como o comprimento da projeção ortogonal $\operatorname{Proj}_u v$.

Em um espaço vetorial V, em que os objetos (vetores) não são, necessariamente, vetores geométricos (setas) as noções de comprimento e ângulo, embora bem definidas, não são tão óbvias. Por *produto interno* em V entendemos uma operação que associa a cada par de vetores (u, v) um escalar $\langle u, v\rangle$, preservando as propriedades do produto escalar entre vetores geométricos. Em símbolos, temos:

$$\langle *, * \rangle : \underset{(u,v)}{V \times V} \underset{\mapsto}{\rightarrow} \underset{\langle u,v\rangle}{\mathbb{R}} \qquad \text{(Produto Interno)}$$

e são válidas as propriedades

1. $\langle u, u\rangle \geq 0, \quad \forall\, u \in V \quad$ e $\quad \langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \quad \forall\, u, v \in V.$

3. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \quad \forall\, u, v \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$

4. $\langle u, v + w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \quad \forall\, u, v, w \in V.$

NORMA INDUZIDA Um produto interno induz no espaço V uma norma, definida por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, a qual goza das seguintes propriedades (prove-as!)

(N1) $\|u\| \geq 0, \quad \forall\, u \in V \quad$ e $\quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$ (o único vetor de norma 0 é o vetor nulo)

(N2) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|\,, \quad \forall\, u \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$

(N3) $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|\,, \quad \forall\, u, v \in V.$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

(N4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|\,, \quad \forall\, u, v \in V.$ (Desigualdade triangular)

Em um contexto mais geral, as propriedades (N1), (N2) e (N4) são usadas para definir a norma como um funcional $\|*\| : V \to \mathbb{R}$.

Exemplo Podemos usar o produto escalar (3.1) como guia para definir um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Dados $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$, o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{3.2}$$

é conhecido por *produto interno usual* ou *canônico* do $\mathbb{R}^n$. A norma induzida por esse produto interno é

$$\|u\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Exemplo No espaço $C([a, b])$, das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o produto interno usual é definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt. \tag{3.3}$$

Consideremos $a = 0,\ b = \pi$ e calculemos as normas e o produto interno entre os vetores $f(t) = \cos t$ e $g(t) = \operatorname{sen} t$. A norma induzida pelo produto interno (3.3) é

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^\pi [f(t)]^2 \ dt \right)^{1/2}.$$

Usando as identidades $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ e $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, encontramos

$$\begin{aligned} \|\cos t\|^2 &= \int_0^\pi (\cos t)^2 \ dt = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2t) \ dt = \pi/2 \Rightarrow \|\cos t\| = \sqrt{\pi/2} \\ \|\operatorname{sen} t\|^2 &= \int_0^\pi (\operatorname{sen} t)^2 \ dt = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) \ dt = \pi/2 \Rightarrow \|\operatorname{sen} t\| = \sqrt{\pi/2}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle = \int_0^\pi \cos t \operatorname{sen} t \ dt = \tfrac{1}{2} \left[\operatorname{sen}^2 t \right]_0^\pi = 0. \tag{3.4}$$

Definição Em um espaço vetorial V, com produto interno, diremos que dois vetores u e v são *ortogonais*, e anotamos $u \perp v$, quando $\langle u, v \rangle = 0$.

Exemplo Os vetores $\mathrm{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathrm{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathrm{e}_3 = (0, 0, 1)$ da base canônica do $\mathbb{R}^3$ são mutuamente ortogonais, em relação ao produto interno usual (3.2). De fato,

$$\langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2 \rangle = \langle \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_3 \rangle = \langle \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3 \rangle = 0.$$

Exemplo Em relação ao produto interno (3.3), vemos de (3.4) que as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ são ortogonais.

CONSEQUÊNCIAS As seguintes regras de ortogonalidade são facilmente comprovadas. Prove-as.

(i) $\mathbf{0} \perp u, \quad \forall\, u \in V.$ (o vetor nulo é ortogonal a todos vetores de V)

(ii) Se $u \perp v, \quad \forall\, v \in V$, então $u = \mathbf{0}$.

(iii) Se $u \perp v$ e λ é um escalar, então $\lambda u \perp v$.

(iv) Se $u \perp w$ e $v \perp w$, então $u + v \perp w$.

Definição Se os vetores de uma base de V são dois a dois ortogonais, a base denomina-se base ortogonal. Se, além disso, os vetores da base são todos unitários (de norma igual a 1) ela denominar-se-á base ortonormal.

Exemplo Em relação ao produto interno usual, a base canônica do $\mathbb{R}^n$ é ortonormal. Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V é ortonormal em relação a um dado produto interno se, e só se, para cada $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$ tem-se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \left| \begin{array}{lll} 1, & \text{se} & i = j \\ 0, & \text{se} & i \neq j. \end{array} \right.$$

3.1A No espaço $\mathbb{R}^2$, dados $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$, verifique que a operação

$$\langle u, v \rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy' \tag{3.5}$$

define um produto interno. Com relação a esse produto interno, mostre que os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (1, -1)$ são ortogonais.

3.1B A operação $\langle (x, y), (x', y') \rangle = |x' - x| + |y' - y|$ define um produto interno no $\mathbb{R}^2$? Por quê?

3.1C Em um espaço vetorial V com produto interno, mostre as seguintes identidades:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right). \qquad \text{(do Paralelogramo)}$$

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle. \qquad \text{(de Polarização)}$$

Se u e v são unitários e $\langle u, v \rangle = \pm 1$, é correto afirmar que $u = \pm v$? Se não, apresente um contra-exemplo.

