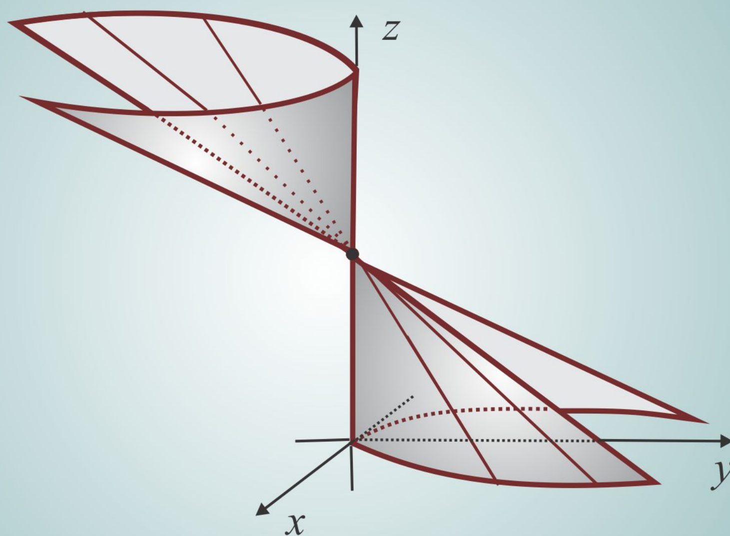
Vetores e Álgebra Linear

Marivaldo P Matos



DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPB

VETORES & ÁLGEBRA LINEAR

Marivaldo P Matos

Sumário

Introdução

Na construção do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, as seguintes propriedades são estabelecidas:

1. $x+y=y+x, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$ **(comutativa)**
2. $(x+y)+z=x+(y+z)\,, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ **(associativa)**
3. $x+(-x)=0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **(existência do simétrico)**
4. $0+x=x+0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **(elemento neutro da soma)**
5. $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **(elemento neutro do produto)**
6. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ **(associativa)**
7. $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ **(distributiva)**
8. $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$ **(distributiva)**

No Capítulo 1, quando estudamos vetores geométricos no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, tivemos oportunidade de estabelecer as propriedades para soma e produto por escalar, semelhantes àquelas para números reais. Por exemplo:

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}, \quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}, \quad x\cdot(\vec{u}+\vec{v})=x\cdot\vec{u}+x\cdot\vec{v}, \quad \text{etc.}$$

No tocante à notação, os vetores serão identificados com pontos do espaço e, neste contexto, os vetores básicos $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ serão identificados com os pontos $A\,(1,0,0)\,,\ B\,(0,1,0)$ e $C\,(0,0,1)$, respectivamente, e o vetor genérico $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ identificar-se-á com o ponto $P\,(x,y,z)\,.$ Assim, temos:

$$\mathbb{R}^3=\{\vec{v}=(x,y,z):x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

e as operações *soma* e *produto por escalar* no espaço $\mathbb{R}^3$ assumem a *forma algébrica*:

SOMA: $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')\,.$

PRODUTO: $\lambda\cdot(x,y,z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\,,\quad \lambda\in\mathbb{R}.$

O que temos em mente a partir de agora é a busca por conjuntos (os *Espaços Vetoriais*), cujos elementos serão denominados *vetores*, com propriedades semelhantes ao $\mathbb{R}^3$, isto é, equipado de uma operação *soma* de vetores e uma operação *produto* de vetores por números reais, atendendo às mesmas propriedades estabelecidas para o $\mathbb{R}^3$, como conjunto de vetores geométricos. Embora os escalares considerados neste texto sejam números reais, a teoria pode ser formulada para conjuntos mais gerais, por exemplo o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos $x + iy$, com x e y números reais. Os conjuntos numéricos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são conhecidos na literatura algébrica por *Corpo dos Números Reais* e *Corpo dos Números Complexos*, respectivamente.

5.0.1 Corpos Numéricos

Por *corpo numérico*, ou simplesmente *corpo*, entendemos um conjunto $\mathbb{F}$ de números (reais ou complexos), o qual goza das seguintes propriedades:

(i) Os números 0 e 1 estão $\mathbb{F}$.

(ii) Se $x, y \in \mathbb{F}$, então $x + y$ e $x \cdot y$ pertencem a $\mathbb{F}$.

(iii) Se $x \in \mathbb{F}$, o simétrico $-x$ também pertence a $\mathbb{F}$.

(iv) Se $x \in \mathbb{F}$ e $x \neq 0$, então o inverso multiplicativo x^{-1} também está em $\mathbb{F}$.

É claro que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reias e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos são corpos numéricos. Qual é o inverso multiplicativo do número complexo não nulo $x = a + ib$?

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.0

1. Por que o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ não é um corpo? Seria o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros um corpo?

2. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo. Seria o conjunto dos irracionais um corpo?

3. Verifique se o conjunto $\mathbb{F} = \left\{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ é um corpo.

4. Mostre que qualquer corpo numérico contém o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Por essa razão, $\mathbb{Q}$ é conhecido como o *menor corpo numérico*.

5. Dados dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{F}$, o quociente $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ recebe o nome de *função racional*. Se $x \in \mathbb{F}$ e $p(x)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{F}$, mostre que $p(x) \in \mathbb{F}$. Dada uma função racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad b_m \neq 0,$$

mostre que se $x \in \mathbb{F}$ e $q(x) \neq 0$, então $f(x) \in \mathbb{F}$.

