EXAME Nº 2 - GABARITO PROVA A

01 CONSTRUINDO APLICAÇÕES LINEARES *Ao construir um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, observou–se que sua imagem é gerada pelos vetores*

$$v_1 = (1,1,0)\,,\ v_2 = (-1,2,1) \quad \text{e} \quad v_3 = (0,3,1)\,.$$

(a) *O operador construído pode ser um isomorfismo? Por quê?*

(b) *Encontre um tal operador.*

(c) *Verique que $w = (0,3,1)$ jaz na imagem de T e encontre um vetor v do $\mathbb{R}^3$, tal que $T(v) = w$.*

SOLUÇÃO

(a) Observando que os vetores $v_1,\ v_2$ e v_3 são LD, porque $v_3 = v_1 + v_2$, deduzimos que $\operatorname{Im}(T)$ é gerada pelos vetores LI v_1 e v_2. Logo, $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ e o operador não é sobrejetor. Não sendo sobrejetor, o operador não pode ser um isomfismo.

(b) Há uma infinidade de operadores cuja imagem é $\operatorname{Im}(T) = [v_1, v_2]$. Podemos considerar a abse canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ e definir, por exemplo, o operador tal que $T(e_1) = v_1,\ T(e_2) = v_2$ e $T(e_3) = \mathbf{0}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x \cdot T(e_1) + y \cdot T(e_2) + z \cdot T(e_3) = x \cdot (1,1,0) + y \cdot (-1,2,1) + z \cdot \mathbf{0} \\ &= (x-y, x+2y, y)\,. \end{aligned}$$

(c) O vetor $w = (0,3,1)$ estará na imagem do operador quando existir um vetor $v = (x,y,z)$, tal que $T(x,y,z) = (0,3,1)$. Ao resolver a equação vetorial $T(x,y,z) = (0,3,1)$, encontramos:

$$(x-y, x+2y, y) = (0,3,1) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Assim, qualquer vetor do tipo $v = (1,1,z)$ satisfaz a equação $T(v) = w$. Isso mostra que $w \in \operatorname{Im}(T)$.

02 IDENTIFICANDO O NÚCLEO E A IMAGEM *Considere a aplicação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *dada por*:

$$T(x, y, z) = (2x - y, 4x - y - z, y - z).$$

Encontre uma base de $\mathcal{N}(T)$ *e outra de* $\operatorname{Im}(T)$.

SOLUÇÃO

Um vetor genérico da imagem é

$$(2x - y, 4x - y - z, y - z) = x \cdot (2, 4, 0) + y \cdot (-1, -1, 1) + z \cdot (0, -1, -1).$$

A imagem é gerada pelos vetores $v_1 = (2, 4, 0)$, $v_2 = (-1, -1, 1)$ e $v_3 = (0, -1, -1)$ e uma base será extraída desse conjunto gerador. Escalonando a matriz geradora, vemos que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e uma base da imagem é formada pelas linhas não nulas da matriz escalonada: $\beta_I = \{(1, 0, -2), 0, 1, 1\}$. Com respeito ao núcleo, vemos que:

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 4x - y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow y = 2x \quad \text{e} \quad z = 2x.$$

Assim, $\mathcal{N}(T) = \{(x, 2x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 2, 2)]$ e uma base do núcleo é $\beta_N = \{(1, 2, 2)\}$.

---

03 COMPOSIÇÃO E REPRESENTAÇÃO MATRICIAL *Considere as aplicações lineares* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *dadas por*:

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z) \quad e \quad S(x, y) = (x, -y, x + y).$$

(a) *Encontre a aplicação composta* $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(b) *Em relação às bases canônicas, represente os operadores* T, S e $S \circ T$ *sob a forma matricial.*

(c) *Há alguma relação entre a matriz* $[S \circ T]$ *e o produto matricial* $[S] \cdot [T]$?

SOLUÇÃO

(a) Temos que

$$(S \circ T)(x, y, z) = S(T(x, y, z)) = S(x + y, x - z) = (x + y, -x + z, 2x + y - z).$$

(b) Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned}
&T(1,0,0) = (1,1), \quad T(0,1,0) = (1,0) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (0,-1) \\
&S(1,0) = (1,0,1), \quad S(0,1) = (0,-1,1) \\
&(S \circ T)(1,0,0) = (1,-2,1), \quad (S \circ T)(0,1,0) = (1,0,1) \quad \text{e} \quad (S \circ T)(0,0,1) = (0,1,-1)
\end{aligned}$$

Logo,

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S \circ T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sim. A relação $[S \circ T]^{\beta}_{\beta''} = [S]^{\beta'}_{\beta''} \bullet [T]^{\beta}_{\beta'}$ é sempre válida. No caso, as bases β, β' e β'' são as bases canônicas do $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

$$\beta = \beta'' = \{(1,0,0), = (0,1,0), (0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1,0), (0,1)\}$$

---

04 **INVERTENDO UM OPERADOR** *Mostre que* $T(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$ *define um isomorfismo de* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e encontre o operador inverso* T^{-1}.

SOLUÇÃO

O operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ será um isomorfismo se, e somente se, for injetor. Temos que:

$$T(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x + y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Logo, $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ e, consequentemente, T é um isomorfismo. Para encontrar o operador inverso T^{-1}, observamos que:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= T^{-1}(x, y) \Leftrightarrow T(a, b) = T\left(T^{-1}(x, y)\right) \Leftrightarrow (a + b, 2a + 3b) = (x, y) \\
&\Leftrightarrow a = 3x - y \quad \text{e} \quad b = -2x + y.
\end{aligned}$$

Logo, o operador inverso T^{-1} é definido por $T^{-1}(x, y) = (3x - y, -2x + y)$.

FIM!