Observação Ao fazer referência à identidade do paralelogramo, a norma considerada é induzida por um produto interno, isto é,

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Aliás, a identidade do paralelogramo é o indicador que determina se uma dada norma provém ou não de um produto interno. O funcional $\|*\|_1$ definido em $\mathbb{R}^2$ por:

$$\|(x,y)\|_1 = \max\{|x|,|y|\},$$

satizfaz às propriedades (N1), (N2) e (N4) que definem norma e, contudo, não satisfaz à identidade do parelelogramo. De fato, se considerarmos $u=(1,0)$ e $v=(-1,0)$, teremos:

$$\|u+v\|_1^2 + \|u-v\|_1^2 = \|(0,0)\|_1^2 + \|(2,0)\|_1^2 = 2$$

e, por outro lado,

$$2\left(\|u\|_1^2 + \|v\|_1^2\right) = 2\left(\|(1,0)\|_1^2 + \|(-1,0)\|_1^2\right) = 2(1+1) = 4.$$

Considerando que a identidade do paralelogramo não foi atendida, concluímos que a norma $\|*\|_1$ não é induzida por um produto interno.

3.1D Em um espaço vetorial V com produto interno, considere dois vetores u e v unitários e ortogonais. Mostre que $\|u-v\| = \sqrt{2}$.

3.1E No espaço $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2, defina a operação

$$\langle A,B\rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, \qquad (3.6)$$

sendo $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$.

(a) Verifique que a operação (3.6) define um produto interno em V.

(a) Calcule as normas e o ângulo entre os vetores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1E Seja V um espaço vetorial com produto interno e considere dois vetores u e v em V. Mostre que a função real $f(x) = \|u+xv\|^2$ atinge um valor mínimo.

3.1G No espaço $\mathbb{R}^3$ considere a norma induzida pelo produto interno

$$\langle u,v\rangle = 2xx' + yy' + 4zz', \quad \text{sendo} \quad u=(x,y,z), \quad v=\left(x',y',z'\right). \qquad (3.7)$$

Calcular o trabalho da força constante $\mathbf{F} = (1,2,6)$ para transportar uma partícula do ponto $A(1,1,2)$ ao ponto $B(2,3,-1)$, em linha reta. Recorde-se que o trabalho é o *produto* da força pelo deslocamento.

3.1G Dados dois vetores não nulos v_1 e v_2, qual valor deve-se atribuir à constante λ para que os vetores v_1 e $v_2' = v_2 - \lambda v_1$ sejam ortogonais?

3.1H Sejam v_1, v_2 e v_3 vetores não nulos e suponha que v_1 e v_2 sejam ortogonais. Quais valores devem assumir as constantes λ e μ, para que o vetor $v_3' = v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1$ seja ortogonal a v_1 e v_2, simultaneamente?

3.1I Se x, y e z são números reais positivos, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ e mostre que

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

3.1J Em relação ao produto interno (3.6), encontre o valor de x que torna ortogonais os vetores

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{bmatrix}.$$

3.1K Se u e v são ortogonais, mostre que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

Faça uma ilustração geométrica com vetores no plano $\mathbb{R}^2$.

3.2 Ortogonalização

Por que as bases ortogonais são importantes e como ortogonalizar uma dada base? As coordenadas de um vetor numa base ortogonal são relativamente simples de calcular e isso já justifica a importância das bases ortogonais. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V e u é um vetor qualquer, então

$$u = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_n \cdot v_n \tag{3.8}$$

e para calcular a coordenada x_j fazemos o produto interno dos dois lados de (3.8) pelo vetor v_j, usamos a ortogonalidade e encontramos

$$\langle u, v_j \rangle = x_j \langle v_j, v_j \rangle = x_j \|v_j\|^2 \Rightarrow x_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{3.9}$$

O escalar $\dfrac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$ que figura em (3.9) é o coeficiente de Fourier de u com respeito ao vetor v_j.

Exemplo Em relação ao produto interno usual, a base

$$\beta = \{(1,1,0), (-1,1,0), (0,0,2)\}$$

é uma base ortogonal, tendo em vista que

$$\begin{aligned}
\langle (1,1,0), (-1,1,0) \rangle &= -1+1+0 = 0 \\
\langle (1,1,0), (0,0,2) \rangle &= 0+0+0 = 0 \\
\langle (-1,1,0), (0,0,2) \rangle &= 0+0+0 = 0.
\end{aligned}$$

Os coeficientes de Fourier do vetor $u = (3,-1,2)$ em relação à base β são

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\langle (3,-1,2), (1,1,0) \rangle}{\|(1,1,0)\|^2} = \frac{2}{2} = 1 \\
x_2 &= \frac{\langle (3,-1,2), (-1,1,0) \rangle}{\|(-1,1,0)\|^2} = \frac{-4}{2} = -2 \\
x_3 &= \frac{\langle (3,-1,2), (0,0,2) \rangle}{\|(0,0,2)\|^2} = \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad [u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O processo que apresentamos aqui para ortogonalizar uma base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ do espaço vetorial V é devido a Gram-Schmidt e se inicia fixando uma das direções, digamos $v_1' = v_1$, e construindo vetores v_2', $v_3' \ldots v_n'$ de modo que $\beta' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ seja uma base ortogonal. (veja os exercícios 3.1G e 3.1H) O vetor v_k' da base β' vem dado por

$$v_k' = v_k - \frac{\langle v_k, v_{k-1}' \rangle}{\left\|v_{k-1}'\right\|^2} \cdot v_{k-1}' - \frac{\langle v_k, v_{k-2}' \rangle}{\left\|v_{k-2}'\right\|^2} \cdot v_{k-2}' - \cdots - \frac{\langle v_k, v_2' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2' - \frac{\langle v_k, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1', \quad k = 2, 3, \ldots, n.$$

De forma explícita, temos

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' \\
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' \\
&\vdots \\
v_n' &= v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\left\|v_{n-1}'\right\|^2} \cdot v_{k-1}' - \frac{\langle v_n, v_{n-2}' \rangle}{\left\|v_{n-2}'\right\|^2} \cdot v_{n-2}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_2' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2' - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1'
\end{aligned}$$

Exemplo No espaço $\mathbb{P}_1$ dos polinômios de grau ≤ 1, considere o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^2 p(x)\, q(x)\, dx.$$

A partir da base $\beta = \{1, x\}$ vamos encontrar uma base ortonormal de $\mathbb{P}_1$.