5.1 Construindo Espaços Vetoriais

Fixemos um corpo $\mathbb{F}$ e consideremos um conjunto não vazio V, cujos elementos u, v, w, etc. denominaremos *vetores*. Para tornar o conjunto V um *espaço vetorial* sobre $\mathbb{F}$ é necessário definir uma soma $(+)$ entre os vetores (elementos) de V e um produto $(\bullet)$ dos escalares (números) de $\mathbb{F}$ pelos vetores de V, de modo que as propriedades **(EV1)**-**(EV8)**, análogas àquelas (1)-(8) estabelecida para números reais, sejam atendidas. Formalmente, definimos duas operações:

$$+ : \underset{(u,v)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{u+v}{V} \qquad \text{e} \qquad \bullet : \underset{(x,v)}{\mathbb{F} \times V} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{x\cdot v}{V}$$

com as seguintes propriedades válidas para u, v e w em V e x e y no corpo $\mathbb{F}$:

(EV1) $u + v = v + u$.

(EV2) $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(EV3) Existe em V um único vetor $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0} + u = u, \quad \forall\, u \in V$. ($\mathbf{0}$ é o *vetor nulo* de $\boldsymbol{V}$)

(EV4) Dado u em V, existe um único vetor w em V, tal que $u + w = \mathbf{0}$. (anota-se $\boldsymbol{w = -u}$)

(EV5) $1 \cdot u = u$.

(EV6) $x \cdot (y \cdot u) = (xy) \cdot u$.

(EV7) $x \cdot (u + v) = x \cdot u + x \cdot v$.

(EV8) $(x + y) \cdot u = x \cdot u + y \cdot u$.

É claro que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Aliás, qualquer corpo numérico $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos com as operações

$$\begin{array}{ll} \textbf{SOMA:} & (a+ib)+(c+id)=(a+c)+i\,(b+d) \\ \textbf{PRODUTO:} & x\cdot(a+ib)=(xa)+i\,(xb)\,, \quad x\in\mathbb{R} \end{array}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Um espaço Vetorial real é um terno $\{V,+,\bullet\}$ constituído de um conjunto não vazio V de vetores e duas operações: **(i)** soma $(+)$ de vetores e **(ii)** produto $(\bullet)$ de vetores por números reais.

EXEMPLO 5.1.1 (O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$.) *Representamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto constituído das n-uplas ordenadas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ de números reais, isto é:*

$$\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,,\quad x_j\in\mathbb{R},\quad j=1,2,3,\ldots n\}\,,$$

equipado com as operações usuais:

$$\begin{array}{ll} \textbf{SOMA:} & (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n) \\ \textbf{PRODUTO:} & \lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)\,, \qquad \lambda\in\mathbb{R} \end{array} \tag{5.1}$$

é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. O vetor $\mathbf{0}=(0,0,0,\ldots,0)$, com as n coordenadas nulas, é o vetor nulo do espaço $\mathbb{R}^n$. De fato, dado $v=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ um vetor do $\mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}+v &= (0,0,0,\ldots,0)+(x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &= (0+x_1,0+x_2,+\ldots,0+x_n)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)=v. \end{aligned}$$

O simétrico do vetor v é o vetor $-v=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$, e temos:

$$v+(-v)=(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)=\mathbf{0}.$$

Como parte do processo de treinamento, verifique as demais propriedades do elenco **(EV1)-(EV8)**, *que comprovam a estrutura de espaço vetorial do $\mathbb{R}^n$. No caso $n=2$, temos o espaço $\mathbb{R}^2$ (o plano xy), com as operações:*

$$\begin{array}{ll} \textbf{SOMA:} & (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \\ \textbf{PRODUTO:} & \lambda\cdot(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \end{array}$$

EXEMPLO 5.1.2 *Existem subconjuntos de um dado espaço vetorial que herdam a estrutura de espaço vetorial e outros não. Por exemplo, o subconjunto S do espaço $\mathbb{R}^3$ dado por:*

$$S = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\},$$

com as operações herdadas do $\mathbb{R}^3$, é, ainda, um espaço vetorial, denominado ***subespaço vetorial*** *do $\mathbb{R}^3$. O subespaço S é o plano xy ($\mathbb{R}^2$) imerso no $\mathbb{R}^3$, ilustrado na Figura 5.1, onde notamos que:*

(i) *o vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ do $\mathbb{R}^3$ jaz no subconjunto S;*

(ii) *se $v = (x, y, 0)$ é um vetor de S e λ é um escalar, então $\lambda \cdot v = (\lambda x, \lambda y, 0)$ é um vetor de S;*

(iii) *se $v = (x, y, 0)$ e $u = (x', y', 0)$ são vetores de S, então $u + v = (x + x', y + y', 0)$ também o é.*

Como veremos adiante, estas são as condições necessárias e suficientes para um subconjunto S de um espaço vetorial V herdar a estrutura de espaço vetorial. Já o subconjunto U do $\mathbb{R}^3$ constituido dos vetores $v = (x, y, 1)$, $\quad x, y \in \mathbb{R}$, não contém o vetor nulo e não pode ter estrutura de subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$. Ele é um subcojunto, mas, não um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

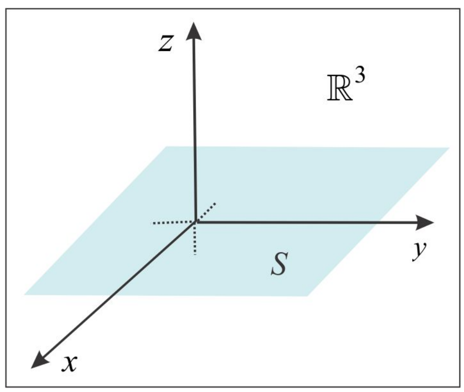


Figura 5.1: Subespaço do $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLO 5.1.3 *O subconjunto S do espaço $\mathbb{R}^4$, dado por:*

$$S = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : t \geq 0\right\}$$

embora contenha o vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^4$. De fato, o vetor $v = (0, 0, 0, 1)$ está em S e, contudo, o seu simétrico $-v = (0, 0, 0, -1)$ não pertence a S.

