EXAME Nº 3 - GABARITO PROVA A

01 **PRODUTO INTERNO & ORTOGONALIDADE** Em um espaço vetorial V com produto interno $\langle *, * \rangle$, dois vetores u e v são ortogonais quando $\langle u, v \rangle = 0$.

(a) Se u e v são não nulos e ortogonais, determine λ para que se tenha $\|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

(b) No espaço $\mathbb{P}_2$, dos polinômios de grau ≤ 2, com o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx,$$

calcule $\|x\|$ e o produto interno $\langle x, x-1 \rangle$.

(c) No espaço $\mathbb{R}^3$ considere o produto interno

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + yy' + 3zz'.$$

Determine os valores de λ que tornam os vetores $u = (-2\lambda, \lambda, 2)$ e $v = (1, \lambda, 0)$ ortogonais.

SOLUÇÃO

(a) Sendo u e v vetores não nulos e ortogonais, temos

$$\|u + \lambda v\|^2 = \langle u + \lambda v, u + \lambda v \rangle = \|u\|^2 + 2\lambda \underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + \lambda^2 \|v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2, \tag{0.1}$$

mas, por hipótese,

$$\|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \tag{0.2}$$

De (0.1) e (0.2) resulta $\lambda = \pm 1$.

(b) Temos

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \Longrightarrow \|x\| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

On the other hand,

$$\langle x, x-1 \rangle = \int_0^1 x(x-1) dx = -\frac{1}{6}.$$

(c) Com respeito ao produto interno

$$\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2xx' + yy' + 3zz',$$

os vetores $u = (-2\lambda, \lambda, 2)$ e $v = (1, \lambda, 0)$ são ortogonais, se, e somente se,

$$0=\langle(-2\lambda,\lambda,2),(1,\lambda,0)\rangle=2(-2\lambda)+\lambda^2+0=\lambda(\lambda-4),$$

ou seja, $\lambda=0$ ou $\lambda=4$.

---

02 FUNÇÕES ORTOGONAIS No espaço das funções contínuas $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, considere as funções $f(x)=\cos 2x$ e $g(x)=\operatorname{sen}4x$ e o produto interno usual

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx.$$

(a) Calcule o valor da expressão $\|f\|^2+2\|g\|^2$.

(b) Mostre, com detalhes, que $f\perp g$, isto é, as funções f e g são ortogonais.

(c) Determine o coeficiente de Fourier da função $h(x)=x$, com respeito à função g.

SOLUÇÃO

(a) Um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned}\|f\|^2&=\langle f,f\rangle=\langle\cos 2x,\cos 2x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(2x)\,dx=\tfrac12\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos(4x)]dx\\&=\tfrac12\left[x+\frac{\operatorname{sen}4x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.\\\|g\|^2&=\langle g,g\rangle=\langle\operatorname{sen}4x,\operatorname{sen}4x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}^2 4x\,dx=\tfrac12\int_{-\pi}^{\pi}[1-\cos 8x]dx\\&=\tfrac12\left[x-\frac{\operatorname{sen}8x}{8}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|^2+2\|g\|^2=\pi+2\pi=3\pi.$$

(b) De acordo com a regra para o produto interno, temos

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle&=\langle\cos 2x,\operatorname{sen}4x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}4x\cos 2x\,dx=\tfrac12\int_{-\pi}^{\pi}[\operatorname{sen}6x+\operatorname{sen}2x]dx\\&=\tfrac12\left[-\tfrac16\cos 6x-\tfrac12\cos 2x\right]_{-\pi}^{\pi}=\tfrac12\left[-\tfrac16-\tfrac12-\left(-\tfrac16-\tfrac12\right)\right]=0.\end{aligned}$$

(c) O coeficiente de Fourier da função $h(x)=x$ em relação à função $g(x)=\operatorname{sen}4x$ é

$$\frac{\langle h,g\rangle}{\|g\|^2}=\frac{1}{\|g\|^2}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}4x\,dx,\tag{0.3}$$

e integrando por partes a última integral, com $u=x$, $dv=\operatorname{sen}4x\,dx$, chegamos a

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}(4x)\,dx&=\int_{-\pi}^{\pi}x\operatorname{sen}(4x)\,dx=-\left[\frac{x\cos(4x)}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}+\tfrac14\int_{-\pi}^{\pi}\cos(4x)\,dx\\&=\tfrac14[-\pi-\pi]+\left[\frac{\operatorname{sen}(4x)}{16}\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

De (0.3), resulta que

$$\frac{\langle h, g\rangle}{\|g\|^2} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{1}{2}.$$

---

03 **COMPLEMENTAR ORTOGONAL** Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores

$$v_1 = (1,0,2,1) \quad \text{e} \quad v_2 = (0,1,1,0).$$

(a) Qual a dimensão do complementar ortogonal $W^\perp$? Justifique.

(b) Encontre uma base ortogonal do subespaço $W^\perp$.

SOLUÇÃO

(a) Temos que $\dim W = 2$ e, considerando que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W^\perp$, resulta

$$4 = \dim W + \dim W^\perp = 2 + \dim W^\perp \Rightarrow \dim W^\perp = 2.$$

(b) Temos que $W = [v_1, v_2]$ e um vetor $u = (x, y, z, t)$ pertence ao complementar $W^\perp$ se, e somente se, $\langle u, v_1\rangle = 0$ e $\langle u, v_2\rangle = 0$. Assim,

$$u \in W^\perp \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \langle u, v_1\rangle = 0 \\ \langle u, v_2\rangle = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x + 2z + t = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2y - t \\ z = -y, \end{array} \right.$$

e atribuindo às variáveis livres y e t valores 0 e 1, como na tabela, encontramos a base $\beta = \{w_1, w_2\}$:

x	y	z	t	vetores básicos de $W^\perp$
2	1	-1	0	$w_1 = (2, 1, -1, 0)$
-1	0	0	1	$w_2 = (-1, 0, 0, 1)$

ORTOGONALIZANDO β O Método de Gram-Schmidt se inicia considerando $w_1' = w_1$ e definindo

$$w_2' = w_2 - \frac{\langle w_2, w_1'\rangle}{\|w_1'\|^2} w_1' = (-1,0,0,1) - \tfrac{-2}{6}(2,1,-1,0) = (-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, 1).$$

A base $\beta' = \{w_1', w_2'\}$ de $W^\perp$ é ortogonal.

FIM