- Passo 1: Ortogonalizando, via Gram-Schmidt, a base β.

  Sejam $v_1 = 1$, $v_2 = x$ e consideremos

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 = 1 \quad \text{e} \\ v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' = x - \frac{\int_0^2 x dx}{\int_0^2 1^2 dx} = x - 1. \end{aligned}$$

  A base $\beta' = \{1, x-1\}$ assim obtida é ortogonal.

- Passo 2: Ortonormalizando a base β'.

  Temos

$$\begin{aligned} \|1\|^2 &= \langle 1, 1 \rangle = \int_0^2 dx = 2 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2} \\ \|x-1\|^2 &= \langle x-1, x-1 \rangle = \int_0^2 (x-1)^2 dx = 2/3 \Rightarrow \|x-1\| = \sqrt{2/3}. \end{aligned}$$

  A base $\beta'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (x-1) \right\}$ é ortonormal.

3.2A Use o processo de ortogonalização para construir uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$, a partir da base $\beta = \{(1,2), (2,1)\}$.

3.2B Repita o exercício precedente considerando a base $\beta = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,2,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

3.2C Ortonormalize a base $\beta = \{(1,-1), (1,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, em relação ao produto interno (3.5).

3.2D Considere o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$ e encontre uma base ortonormal para o subespaço

$$W = \{(x,y,z) : x - y + z = 0\}.$$

3.2E No espaço $\mathbb{P}_2$ dos polinômios de grau ≤ 2, considere o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx.$$

Encontre uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{P}_2$ gerado pelos vetores $v_1 = 1$ e $v_2 = 1 - x$.

3.2F Mostre que a operação $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^t A\right)$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e, em relação a esse produto interno, ortonormalize a base

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.2G No espaço das funções contínuas em $[-\pi, \pi]$ considere o produto interno usual

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

e deixe f ser a função dada por $f(x) = \operatorname{sen} kx$, onde k é um inteiro positivo.

(a) Calcule $\|f\|$.

(b) Se $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é contínua, calcule o coeficiente de Fourier de g com respeito à f.

3.2H Considere o espaço das funções contínuas em $[0, 2\pi]$, equipado do produto interno usual

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$

Se $g_n(x) = \cos nx$ e $h_m(x) = \operatorname{sen} mx$, sendo m e n inteiros, com $n \geq 0$ e $m \geq 1$, mostre que:

(a) $\|g_0\| = \sqrt{2\pi}$ e $\|g_n\| = \|h_n\| = \sqrt{\pi}, \quad \forall\, n \geq 1.$

(b) $g_n \perp h_m, \quad \forall\, m, n.$

(c) $g_n \perp g_m$, se $m \neq n$.

No cálculo das integrais use as relações

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} A \cos B &= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right] \\
\cos A \cos B &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right].
\end{aligned}$$

3.2I Com a notação do exercício precedente, calcule a norma e os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x$, com respeito às funções g_n e h_m.

3.2J Seja V o espaço das funções contínuas em $[0, 1]$, equipado do produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

(a) Encontre uma base ortonormal do subespaço gerado pelas funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

(b) Repita o ítem (a) com o subespaço $W = \left[1, x, x^2\right]$.

3.3 Complementar Ortogonal

No que se segue V é um espaço vetorial real e $\langle *, *\rangle$ um produto interno em V. Dado um subconjunto S de V, o complementar ortogonal de S, representado por $S^{\perp}$ (lê-se "S perp"), é o subconjunto de V constituído pelos vetores ortogonais a S, isto é,

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall\, u \in S\}.$$

3.3A Mostre que $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de V, mesmo que S não o seja.

3.3B Identifique os subespaços $\mathbf{0}^{\perp}$ e $V^{\perp}$. Se W é um subespaço de V, quem é $W^{\perp\perp}$?

3.3C DECOMPOSIÇÃO EM SOMA DIRETA Se W é um subespaço vetorial de V, mostre que

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Deduza, em particular, que $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

3.3D Em cada caso, encontre uma base do subespaço $W^{\perp}$.

(a) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.

3.3E Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considere o operador linear $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

(a) Encontre uma base ortonormal do subespaço $\mathcal{N}(T)^{\perp}$.

(b) Repita o ítem (a), considerando o produto interno (3.7).

3.3F Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, seja W o subespaço gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 0, -1).$$

(a) Encontre o complementar ortogonal $W^{\perp}$.

(b) Qual o operador T do $\mathbb{R}^3$, que satisfaz a $\operatorname{Im}(T) = W^{\perp}$ e $\mathcal{N}(T) = W$?

3.3G Seja W o subespaço $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.

(a) Há diferença entre $S^{\perp}$ e $W^{\perp}$?

(b) Encontre uma base ortogonal de $W^{\perp}$.

3.3H Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$. Determine uma base de $W^{\perp}$, considerando o produto escalar

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + yy' + zz'.$$

3.3I Mostre que o espaço-solução do sistema

$$\left| \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \right.$$

coincide com o complementar ortogonal em $\mathbb{R}^3$ do subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (2, 1, -1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$. Encontre uma base ortonormal do espaço-solução.

3.3J Repita o exercício precedente com os sistemas

$$\text{(a)} \quad \left| \begin{array}{r} 3x - 2y + z + t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \quad \left| \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ y + z = 0. \end{array} \right.$$

3.3K Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 2, 3, -1, 2) \quad \text{e} \quad v_2 = (2, 4, 7, 2, -1)\,.$$

Encontre uma base do subespaço $W^\perp$, considerando em $\mathbb{R}^5$ o produto interno usual.