EXEMPLO 5.1.4 (O Espaço $\mathbb{P}_n[t]$ de Polinômios) *Seja $\mathbb{P}_n[t]$ o conjunto de todos os polinômios reais de grau $\leq n$, isto é:*

$$\mathbb{P}_n[t] = \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad t \in \mathbb{R}\right\}$$

com coeficientes a_j, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, reais. Dados dois polinômios (vetores)

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \quad e \quad q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_n t^n,$$

definimos a soma $p + q$ e o produto $\lambda \cdot p$ pelas relações:

SOMA: $$(p+q)(t) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) t^k = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1) t + \cdots + (a_k + b_k) t^k.$$

PRODUTO: $$(\lambda \cdot p)(t) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) t^k = \lambda a_0 + (\lambda a_1) t + \cdots + (\lambda a_k) t^k, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerando para vetor nulo $\mathbf{0}$ o polinômio identicamente nulo:

$$\mathbf{0}(t) = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

temos $\mathbf{0} + p = p$, $\forall\ p \in \mathbb{P}_n[t]$; por outro lado, o simétrico do vetor $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$ é o vetor $-p$, definido por:

$$(-p)(t) = -a_0 + (-a_1) t + (-a_2) t^2 + \cdots + (-a_n) t^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comprove que $\mathbb{P}_n(t)$, equipado das operações sugeridas, é de fato um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

EXEMPLO 5.1.5 (O Espaço $\mathcal{F}$ de Funções Reais) *Seja X um subconjunto do corpo $\mathbb{R}$ dos números reias, por exemplo um intervalo $[a, b]$, e designemos por $\mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ o conjunto constituido de todas as funções reais $f : X \to \mathbb{R}$, equipado das operações:*

SOMA: $(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}.$

PRODUTO: $(\lambda \cdot f)(t) = \lambda \cdot f(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Considerando o vetor nulo $\mathbf{0}$ como sendo a função identicamente nula $f(t) = 0$, $\forall\ t$, e o simétrico do vetor g como sendo o vetor $-g$, definido por $(-g)(t) = -g(t)$ é fácil verificar que o terno $\{\mathcal{F}, +, \bullet\}$ é um espaço vetorial. Comprove!

EXEMPLO 5.1.6 (O Produto Cartesiano $U \times V$) *Dados dois espaços vetoriais reais U e V, o produto cartesiano:*

$$U \times V = \{(u, v) : u \in U \quad e \quad v \in V\}$$

com as operações usuais:

SOMA: $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)\,, \quad u_j \in U \text{ e } v_j \in V,\ j = 1, 2.$

PRODUTO: $x \cdot (u, v) = (x \cdot u, x \cdot v)\,, \quad x \in \mathbb{R},\ u \in U \text{ e } v \in V.$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$*. Cada espaço vetorial possui o vetor nulo, que é único, e se* $\mathbf{0}_U$ *e* $\mathbf{0}_V$ *são os vetores nulos de* U *e* V*, respectivamente, o vetor nulo de* $U \times V$ *é* $\mathbf{0} = (\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_V)$*. De fato, dados* $u \in U$ *e* $v \in V$*, temos:*

$$\mathbf{0} + (u, v) = (\mathbf{0}_U, \mathbf{0}_V) + (u, v) = (\mathbf{0}_U + u, \mathbf{0}_V + v) = (u, v)\,.$$

Normalmente, o vetor nulo de qualquer espaço vetorial é representado por $\mathbf{0}$*. Agora, comprove as propriedades* **(EV1)**-**(EV8)**.

OBSERVAÇÃO 5.1.7 *É preciso ficar atento às operações de soma e produto por escalar. Se considerarmos o* $\mathbb{R}^3$ *com as operações:*

$$\begin{aligned} (x, y, z) + \left(x', y', z'\right) &= \left(x + x', y + y', z \cdot z'\right) \quad e \\ \lambda \cdot (x, y, z) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vemos que a propriedade **(EV2)** *não é satisfeita para todos os vetores do* $\mathbb{R}^3$*. De fato, considerando os vetores* $u = (0, 0, 1)\,,\ v = (0, 0, -1)$ *e* $w = (0, 0, 2)$*, temos:*

$$(u + v) + w = (0, 0, -4) \quad e \quad u + (v + w) = (0, 0, -2)$$

e, portanto, $(u + v) + w \neq u + (v + w)$*. Assim, o* $\mathbb{R}^3$*, com as operações sugeridas, não é um espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$*.*

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.1

1. Com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$, o conjunto $V = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

2. Seria o corpo $\mathbb{Q}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? E o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$?

3. Em um espaço vetorial V, mostre que:

   (a) $-(-v) = v,\ \forall\, v \in V$ **(b)** se $u + v = u + w,\ \forall\, u, v \in V$, então $v = w$.

4. Dados u e v em um espaço vetorial V, mostre que existe um único w em V, tal que $u + w = v$.

5. Comprove as propriedades **(EV1)**-**(EV8)** para o produto cartesiano $U \times V$ do Exemplo 5.1.6.

5.2 O Espaço Vetorial $\mathcal{M}_{m\times n}$

Uma matriz real A de ordem $m \times n$ (lê-se "m por n") é uma coleção de $m \times n$ números reais a_{ij} dispostos em uma tabela com m linhas e n colunas, representada simbolicamente por $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ou $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, onde os índices i e j são inteiros positivos, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, que determinam, nessa ordem, a posição *linha* $\times$ *coluna* do *elemento* (ou *entrada*) a_{ij} na tabela. O conjunto de todas as matrizes reais $m \times n$, representado por $\mathcal{M}_{m\times n}$, será equipado com as operações usuais:

SOMA: $\quad (a_{ij})_{m\times n} + (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}\,.$

PRODUTO: $\quad x \cdot (a_{ij})_{m\times n} = (x \cdot a_{ij})_{m\times n}\,.$

que tornam $\mathcal{M}_{m\times n}$ um espaço vetorial, cujos elementos (vetores) são matrizes $m\times n$ e o elemento neutro da soma (o vetor nulo) é a *matriz nula* $m \times n$, com todas as entradas iguais a zero, isto é:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

A i-ésima linha L_i e a j-ésima coluna C_j da matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ são matrizes $1 \times n$ e $m \times 1$, dadas por:

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

e podem ser visualizados como vetores do $\mathbb{R}^n$ (n-upla) e do $\mathbb{R}^m$ (m-upla), respectivamente.

