EXAME Nº 1 - GABARITO PROVA A

01 SUBESPAÇO VETORIAL Considere os seguintes subconjuntos:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \cos(x + y + z) = 1\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{A = (A_{ij}) \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A_{11} \cdot A_{12} = 0\}.$$

(a) É o subconjunto W_1 um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$? Justifique sua resposta.

(b) O subconjunto W_2 é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$? Justifique sua resposta.

($\mathcal{M}_{2\times 2}$ é o espaço das matrizes reais 2×2)

SOLUÇÃO

(a) W_1 não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. O vetor $v = (0, \pi, \pi)$ está no subconjunto W_1, porque

$$\cos(0 + \pi + \pi) = \cos(2\pi) = 1$$

e, contudo, o vetor $\frac{1}{2}v \notin W_1$. De fato:

$$\tfrac{1}{2}v = (0, \pi/2, \pi/2) \quad \text{e} \quad \cos(0 + \pi/2 + \pi/2) = \cos\pi = -1.$$

Isto mostra que W_1 não é um subespaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(b) W_2 não é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Vamos exibir dois vetores A e B (matrizes 2×2) do subconjunto W_2, tais que $A + B$ não está em W_2. Isso é suficiente para provar que W_2 não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Se considerarmos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teremos que A e B estão em W_2 e, contudo, $A + B$ não está em W_2, porque

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A + B)_{11} \cdot (A + B)_{12} = 1.$$

---

02 BASE & DIMENSÃO Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y - 2z + 2t = 0\right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z = 0 \;\text{ e }\; z + 2t = 0\right\}$$

(a) Encontre uma base e a dimensão de cada um dos subespaços: W_1, W_2 e $W_1 \cap W_2$.

(b) Determine $\dim(W_1 + W_2)$.

SOLUÇÃO

(a)

- W_1 é o espaço solução do sistema $y - 2z + 2t = 0$ cujo grau de liberdade é 3. Assim, $\dim W_1 = 3$ e escolhamos x, y e z como variáveis livres. Veja a construção de uma base $\beta_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ na tabela abaixo.

x	y	z	t	vetores básicos
1	0	0	0	$u_1 = (1, 0, 0, 0)$
0	2	0	-1	$u_2 = (0, 2, 0, -1)$
0	0	1	1	$u_3 = (0, 0, 1, 1)$

- W_2 é o espaço solução do sistema

$$\left| \begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ z + 2t = 0 \end{array} \right.$$

cujo grau de liberdade é 2. Assim, $\dim W_2 = 2$ e escolhamos x e z como variáveis livres. Veja a construção de uma base $\beta_2 = \{v_1, v_2\}$ na tabela abaixo.

x	y	z	t	vetores básicos
1	-1	0	0	$v_1 = (1, -1, 0, 0)$
0	2	2	-1	$v_2 = (0, 2, 2, -1)$

- $W_1 \cap W_2$ é o espaço solução do sistema

$$\left| \begin{array}{r} y - 2z + 2t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ z + 2t = 0 \end{array} \right.$$

cujo grau de liberdade é 1. Assim, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e escolhamos z como variável livre. Veja a construção de uma base $\beta_3 = \{w_1\}$ na tabela abaixo.

x	y	z	t	vetor básico
-7	6	1	-2	$w_1 = (-7, 6, 1, -2)$

(b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$ $(W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4)$

03 **SUBESPAÇO GERADO** Seja $W_1 = [v_1, v_2, v_3]$ o subespaço do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores

$$v_1 = (1,0,0)\,, \quad v_2 = (-1,2,1) \quad \text{e} \quad v_3 = (3,-2,-1)\,.$$

(a) Verifique se os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI ou LD.

(b) $W_1 = \mathbb{R}^3$? Se não, encontre um subespaço W_2 tal que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

SOLUÇÃO Escalonando a matriz geradora do subespaço W_1, encontramos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $p(A) = 2 = \dim W_1$. Os vetores $u_1 = (1,0,0)\,,\ u_2 = (0,1,1/2)$ formam uma base de W_1.

(W_1 é um plano do $\mathbb{R}^3$)

(a) Os vetores v_1, v_2 e v_3 são LD, porque $\dim W_1 = 2$ (se eles fossem LI, formariam uma base de W_1 e teríamos $\dim W_1 = 3$).

(b) W_1 não é igual a espaço $\mathbb{R}^3$, porque $\dim W_1 < \dim \mathbb{R}^3$. Para "completar" o espaço $\mathbb{R}^3$, via soma direta, basta considerar W_2 gerado por um vetor u_3 que seja LI com os vetores u_1 e u_2. Considere $u_3 = (0,0,1)$ e seja $W_2 = [u_3]$ o subespaço gerado pelo vetor u_3. (W_2 é uma reta do $\mathbb{R}^3$)

Dessa forma, temos:

$$\mathbb{R}^3 = [u_1, u_2] \oplus [u_3] = W_1 \oplus W_2$$

---

04 **MUDANÇA DE BASE** No espaço $\mathbb{P}_2$, dos polinômios de grau ≤ 2, considere a base $\beta = \left\{1, t, t^2\right\}$.

(a) Se $f(t) = 1 + 2t + 4t^3$, mostre que $\beta' = \{f', f'', f'''\}$ é uma base de $\mathbb{P}_2$.

(b) Encontre $[I]_{\beta}^{\beta'}$, a matriz de mudança da base β' para a base β.

SOLUÇÃO Derivando sucessivamente a função $f(t) = 1 + 2t + 4t^3$, encontramos:

$$\begin{aligned} f' &= 2 + 12t^2 \\ f'' &= 24t \\ f''' &= 24 \end{aligned}$$

(a) Temos $\beta' = \left\{24, 24t, 2 + 12t^2\right\}$ e, considerando que $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, para mostrar que β' é uma base de $\mathbb{P}_2$, basta mostrar que os vetores de β' são LI. De fato,

$$\begin{aligned} x(24) + y(24t) + z\left(2 + 12t^2\right) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow (24x + 2z) + (24y)\,t + (12z)\,t^2 = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow 24x + 2z = 0,\ 24y = 0 \text{ e } 12z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0,\ y = 0 \text{ e } z = 0. \end{aligned}$$

(b) Na tabela abaixo vemos os vetores da base β' escritos como combinação linear da base β e ao lado vemos a matriz de mudança $[I]_{\beta}^{\beta'}$.

β'	$\cdots\cdots \rightsquigarrow$	β
$w_1 = 24$	$w_1 = 24 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$	$v_1 = 1$
$w_2 = 24t$	$w_2 = 0 \cdot v_1 + 24 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$	$v_2 = t$
$w_3 = 2 + 12t^2$	$w_1 = 2 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 12 \cdot v_3$	$v_3 = t^2$

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 2 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

FIM