3.3.1 Projeção Ortogonal

Seja $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base ortogonal de um subespaço W de V e deixe-nos representar por $\text{Proj}_W(v)$ o vetor

$$\text{Proj}_W(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k.$$

Conforme vimos no Exercício 3.3C, $V = W \oplus W^\perp$ e dado um vetor v de V, temos que $v - \text{Proj}_W(v)$ jaz no complementar ortogonal $W^\perp$ e, assim,

$$v = \underbrace{\text{Proj}_W(v)}_{\in\, W} + \underbrace{(v - \text{Proj}_W(v))}_{\in\, W^\perp}. \tag{3.10}$$

A relação (3.10) sugere olhar o vetor $\text{Proj}_W(v)$ como a projeção ortogonal do vetor v no subespaço W. Em resumo, temos

$$\text{Proj}_W(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k.$$

Veja na introdução a projeção ortogonal de um vetor (geométrico) sobre outro para deduzir a generalização acima.

3.3L Encontre a projeção ortogonal do vetor $v = (1, 0, 0, 1, -2)$ no subespaço W do exercício precedente. (primeiro ortogonalize a base de W)

EXERCÍCIOS ADICIONAIS

---

1. Em um espaço vetorial V com produto interno, considere dois vetores u e v, unitários e ortogonais. Mostre que

$$(xu + yv) \perp (zu + tv) \Leftrightarrow xz + yt = 0.$$

2. Em um espaço vetorial V com produto interno, considere um vetor unitário u e seja S o subconjunto de V constituídos pelos vetores unitários de V. Defina a função $\varphi : S \to \mathbb{R}$ por $\varphi(v) = \|u - v\|$.

   (a) Mostre que φ tem valor máximo 2 e valor mínimo 0. Em que vetores φ atinge esses valores extremos?

   (b) Mostre que $\varphi(v) = \sqrt{2}$ se, e somente se, $v \perp u$.

3. Dada uma matriz real A, de ordem 2×2, mostre que a matriz $A^t A$ é diagonal se, e somente se, as colunas de A são vetores ortogonais, em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^2$.

4. Em um espaço vetorial V, considere dois produtos internos $\langle \bullet , \bullet \rangle_1$ e $\langle \bullet , \bullet \rangle_2$ e defina:

$$\begin{aligned} \langle \bullet , \bullet \rangle_3 &= \langle \bullet , \bullet \rangle_1 + \langle \bullet , \bullet \rangle_2 \\ \langle \bullet , \bullet \rangle_4 &= \lambda \cdot \langle \bullet , \bullet \rangle_1, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

   Mostre que $\langle \bullet , \bullet \rangle_3$ e $\langle \bullet , \bullet \rangle_4$ definem produtos internos em V.

5. No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ construa dois produtos internos $\langle \bullet , \bullet \rangle_1$ e $\langle \bullet , \bullet \rangle_2$, tais que a diferença $\langle \bullet , \bullet \rangle_* = \langle \bullet , \bullet \rangle_1 - \langle \bullet , \bullet \rangle_2$ não é um produto interno.

6. A desigualdade de Cauchy-Schwarz estabelece que

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\| . \tag{3.11}$$

   Mostre que a igualdade em (3.11) ocorre se, e somente se, os vetores u e v são LD.

7. A desigualdade triangular estabelece que

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| . \tag{3.12}$$

   Mostre que ocorre a igualdade em (3.12) se, e somente se, u e v são LD.

8. Dado um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\langle T(u), u \rangle = 0, \quad \forall\, u$, mostre que

$$\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^2.$$

9. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz 2×2 e defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(u) = A[u]$. Em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^2$, mostre que

$$\langle T(1,0), (0,1) \rangle = a_{21} \quad \text{e} \quad \langle T(0,1), (1,0) \rangle = a_{12}.$$

10. Com a notação do exercício precedente e admitindo que $\langle T(u), u \rangle = 0, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^2$, mostre que a matriz A é antissimétrica.

11. Se $\langle \bullet\, , \bullet \rangle$ é um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{R}$, mostre que existe um escalar λ, tal que $\langle u, v \rangle = \lambda (x \cdot y)$. Em outras palavras, a menos de uma constante multiplicativa, o produto interno em $\mathbb{R}$ coincide com o produto usual de números reais.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

3.1 INTRODUÇÃO

3.1A Comprove uma a uma as propriedades de produto interno. Sendo $u = (1,1)$ e $v = (1,-1)$, temos

$$\langle u, v \rangle = 2 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0.$$

3.1B Não. Se $u = (1,0)$ e $v = (0,0)$, um cálculo direto nos dá

$$\langle u, v \rangle = |0 - 1| + |0 - 0| = 1.$$

(se fosse um produto interno, deveríamos ter $\langle u, \mathbf{0} \rangle = 0$).

3.1C Use as relações $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ para chegar aos resultados.

3.1D Sendo u e v unitários e ortogonais, temos $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\langle u, v \rangle = 0$. Assim,

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = 2.$$

3.1E A parte (a) consiste em comprovar as popriedades do produto interno. Para a parte (b), temos

$$\|A\| = \sqrt{1 + 2 + 1} = 2 \quad \text{e} \quad \|B\| = \sqrt{4 + 2 + 3 + 1} = \sqrt{10}.$$

Além disso, $\langle A, B\rangle = 1$ e representando por θ o ângulo entre A e B, temos

$$\cos\theta = \frac{\langle A, B\rangle}{\|A\|\,\|B\|} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(1/2\sqrt{10}\right).$$

3.1F A função $f(x)$ é o trinômio do segundo grau

$$f(x) = \|v\|^2 x^2 + 2\langle u, v\rangle x + \|u\|^2,$$

com discriminante $\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$. Então, o trinômio é ≥ 0 e seu valor mínimo é $-\Delta/4\|v\|^2$.