EXEMPLO 5.2.1 *Deixe-nos considerar o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2, isto é:*

$$\mathcal{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

equipado com as operaçõs usuais:

SOMA: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

PRODUTO: $$x \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix}.$$

Comprove as propriedades **(EV1)-(EV8)**, *considerando que o vetor nulo de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$ *é*

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 5.2.2 *No espaço* $\mathcal{M}_{2\times 3}$, *das matrizes reais com* 2 *linhas e* 3 *colunas, se* A, B *e* C *são os vetores* (*matrizes* 2×3) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então $A - 3B + 2C$ *é o vetor de* $\mathcal{M}_{2\times 3}$, *dado por*:

$$A - 3B + 2C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

5.2.1 Outras Operações com Matrizes

Além das operações usuais de soma e produto por escalar que fazem de $\mathcal{M}_{m\times n}$ um espaço vetorial, outras operações com matrizes são relevantes em álgebra linear.

► **PRODUTO MATRICIAL**

Matrizes de mesma ordem sempre podem ser somadas, mas, nem sempre podem ser multiplicadas. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$ duas matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. O produto da matriz A pela matriz B é a matriz AB, de ordem $m \times p$, cuja entrada c_{ik}, que ocupa a posição (i, k) , é:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \ , \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots p.$$

O elemento c_{ik} da matriz AB é obtido efetuando o "produto" da i-ésima linha da matriz A pela j-ésima coluna da matriz B, como ilustra o esquema abaixo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

É oportuno ressaltar que o produto AB só é possível quando o número de colunas (n) da matriz A for igual ao número de linhas (n) da matriz B. Às vêzes o produto AB é possível e o produto BA não. Quando as matrizes A e B forem quadradas (o número de linhas igual ao número de colunas) e de mesma ordem, os produtos AB e BA são possíveis, mas, não necessariamente iguais.

PROPRIEDADES DO PRODUTO MATRICIAL Admitindo que os produtos envolvidos sejam possíveis, temos as seguintes propriedades:

(P1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$ **(associativa)**

(P2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$ **(distributiva)**

(P3) $\lambda (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$ **(associativa)**

▶ REDUÇÃO À FORMA ESCALONADA

Para ilustrar o processo de escalonamento, deixe-nos consideremos a matriz 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e efetuemos nas linhas de A as seguintes operações, sempre observando a matriz resultante:

(i) Permutar a linha L_1 com a linha L_3 $(L_1 \leftrightarrow L_3)$.

(ii) Permutar a linha L_2 com a nova linha L_3 $(L_2 \leftrightarrow L_3)$.

(iii) Multiplicar L_1 por -1 $(L_1 \leftrightarrow -L_1)$.

(iv) Multiplicar L_2 por $\frac{1}{2}$ $\quad (L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que a matriz final tem o formato escada e, por isso, diremos que a matriz A foi reduzida à forma *escalonada*. Neste processo, as operações permitidas nas linhas da matriz são:

- Permutar duas linhas. $\quad (L_i \leftrightarrow L_k)$.
- Multiplicar uma linha por uma constante $\lambda \neq 0$. $\quad (L_i \leftrightarrow \lambda L_i)$
- Adicionar a uma linha um múltiplo escalar de outra. $\quad (L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_k)$

Para reconhecer uma matriz na forma escalonada, veja se ela atende aos seguintes requisitos:

(a) As linhas nulas, caso exista alguma, ocorrem abaixo das linhas não nulas.

(b) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a 1. Este é o elemento *pivô*.

(c) Uma coluna que contém o elemento pivô de alguma linha, conhecida por *coluna pivô*, tem os outros elementos iguais a zero.

(d) Se $L_1, L_2, \ldots L_p$ são as linhas não nulas da matriz e o elemento pivô da linha L_i ocorre na coluna de ordem k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots k_p$.

A condição (d) impõe à matriz o formato *escada*; ela nos diz que o número de zeros precedendo o elemento pivô de uma linha aumenta linha após linha; das matrizes abaixo, apenas a matriz C está escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO 5.2.3 *Ao reduzir a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

à forma escalonada, encontramos a seguinte matriz equivalente:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

OBSERVAÇÃO Ao escalonar uma matriz A, surge um novo *ente matemático*, denominado *posto da matriz* A e representado por $p(A)$, que é precisamente o número de linhas não nulas da matriz reduzida. A matriz A do Exemplo 5.2.3 tem posto $p(A) = 2$. Qual o posto da matriz identidade $I_n = (a_{ij})_{n \times n}$, caracterizada por: $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, $i \neq j$? Qual a importância de conhecermos o posto de uma matriz? Veja a discussão na Seção 5.2.4 sobre a resolução de sistemas lineares e tire suas conclusões.

► INVERSÃO POR ESCALONAMENTO

Uma classe importante de matrizes quadradas é a das *matrizes invertíveis*. Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, ou tem inversa, quando existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, tal que $AB = BA = I_n$. Tal matriz B, quando existir, é única e é representada por A^{-1}. As matrizes invertíveis são precisamente aquelas com determinante não nulo e podemos usar o escalonamento para encontrar a inversa A^{-1}. O processo consiste em escalonar a matriz ampliada $\left[A, I_n\right]$ para chegar à matriz $\left[I_n, A^{-1}\right]$.