3.1G O desocamento é $\mathbf{AB} = (1, 2, -3)$ e o trabalho é igual a

$$\tau = \langle \mathbf{F}, \mathbf{AB}\rangle = \langle (1, 2, 6), (1, 2, -3)\rangle = 2\times 1 + 2\times 2 + 4\times 6\times(-3) = -66.$$

3.1H O vetor $v_2' = v_2 - \lambda v_1$ será ortogonal a v_1, quando $\langle v_2', v_1\rangle = 0$ e daí resulta

$$0 = \langle v_2', v_1\rangle = \langle v_2 - \lambda v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_1\rangle - \lambda\langle v_1, v_1\rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}.$$

3.1I O vetor $v_3' = v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1$ será ortogonal a v_1 e v_2, quando o par (λ, μ) for solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \langle v_1, v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1\rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1\rangle = 0 \end{array}\right.$$

e considerando que $\langle v_2, v_1\rangle = 0$, obtemos

$$\left|\begin{array}{l} \langle v_3, v_1\rangle - \mu\|v_1\|^2 = 0 \\ \langle v_3, v_2\rangle - \lambda\|v_2\|^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}.$$

3.1J Considere os vetores $u = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ e $v = \left(\sqrt{1/x}, \sqrt{1/y}, \sqrt{1/z}\right)$ e use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

3.1K $x = -11$.

3.1L Temos que $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle$ e expandindo o produto interno, encontramos

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3.2 ORTOGONALIZAÇÃO

3.2A Primeiro ortogonalize a base, substituindo o vetor $v_2 = (2,1)$ pelo vetor

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (2,1) - \frac{\langle (2,1), (1,2)\rangle}{\|(1,2)\|^2}(1,2) = (2,1) - \frac{4}{5}(1,2) = \left(\tfrac{6}{5}, -\tfrac{3}{5}\right).$$

Para concluir, normalize a base $\{v_1, v_2'\}$ e encontre a base ortonormal

$$\beta = \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}.$$

3.2B $\beta' = \left\{(1,1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})\right\}$.

3.2C Com relação ao produto interno (3.5) a base β é ortogonal e resta-nos *normalizá-la*. (*normalizar* uma base é tornar seus componentes unitários). Temos:

$$\|(1,-1)\| = \sqrt{\langle (1,-1), (1,-1)\rangle} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|(1,1)\| = \sqrt{\langle (1,1), (1,1)\rangle} = \sqrt{6}.$$

A base ortonormal correspondente é, portanto

$$\beta' = \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}.$$

3.2D Considere, por exemplo, a base $\beta = \{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ de W e ortonormalize essa base, via Gram-Schmidt.

3.2E Os vetores $v_1 = 1$ e $v_2 = 1 - x$ são LI e formam uma base do subespaço. Temos

$$\begin{aligned}
\|v_1\|^2 &= \|1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\
\|v_2\|^2 &= \|1-x\|^2 = \int_{-1}^{1} (1-x)^2\, dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x + x^2\right) dx = 8/3 \\
\langle v_1, v_2\rangle &= \int_{-1}^{1} (1-x)\, dx = 2.
\end{aligned}$$

Para ortogonalizar a base, consideramos $v_1' = v_1$ e

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2} v_1' = 1 - x - \frac{2}{2} = -x.$$

A base $\beta = \{1, -x\}$ de $\mathbb{P}_2$ é ortogonal e a base

$$\beta' = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-3x}{2} \right\}.$$

é ortonormal.

3.2F Dado que $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right)$, as regras que definem o Produto Interno são facilmente comprovadas usando propriedades do traço e da transposição de matrizes:

(a) $\langle A, A\rangle = \operatorname{tr}\left(A^t \cdot A\right) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0.$ (aqui $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$)

(b) $\langle B, A\rangle = \operatorname{tr}\left(A^t \cdot B\right) = \operatorname{tr}\left[\left(B^t \cdot A\right)\right]^t = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right) = \langle A, B\rangle.$

(c) $\langle A + B, C\rangle = \operatorname{tr}\left(C^t \cdot (A+B)\right) == \operatorname{tr}\left(C^t \cdot A\right) + = \operatorname{tr}\left(C^t \cdot B\right)\big) = \langle A, C\rangle + \langle A, C\rangle.$

(d) $\langle x \cdot A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot (xA)\right) = x \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right) = x\langle A, B\rangle.$

Para os vetores básicos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

temos: $\|A\|^2 = 2,\ \|B\|^2 = 2,\ \|C\|^2 = 3$ e $\|D\|^2 = 4$ e o processo de Gram-Schmidt nos ensina que a base ortogonal $\beta' = \{A', B', C', D'\}$ deve ser construída de tal forma que:

$$\begin{aligned}
A' &= A \\
B' &= B - \left(\tfrac{\langle B, A'\rangle}{\|A'\|^2}\right) A' \\
C' &= C - \left(\tfrac{\langle C, B'\rangle}{\|B'\|^2}\right) B' - \left(\tfrac{\langle C, A'\rangle}{\|A'\|^2}\right) A' \\
D' &= D - \left(\tfrac{\langle D, C'\rangle}{\|C'\|^2}\right) B' - \left(\tfrac{\langle D, B'\rangle}{\|B'\|^2}\right) B' - \left(\tfrac{\langle D, A'\rangle}{\|A'\|^2}\right) A'
\end{aligned}$$

Um cálculo direto nos conduz a:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2G (a) $\sqrt{\pi}$ (b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \operatorname{sen} kx \, dx.$

3.2H

(a) Temos $g_n(x) = \cos nx$ e, portanto, a função g_0 é constante e igual a 1. Logo,

$$\begin{aligned}
\|g_0\|^2 &= \int_0^{2\pi} g_0(x)^2 \, dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \Rightarrow \|g_0\| = \sqrt{2\pi}. \\
\|g_n\|^2 &= \int_0^{2\pi} g_n(x)^2 \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \pi, \quad \forall m. \\
\|h_m\|^2 &= \int_0^{2\pi} h_m(x)^2 \, dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \pi, \quad m \geq 1.
\end{aligned}$$

(b) Duas funções g e h são ortogonais quando $\langle g, h\rangle = 0$, isto é, $\int_0^{2\pi} g(x)\,h(x)\,dx = 0$. Se $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle g_n, h_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(n-m)x]\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m+n)x dx + \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n-m)x dx \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{-\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

No caso em que $m = n$, temos

$$\langle g_n, h_n\rangle = \int_0^{2\pi} \cos nx \operatorname{sen} nx dx = \tfrac{1}{2n}\left[\operatorname{sen}^2 nx\right]_0^{2\pi} = 0.$$

(c) Sendo $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle g_n, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(m+n)x + \cos(n-m)x]\,dx \\
&= \tfrac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

3.2I Usando integração por partes, temos

$$c_n = \frac{\langle f, g_n\rangle}{\|g_n\|^2} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} x\cos nx dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left(\left[x\operatorname{sen} nx\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx dx\right) = 0$$

Em relação a h_m, o coeficiente de Fourier de f é:

$$\begin{aligned}
d_m &= \frac{\langle f, h_m\rangle}{\|h_m\|^2} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} x\operatorname{sen} mx dx\right) = \frac{1}{m\pi}\left(\left[-x\cos mx\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos mx dx\right) \\
&= -\frac{2\pi}{m\pi} = -\frac{2}{m}.
\end{aligned}$$

3.2J (a) $\left\{\sqrt{80}(x^2 - 3x/4),\ \sqrt{3}x\right\}$ (b) $\left\{\sqrt{80}(x^2 - 3x/4),\ \sqrt{3}x,\ 10x^2 - 12x + 3\right\}$.

3.3 COMPLEMENTAR ORTOGONAL

3.3A Dados v_1 e v_2 em $S^\perp$ e um escalar λ, devemos mostrar que $\lambda v_1 + v_2 \in S^\perp$. Temos $\langle u, v_1\rangle = 0$ e $\langle u, v_2\rangle = 0$, para cada $u \in S$ e, portanto,

$$\langle u, \lambda v_1 + v_2\rangle = \lambda\langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = 0 \Rightarrow \lambda v_1 + v_2 \in S^\perp.$$

3.3B $\{\mathbf{0}\}^\perp = V$, $V^\perp = \{\mathbf{0}\}$ e $W^{\perp\perp} = W$.

3.3C Sejam $n = \dim V$ e $k = \dim W$ e consideremos uma base ortonormal $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de W e completemos essa base a uma base

$$\beta' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$$

de V, a qual é suposta ortonormal (no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ não mudam, porque já são ortonormais). Mostremos que

$$W^\perp = [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n].$$

Dado v em V, temos

$$v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_k \cdot v_k + x_{k+1} \cdot v_{k+1} + x_{k+2} \cdot v_{k+2} + \ldots + x_n \cdot v_n \tag{3.13}$$

e fazendo o produto interno de ambos os lados de (3.13) com v_j, encontramos

$$\langle v, v_j \rangle = x_j \langle v_j, v_j \rangle = x_j \|v_j\|^2 = x_j, \quad j = 1, 2, 3, \ldots n.$$

Para concluir, observamos que

$$\begin{aligned} v \quad \in \quad & W^\perp \Leftrightarrow \langle v, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots k \\ \Leftrightarrow \quad & v = x_{k+1} \cdot v_{k+1} + x_{k+2} \cdot v_{k+2} + \ldots + x_n \cdot v_n \\ \Leftrightarrow \quad & v \in [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n]. \end{aligned}$$

3.3D A construção de uma base de $W^\perp$ baseia-se na resolução do exercício precedente. A partir de uma base de W fazemos o completamento a uma base ortogonal de V.

(a) Vemos que $W = [(1,1)]$ e considerando um vetor v ortogonal a $(1,1)$ chegamos ao resultado. Por exemplo, considerando $v_2 = (1,-1)$, vemos que $W^\perp = [(1,-1)]$ é a reta $y = -x$.

(b) Neste caso, $\beta = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base ortogonal de W e considerando $v_3 = (1,-1,0)$, obtemos a base ortogonal do $\mathbb{R}^3$:

$$\beta' = \{(1,1,0), (0,0,1), (1,-1,0)\}.$$

Assim, $W^\perp = [(1,-1,0)]$.

3.3E Temos que $\mathcal{N}(T) = [(1,1,0)]$ e um vetor $v = (x,y,z)$ jaz em $\mathcal{N}(T)^\perp$ se, e só se,

$$\langle (x,y,z), (1,1,0) \rangle = 0.$$

(a) Em relação ao produto interno usual, temos

$$\langle (x,y,z), (1,1,0) \rangle = 0 \Leftrightarrow x+y=0.$$

Assim, $\mathcal{N}(T)^\perp = \{(x,-x,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$ e uma base ortogonal desse subespaço é $\beta = \{(1,-1,0), (0,0,1)\}$. Normalizando β encontramos a base ortonormal

$$\beta' = \left\{ (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1) \right\}.$$

(b) Em relação ao produto interno (3.7), temos

$$\langle (x,y,z), (1,1,0) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x+y=0$$

e, neste caso, temos $\mathcal{N}(T)^\perp = \{(x,-2x,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$. Uma base ortogonal de $\mathcal{N}(T)^\perp$ é $\beta = \{(1,-2,0), (0,0,1)\}$ e normalizando-a, chegamos a

$$\beta' = \left\{ (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 0), (0,0,1/2) \right\}.$$

3.3F Escalonando a matriz geradora de W, encontramos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $\beta = \{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ é uma base de W.

(a) Um vetor $v = (x,y,z)$ pertence a $W^\perp$ se, e somente se,

$$\langle (x,y,z), (1,0,-1) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x,y,z), (0,1,1) \rangle = 0.$$

Assim, $W^\perp$ é o espaço solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$$

com um grau de liberdade e variável livre z. Uma base de $W^\perp$ é $\beta' = \{(1,-1,1)\}$.