EXEMPLO 5.2.4 *Como ilustração, vamos inverter a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz ampliada $\left[A, I_3\right]$, *encontramos*

$$\left[A, I_3\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left[I_3, A^{-1}\right].$$

Logo, a inversa da matriz A é a matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e pode-se fazer a comprovação verificando que $AA^{-1} = I_3$.

5.2.2 Resolvendo Sistemas Lineares

Consideremos o sistema linear de m equações e n variáveis

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{5.2}$$

Associadas ao sistema (5.2) destacamos as seguintes matrizes:

(i) a *matriz dos coeficientes* $A = (a_{ij})_{m \times n}$;

(ii) a *matriz das variáveis* $X = (x_j)_{n \times 1}$;

(iii) a *matriz independente* $B = (b_i)_{m \times 1}$;

(iv) a *matriz ampliada* $\widetilde{A} = [A, B]$ de ordem $m \times (n+1)$, dada por:

$$\Big[A, \boxed{\mathrm{B}}\Big] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Com a notação matricial, o sistema (5.2) se escreve sob a forma $AX = B$ e quando escalonamos a matriz A encontramos um novo sistema, equivalente ao sistema original.

► USANDO O POSTO DA MATRIZ

Usaremos o posto das matrizes A e $\widetilde{A}$ para determinar a existência ou não de soluções do sistema (5.2). Neste contexto, temos o seguinte resultado:

1. O sistema linear (5.2) admite solução se, e somente se, as matrizes A e $\widetilde{A}$ têm o mesmo posto. (recorde-se que o posto $p(A)$ de uma matriz A é o número de linhas não nulas da matriz reduzida escalonada)

2. Se $p(A) = p(\widetilde{A}) = n$, então a solução de (5.2) é única. **(n é o número de variáveis)**

3. Se $p(A) = p(\widetilde{A}) = p < n$, então o sistema (5.2) tem uma infinidade de soluções e o *grau de liberdade* é $n - p$. Neste caso, podemos escolher $n - p$ variáveis (*livres*) e expressar as outras p variáveis em função destas.

EXEMPLO 5.2.5 *Como primeiro exemplo, vamos considerar o seguinte sistema:*

$$\left|\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + y - 2z = 2 \end{array}\right.$$

com duas equações ($m = 2$) e três variáveis ($n = 3$). Escalonando a matriz ampliada do sistema, encontramos:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e vemos que $p(A) = p(\widetilde{A}) = 2$, de onde concluímos que o sistema tem uma infinidade de soluções e grau de liberdade igual 1. Escolhendo x como variável livre, obtemos $y = x$ e $z = x - 1$; ao atribuirmos um valor à x, digamos $x = \lambda$, obtemos $y = \lambda$ e $z = 1 - \lambda$.

EXEMPLO 5.2.6 *Escalonando a matriz ampliada do sistema*

$$\left|\begin{array}{l} x - y + z + t = 1 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = -1 \end{array}\right. \tag{5.3}$$

encontramos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 3 & -3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

e vemos que $p(A) = p(\widetilde{A}) = 3$ e, sendo o número de variáveis $n = 4$, deduzimos que o sistema tem uma infinidade de soluções e grau de liberdade igual a 1. O sistema (5.3) é equivalente ao *sistema escalonado*:

$$\left| \begin{array}{l} x + t = 0 \\ y - \frac{2}{3}t = -\frac{2}{3} \\ z - \frac{2}{3}t = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

e escolhendo t como variável livre, obtemos $x = -t$, $y = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}$ e $z = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$ e a cada valor atribuído à t encontramos uma solução do sistema.

OBSERVAÇÃO 5.2.7 *Como as matrizes A e $\widetilde{A}$ têm m linhas, deduzimos que $p(A) \le p(\widetilde{A}) \le m$ e, caso o número de variáveis n seja maior do que o número de equações m, então ou o sistema não tem solução ou ele tem uma infinidade de soluções.*

EXEMPLO 5.2.8 (Sistemas Lineares Homogêneos) *Um caso particular interessante ocorre quando a matriz independente B for zero (a matriz nula $m \times 1$). Neste caso, $X = \mathbf{0}$ é uma solução e, caso o sistema tenha uma infinidade de soluções, o conjunto $\mathcal{S}$ de todas as soluções do sistema tem a seguinte propriedade: se X_1 e X_2 são soluções do sistema e λ é um escalar (número real), então $\lambda \cdot X_1 + X_2$ também é solução. De fato, se X_1 e X_2 são soluções de $AX = \mathbf{0}$, então $AX_1 = AX_2 = \mathbf{0}$ e assim:*

$$A(\lambda \cdot X_1 + X_2) = \lambda \cdot (AX_1) + AX_2 = \lambda \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Logo, $\lambda \cdot X_1 + X_2 \in \mathcal{S}$, isto é, $\lambda \cdot X_1 + X_2$ é solução. Neste caso, se $p(A) = p(\widetilde{A}) = n$, então a única solução do sistema é $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.2

1. Calcule o produto AB, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

O produto BA é possível, nesse caso? Por quê? Dê exemplo de duas matrizes quadradas A e B, de ordem 2×2, tais que $AB \neq BA$.

2. MATRIZ TRANSPOSTA Dada uma $m \times n$ matriz $A = (a_{ij})$, denomina-se *transposta* de A à matriz A^t, de ordem $n \times m$, definida por $A^t = (a_{ji})$. Do ponto de vista prático, para determinar a transposta de uma dada matriz, permutamos linhas e colunas da matriz; é claro que $\left(A^t\right)^t = A$. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Em cada caso, encontre a matriz transposta:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

3. Se A e B são matrizes de mesma ordem e x é um escalar, mostre que $(xA+B)^t = xA^t + B^t$. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(AB)^t = B^tA^t$; comprove no caso 2×2.