(b) Recorde-se que um operador linear estará determinado quando conhecemos sua ação nos vetores de uma base. Como desejamos que $\mathcal{N}(T) = W$ e $\mathrm{Im}(T) = W^\perp$, consideramos

$$\begin{aligned} T(1,0,-1) &= (0,0,0) && (\text{vetor básico do núcleo}) \\ T(0,1,1) &= (0,0,0) && (\text{vetor básico do núcleo}) \\ T(1,-1,1) &= (1,-1,1) && (\text{vetor básico da imagem}) \end{aligned}$$

Escrevendo $(x,y,z) = a\,(1,0,-1) + b\,(0,1,1) + c\,(1,-1,1)$, encontramos $c = \frac{1}{3}\,(x-y+z)$ e, portanto

$$T\,(x,y,z) = cT\,(1,-1,1) = \frac{1}{3}\,(x-y+z, -x+y-z, x-y+z)\,.$$

3.3G

(a) Os subespaços $S^{\perp}$ e $W^{\perp}$ coincidem.

(b) O subespaço $W^{\perp}$ é o espaço-solução do sistema linear homogêneo

$$\left|\begin{array}{r} x+z=0 \\ x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right.$$

o qual é gerado por $(0,1,-1)$.

3.3H O complementar ortogonal $W^{\perp}$ é o espaço-solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2x+z=0 \\ 2x+y=0 \end{array}\right.$$

isto é, o subespaço unidimensional, gerado por $(1,-2,-2)$.

3.3I Considerando $v_1 = (2,1,-1)$ e $v_2 = (0,1,1)$, então

$$u \in W^{\perp} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \langle u, v_1\rangle = 0 \\ \langle u, v_2\rangle = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right.$$

Temos que $W^{\perp} = [(1,-1,1)]$ e $\beta = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,-1,1)\right\}$ é uma base ortonormal de $W^{\perp}$.

3.3J Como ilustração, faremos o ítem (a). Neste caso, o complementar ortogonal é o subespaço do $\mathbb{R}^4$, de dimensão 2, dado por

$$W^{\perp} = [(-1,1,5,0)\,, (-2,0,5,1)]\,,$$

sendo $W = [(3,-2,1,1)\,, (1,1,0,2)]$.

3.3K A fim de que um vetor $u = (x,y,z,s,t)$ esteja em $W^{\perp}$ é necessário e suficiente que $\langle u, v_1\rangle = 0$ e $\langle u, v_2\rangle = 0$. Assim,

$$u \in W^{\perp} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \langle u, v_1\rangle = 0 \\ \langle u, v_2\rangle = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} x+2y+3z-s+2t=0 \\ 2x+4y+7z+2s-t=0 \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Por escalonamento, vemos que o sistema (3.14) é equivalente a

$$\left| \begin{array}{r} x + 2y + 3z - s + 2t = 0 \\ z + 4s - 5t = 0 \end{array} \right. \qquad (3.15)$$

com grau de liberdade 3 e variáveis livres y, s e t. Para construir a base de $W^{\perp}$, atribuímos valores às variáveis livres e a partir de (3.15) calculamos x e z. Veja a tabela abaixo.

x	y	z	s	t	vetores básicos de $W^{\perp}$
-2	1	0	0	0	$w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$
13	0	-4	1	0	$w_2 = (13, 0, -4, 1, 0)$
-17	0	5	0	1	$w_3 = (-17, 0, 5, 0, 1)$

Logo, $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$ é uma base de $W^{\perp}$.

3.4 EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Se $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\langle u, v\rangle = 0$, então

$$\begin{aligned}\langle xu, +yv, zu + tv\rangle &= 0\\ &\Leftrightarrow (xz)\langle u, u\rangle + (xt)\langle u, v\rangle + (yz)\langle v, u\rangle + (yt)\langle v, v\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow xz + yt = 0.\end{aligned}$$

Dado $u + v$ em $W_1 \oplus W_2$, então $T(u, v) = u + v$ e, portanto, T é sobrejetora. Por outro lado, se $(u, v) \in \ker(T)$, então $u + v = \mathbf{0}$ em $W_1 \oplus W_2$ e como $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, segue que $u = v = 0$. Assim, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e T é injetora.

2. No conjunto $S = \{v \in V : \|v\| = 1\}$, temos $\varphi(v) = \|u - v\|$, onde u está fixado e $\|u\| = 1$.

   (a) Primeiro, observamos que $\varphi(v) \geq 0$ e $\varphi(v) = 0 \Leftrightarrow v = u$. Isso mostra que o valor mínimo de $\varphi(v)$ é zero e este valor mínimo será atingindo quando $v = u$. On the other hand,

   $\varphi(v)^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle = 2 - 2\langle u, v\rangle \leq$ (uasr Cauchy-Schwarz) $\leq 2 + 2\|u\|\|v\| \leq 4$.

   Logo, o valor máximo de $\varphi(v)$ é 2 e este valor é atingido em $v = -u$.

   (b) Temos
   $$\varphi(v)^2 = 2 - 2\langle u, v\rangle \Leftrightarrow \varphi(v) = \sqrt{2 - 2\langle u, v\rangle}$$
   e $\varphi(v) = \sqrt{2}$ se, e só se, $\langle u, v\rangle = 0$, isto é, se, e somente se, $u \perp v$.

3. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
com vetores colunas $u = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. A matriz
$$A^tA = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{bmatrix}$$
será diagonal se, e só se, $ab + cd = 0$. Ora, a condição $ab + cd = 0$ é equivalente a $\langle u, v\rangle = 0$.