4. O TRAÇO DE UMA MATRIZ Dada uma quadrada $A = (a_{ij})_{m\times m}$ o *traço* da matriz A, representado por $\operatorname{tr}(A)$, é definido por $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$. Em outras palavras, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots a_{mm}.$$

(a) Determine o traço das matrizes B e C do Exercício 2.

(b) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e x é um escalar, mostre que:

(i) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ **(ii)** $\operatorname{tr}(xA) = x\operatorname{tr}(A)$

(iii) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(A^t\right)$ **(iv)** $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. **(faça no caso 2×2)**

5. MATRIZ SIMÉTRICA & MATRIZ ANTISSIMÉTRICA Uma matriz quadrada A denomina-se *simétrica* quando $A = A^t$. Se $A = -A^t$, diremos que a matriz A é *antissimétrica*. Mostre que a matriz $\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$ é simétrica e $\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$ é antissimétrica e conclua que toda matriz quadrada se escreve como soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica. Qual a matriz que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica?

6. **MATRIZ IDENTIDADE** A matriz quadrada $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

em que os elementos diagonais são iguais a 1 e os demais são nulos, recebe o nome de *matriz identidade* de ordem n.

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, mostre que $AI_n = I_nA = A$. A matriz identidade I_n desempenha o papel do número 1 em um corpo numérico: $1 \cdot x = x$.

(b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine a matriz quadrada B de ordem $n = 2$, tal que $AB = BA = I_2$. $(B = A^{-1})$

7. **MATRIZ NILPOTENTE** Uma matriz quadrada A, não nula, diz-se *Nilpotente* quando existir um inteiro positivo k, denominado *índice de nilpotência*, tal que $A^k = \mathbf{0}$.

(a) Construa duas matrizes nilpotentes de ordem 2×2.

(b) Se k é o índice de nilpotência da matriz A, mostre que a matriz transposta A^t também é nilpotente, com índice k.

(c) Se A é uma matriz 2×2, simétrica, com índice de nilpotência $k = 2$, mostre que $A = \mathbf{0}$.

5.3 Subespaços Vetoriais

Vimos no Exemplo 5.1.2 que um dado subconjunto S de um espaço vetorial V, pode ou não ser um espaço vetorial, com as operações herdadas de V. As propriedades **(EV1)**-**(EV8)** sendo válidas para os vetores de V serão, naturalmente, válidas para os vetores de S e para o subconjunto S ser um espaço vetorial, com as operações de soma ou produto por escalar herdadas de V, é necessário e suficiente que S seja não vazio e *fechado* com relação a essas operações, isto é:

$$S \neq \varnothing \quad \text{e} \quad \lambda \cdot u + v \in S, \quad \forall\, u, v \in S,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

No caso em que o subconjunto não vazio S é, também, um espaço vetorial, diremos que S é um *subespaço vetorial* de V. É claro que $S = \{\mathbf{0}\}$ e $S = V$ são subespaços vetoriais de V (os *subespaços triviais* de V) e um dado subconjunto não vazio S de V é um subespaço vetorial de V se, e somente se:

(i) o vetor nulo de V está em S, isto é, $\mathbf{0} \in S$.

(ii) se u e v são vetores de S, então $u + v$ está em S.

(iii) se u está em S e λ é um escalar, então $\lambda \cdot u$ está em S.

As condições **(i)**–**(iii)** podem ser compactadas da seguinte forma:

ATALHO: Afim de que um subconjunto W de V, não vazio, seja um subespaço vetorial de V é necessário e suficiente que $\lambda \cdot u + v$ esteja em W, sejam quais forem os vetores u e v de W e o escalar λ.

EXEMPLO 5.3.1 *O conjunto* $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ *é um subespaço vetorial do* $\mathbb{R}^2$ (W *é o eixo* Ox). *Na verdade, além de* $W = \{\mathbf{0}\}$ *e* $W = \mathbb{R}^2$ *os demais subespaços do* $\mathbb{R}^2$ *são as retas pela origem*: $W = \{(x, y) : y = ax\}$.

EXEMPLO 5.3.2 *O conjunto* $W = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ *contém o vetor nulo* $\mathbf{0} = (0, 0)$, *mas, não é um subespaço vetorial do* $\mathbb{R}^2$. *De fato, os vetores* $u = (1, 1)$ *e* $v = (2, 4)$ *pertencem a* W *e, contudo, a soma* $u + v = (3, 5)$ *não pertence a* W.

EXEMPLO 5.3.3 *Por que o subconjunto* $S = \{(a_{ij})_{2\times 2} \in \mathcal{M}_{2\times 2} : a_{11} + a_{22} = 1\}$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$? *O vetor nulo (a matriz nula* 2×2) *não está no suconjunto* S *e isto é suficiente para deduzir que* S *não é um subespaço vetorial de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

EXEMPLO 5.3.4 *O subconjunto* $S = \{X = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \det X = 0\}$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$. *De fato, embora os vetores*:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

estejam em S, *a soma* $A + B = I_2$ *não está em* S, *porque* $\det(A + B) = 1$.

EXEMPLO 5.3.5 *O subconjunto* $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + t = 0\}$ *é um subespaço vetorial do* $\mathbb{R}^4$. *De fato, dados* $u = (x, y, z, t)$, $v = (x', y', z', t')$ *em* W *e um escalar* λ, *notamos que*:

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$$

pertence a W, *porque*:

$$(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda t + t') = \underbrace{\lambda(x+y+t)}_{=0} + \underbrace{(x'+y'+t')}_{=0} = 0.$$

EXEMPLO 5.3.6 *No Exemplo 5.2.8 verificamos que o conjunto S das soluções do sistema linear homogêneo $AX = \mathbf{0}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$. No caso em que $p(A) = p(\widetilde{A}) = n$, o subespaço S se reduz ao subespaço nulo $S = \{\mathbf{0}\}$.*

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.3

1. Por que o subconjunto $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ não é um subespaço vetorial?

2. Mostre que o conjunto $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ é um subspaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. Observe que W é uma reta que passa pela origem (passar pela origem significa $0 \in W$). Como vimos no Exemplo 5.3.1, os subespaços do $\mathbb{R}^2$ são precisamente $W = \{0\}$, $W = \mathbb{R}^2$ e as retas que passam pela origem. Descreva todos os subespaços do $\mathbb{R}^3$.

3. Mostre $W = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

4. Seria $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$? Por quê?

5. **OPERAÇÕES COM SUBESPAÇOS** Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, mostre que:

   (a) A interseção $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V.

   (b) A soma $W_1 + W_2 = \{u + v : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

   (c) O produto $W_1 \times W_2 = \{(u,v) : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de $V \times V$.

   (d) Mostre, com um exemplo, que a união $W_1 \cup W_2$ pode não ser um subespaço vetorial de V.

6. Mostre que $W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

7. Mostre que os subconjuntos das matrizes simétricas e das matrizes antissimétricas são suespaços vetoriais do espaço $\mathcal{M}_{n\times n}$ das matrizes quadradas. Veja o Exercício 5 da Seção Escrevendo para Aprender 5.2.

8. Seja W o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ dado por $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & x+2y \\ 0 & x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Qual dos vetores $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ pertence a W?

9. Mostre que $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)(y-1) = 1\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

10. Mostre que $W = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 2p(1)\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}_3$.

5.3.1 Conjunto Gerador de um Subespaço

No espaço $\mathbb{R}^3$ o plano gerado pelos vetores $u = (1,-1,0)$ e $v = (0,-1,1)$ é o subespaço vetorial:

$$W = \{w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

o qual é caracterizado por:

$$w \in W \Leftrightarrow w = t \cdot u + s \cdot v, \quad s,t \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

A expressão $t \cdot u + s \cdot v$ que aparece em (5.4) é conhecida por *combinação linear* dos vetores u e v e normalmente dizemos que o plano gerado pelos vetores u e v é constituído das combinações lineares desses vetores.

Fixemos um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dados os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V, a expressão

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n,$$

onde os coeficientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estão no corpo $\mathbb{F}$, recebe o nome de *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. O conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ será representado por $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, isto é:

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i, \quad x_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1,2,3,\ldots n \right\}. \tag{5.5}$$

LEMA 5.3.7 *O conjunto $W = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ definido em (5.5) é de fato um subespaço vetorial de V, denominado **subespaço gerado** por $v_1, v_2, \ldots, v_n$.*

Demonstração: É claro que $\mathbf{0} \in W$, porque $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n$, e dados $u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ no conjunto S e um escalar λ, um cálculo direto nos dá:

$$\lambda \cdot u + v = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) \cdot v_i \tag{5.6}$$

e vemos em (5.6) o vetor $\lambda \cdot u + v$ escrito como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e isto nos diz que $\lambda \cdot u + v \in W$. ■

Não devemos confundir o subconjunto $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de n elementos (vetores) com o subespaço $W = \left[v_, v_2, \ldots v_n\right]$ constituído de todas as combinações lineares $x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$ dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e, portanto, com uma infinidade de elementos.

EXEMPLO 5.3.8 *É claro que os vetores* $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ *e* $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ *geram o espaço* $\mathbb{R}^3$, *tendo em vista que*:

$$(x, y, z) = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3.$$

Já o conjunto $\mathcal{G} = \left\{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n\right\}$ *gera o espaço* $\mathbb{P}_n$ *dos polinômios de grau* $\leq n$.

EXEMPLO 5.3.9 *Se* W *é o subespaço do* $\mathbb{R}^3$ *gerado pelos vetores* $u = (1, -1, 0)$ *e* $v = (1, 1, 2)$, *então dado um vetor* $w = (x, y, z)$ *de* W, *existem escalares* s *e* t, *tais que*:

$$(x, y, z) = t \cdot (1, -1, 0) + s \cdot (1, 1, 2) = (t + s, t - s, 2s) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = a + b \\ y = a - b \\ z = 2b \end{array} \right.$$

de onde reulta que $z = x + y$. *Assim, o subespaço* W *é o plano é o plano gerado por* u *e* v :

$$W = \left[u, v\right] = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\right\}.$$

EXEMPLO 5.3.10 *Seja* $W = [v_1, v_2]$ *o subespaço de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$, *gerado pelos vetores*:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ *é um vetor de* W, *então* $a_{ij} = 0$, *se* $i \neq j$, *e daí segue que* W *é o subespaço das matrizes diagonais* 2×2. *Uma matriz quadrada* $A = (a_{ij})$ *diz-se* ***matriz diagonal*** *se* $a_{ij} = 0$, *com* $i \neq j$.

EXEMPLO 5.3.11 *Para expressar o polinômio* $p(t) = -3t + 2t^2$ *como combinação linear dos polinômios*:

$$p_1(t) = 1, \quad p_2(t) = 1 + t \quad e \quad p_3(t) = t - t^2$$

procuramos escalares x y *e* z, *tais que*:

$$-3t + 2t^2 = x \cdot 1 + y \cdot (1 + t) + z \cdot \left(t - t^2\right), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