4. Mostremos que $\langle \bullet\ , \bullet \rangle_3$ é um produto interno. Observe que:

   (a) $\langle u,u\rangle_3 = \langle u,u\rangle_1 + \langle u,u\rangle_2 \geq 0$, porque $\langle u,u\rangle_1 \geq 0$ e $\langle u,u\rangle_2 \geq 0$.

   (b) $\langle u+v,w\rangle_3 = \langle u+v,w\rangle_1 + \langle u+v,w\rangle_2 = \langle u,w\rangle_1 + \langle v,w\rangle_1 + \langle u,w\rangle_2 + \langle v,w\rangle_2 = \langle u,w\rangle_1 + \langle v,w\rangle_2 + \langle u,w\rangle_1 + \langle v,w\rangle_2 = \langle u,w\rangle_3 + \langle v,w\rangle_3$.

   (c) $\langle xu,v\rangle_3 = \langle xu,v\rangle_1 + \langle xu,v\rangle_2 = x\langle u,v\rangle_1 + x\langle u,v\rangle_2 = x\left[\langle u,v\rangle_1 + \langle u,v\rangle_2\right] = x\langle u,v\rangle_3$.

   (d) $\langle u,v\rangle_3 = \langle u,v\rangle_1 + \langle u,v\rangle_2 = \langle v,u\rangle_1 + \langle v,u\rangle_2 = \langle v,u\rangle_3$.

   Com relação à operação $\langle u,v\rangle_4$, temos:

   (a) $\langle u,u\rangle_4 = \lambda \cdot \langle u,u\rangle_1 \geq 0$, porque $\langle u,u\rangle_1 \geq 0$ e $\lambda > 0$.

   (b) $\langle u+v,w\rangle_4 = \lambda \cdot \langle u+v,w\rangle_1 = \lambda \cdot \left[\langle u,w\rangle_1 + \langle v,w\rangle_1\right] = \lambda \cdot \langle u,w\rangle_1 + \lambda \cdot \langle v,w\rangle_1 = \langle u,w\rangle_4 + \langle v,w\rangle_4$.

   (c) $\langle xu,v\rangle_4 = \lambda \cdot \langle xu,v\rangle_1 = \lambda \cdot x\langle u,v\rangle_1 = x\left[\lambda \cdot \langle u,v\rangle_1\right] = x\langle u,v\rangle_4$.

   (d) $\langle u,v\rangle_4 = \lambda \cdot \langle u,v\rangle_1 = \lambda \cdot \langle v,u\rangle_1 = \langle v,u\rangle_4$.

5. Em $\mathbb{R}^2$ considere os produtos internos:

$$\langle (x,y)\,, (x',y')\rangle_1 = xx' + yy' \quad \text{e} \quad \langle \bullet\ , \bullet \rangle_2 = \langle (x,y)\,, (x',y')\rangle_2 = 2xx' + yy'.$$

   Se $u = (1,0)$, temos que

$$\langle u,u\rangle_* = -2 < 0,$$

   contradizendo uma das condições que define o produto interno.

6. Se $u = 0$ ou $v = 0$ nada há a demonstrar. Suponhamos, então, que u e v sejam não nulos. Um fato que nos parece óbvio é que se u e v são unitários e $\langle u,v\rangle = \pm 1$, então $u = \pm v$. Temos

$$|\langle u,v\rangle| = \|u\|\,\|v\| \Leftrightarrow \langle u,v\rangle = \pm\,\|u\|\,\|v\|$$

   e, portanto,

$$\langle u,v\rangle = \pm\,\|u\|\,\|v\| \Leftrightarrow \langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\rangle = \pm 1 \Leftrightarrow \left\| \frac{u}{\|u\|} \mp \frac{v}{\|v\|} \right\| = 0 \Rightarrow u = \pm \frac{\|u\|}{\|v\|} v.$$

7. Observe que

$$\|u+v\| = \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|$$

e a conclusão segue do Exercício 4.

8. Partindo do princípio que $\langle Tu, u\rangle = 0, \ \forall u$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(u-v), u-v\rangle = \langle Tu - Tv, u-v\rangle = \underbrace{\langle Tu, u\rangle}_{=0} - \langle Tu, v\rangle - \langle Tv, u\rangle + \underbrace{\langle Tv, v\rangle}_{=0} \\ &= -\langle Tu, v\rangle - \langle Tv, u\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\langle Tu, v\rangle = -\langle Tv, u\rangle$.

9. Um cálculo direto nos dá $T(1,0) = (a_{11}, a_{21})$ e, sendo assim, temos:

$$\langle T(1,0), (0,1)\rangle = \langle (a_{11}, a_{21}), (0,1)\rangle = a_{11}\cdot 0 + a_{21}\cdot 1 = a_{21}.$$

10. Inicialmente, recorde-se que $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ é antissimétrica se $a_{11} = a_{22} = 0$ e $a_{21} = -a_{12}$. Considerando $u = (1,0)$ e, em seguida, $u = (0,1)$, encontramos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(1,0), (1,0)\rangle = \langle (a_{11}, a_{21}), (1,0)\rangle = a_{11}\cdot 1 + a_{21}\cdot 0 = a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0. \\ 0 &= \langle T(0,1), (0,1)\rangle = \langle (a_{12}, a_{22}), (0,1)\rangle = a_{12}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 = a_{22} \Rightarrow a_{22} = 0. \end{aligned}$$

Para concluir, considere $u = (1,1)$ e, a partir da relação $\langle T(1,1), (1,1)\rangle = 0$, deduza que $a_{12} = -a_{21}$.

11. Uma particularidade do espaço vetorial $\mathbb{R}$ é que seus vetores são, também, escalares. Assim, olhando os vetores x e y como escalares e o escalar 1 como vetor, temos

$$\langle x, y\rangle = \langle x\cdot 1, y\cdot 1\rangle = (x\cdot y)\langle 1, 1\rangle = \lambda\cdot(x\cdot y),$$

onde λ é o número real $\langle 1, 1\rangle$.

FIM