A equação polinomial (5.7) *é equivalente a*:

$$0 - 3t + 2t^2 = x + y + (y + z)\, t - z t^2$$

e igualando os coeficientes, encontramos:

$$x + y = 0, \quad y + z = -3 \quad e \quad z = -2$$

e, por conseguinte, $x = 1$, $y = -1$ *e* $z = -2$. *Logo,* $p = p_1 - p_2 - 2p_3$ *e com isto mostramos que o polinômio (vetor)* $p(t) = -3t + 2t^2$ *jaz no subespaço de* $\mathbb{P}_2[t]$ *gerado pelos vetores* p_1, p_2 *e* p_3*, isto é*:

$$-3t + 2t^2 \in \left[1, 1+t, t-t^2\right].$$

EXEMPLO 5.3.12 (Encontrando um Conjunto Gerador) *Seja* W *o subespaço do* $\mathbb{R}^4$*, dado por*:

$$W = \{(x-y, y+z, 0, x-2z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Para construir um conjunto de geradores de W*, expressamos um vetor genérico* $v = (x-y, y+z, 0, x-2z)$ *de* W *sob a forma*:

$$\begin{aligned} v &= (x-y, y+z, 0, x-2z) \\ &= x(1,0,0,1) + y(-1,1,0,0) + z(0,1,0,-2) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3 \end{aligned}$$

sendo $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0,0)$ *e* $v_3 = (0,1,0,-2)$. *Dessa forma, identificamos* $\{v_1, v_2, v_2\}$ *como sendo um conjunto de geradores de* W*, isto é*:

$$W = \left[\,(1,0,0,1), (-1,1,0,0), (0,1,0,-2)\,\right]$$

EXEMPLO 5.3.13 *Identifiquemos o subespaço* W *de* $\mathcal{M}_{2\times 2}$*, gerado pelos vetores*:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um vetor genérico $v = (a_{ij})_{2\times 2}$ *de* W *é da forma*:

$$v = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

onde vemos que $a_{12} = a_{21}$ *e, portanto,* v *é uma matriz simétrica.*

EXEMPLO 5.3.14 (Um conjunto gerador de $W_1 + W_2$) *Sejam* W_1 *e* W_2 *dois subespaços do espaço vetorial* V*, gerados por* $\mathcal{G}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ *e* $\mathcal{G}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*, respectivamente. O subconjunto*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é um conjunto gerador do subespaço $W_1 + W_2$. De fato, um dado vetor w de $W_1 + W_2$ é da forma:

$$w = u + v, \quad \text{com } u \in W_1 \text{ e } v \in W_2$$

e, sendo assim:

$$w = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot u_i + \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot v_j$$

onde vemos w escrito como combinação linear dos vetores de $\mathcal{G}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.4

1. Expresse o vetor $v = (1, 1, 2, -1)$ como combinação linear dos vetores

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), \; v_2 = (0, 1, 1, 0), \; v_3 = (0, 0, 1, 0) \text{ e } v_4 = (1, 0, 0, 1).$$

2. Identifique o subespaço W de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Em cada saso, identifique o subespaço W do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto:

   (a) $\mathcal{G} = \{(1, 0, 0), \; (1, 0, 1)\}$ e (b) $\mathcal{G} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1)\}$.

4. Encontre um conjunto gerador do subespaço: $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

5. Repita o exercício precedente com o subespaço do $\mathbb{R}^4$: $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - t = 0\}$.

6. Verifique que os vetores $1, \; 1 - t, \; (1 - t)^2$ e $(1 - t)^3$ geram o espaço $\mathbb{P}_3$.

7. Se o conjunto $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ gera um espaço vetorial V e um dos vetores de $\mathcal{G}$, digamos v_1, é combinação linear dos demais, mostre que $\{v_2, \ldots, v_k\}$ ainda gera o espaço V. É este o processo usado quando desejamos construir um conjunto gerador *minimal*.

8. Seja W o subespaço de $\mathcal{M}_{3\times 2}$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique se o vetor $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence ou não ao subespaço W.

9. Seja $W = \left[v_1, v_2, v_3\right]$ o subespaço do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores:

$$v_1 = (2,1,0), \quad v_2 = (-1,0,1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1,1,1)\,.$$

(a) Determine o valor de λ para que o vetor $u = (\lambda, 2, -2\lambda)$ pertença à W.

(b) O vetor $v = (-1,2,-2)$ jaz no subespaço W?

10. Verifique que:

$$\left[\,(-1,1,1)\,,(0,,1,-1)\,,(2,-1,3)\,\right] = \left[\,(2,0,-4)\,,(0,2,-2)\,\right].$$

11. Se $W = \{(x,y,x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, encontre dois subespaços W_1 e W_2, não triviais, do $\mathbb{R}^3$, tais que:

$$W = W_1 + W_2.$$

5.3.2 Soma Direta

No Exercício 5 da seção Escrevendo para Aprender 5.3, apresentamos a interseção e a soma de dois subespaços W_1 e W_2 de um dado espaço vetorial V. A soma $W_1 + W_2$ pode coincidir com o espaço inteiro V, mas, pode ser um subespaço próprio de V; quanto à interseção $W_1 \cap W_2$, esta pode se reduzir ao vetor nulo, como ocorre no caso em que W_1 é o eixo x e W_2 é o eixo y, mas, pode ser $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$. Quando $V = W_1 + W_2$ e, além disso, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, diremos que V é *soma direta* de W_1 e W_2 e anotamos $V = W_1 \oplus W_2$.

EXEMPLO 5.3.15 *O espaço $\mathbb{R}^2$ se decompõe em soma direta dos subespaços:*

$$W_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \textit{e} \quad W_2 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}\,,$$

isto é, $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$. De fato, tendo em vista que $(x,y) = (x,0) + (0,y)$, obtemos $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$ e, como é óbvio, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. ($W_1$ *é o eixo* x *e* W_2 *é o eixo* y)

EXEMPLO 5.3.16 *Considere os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad e \quad W_2 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Temos que W_1 *é o plano* xy *e* W_2 *é o plano* $x = y$*, ilustrados na Figura 5.2, e a interseção* $W_1 \cap W_2$ *é a reta do* $\mathbb{R}^3$ *gerada pelo vetor* $v = (1, 1, 0)$*, isto é,* $W_1 \cap W_2 = [\,(1, 1, 0)\,]$*. Neste caso,* $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$*, mas, a soma não é direta, porque* $W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

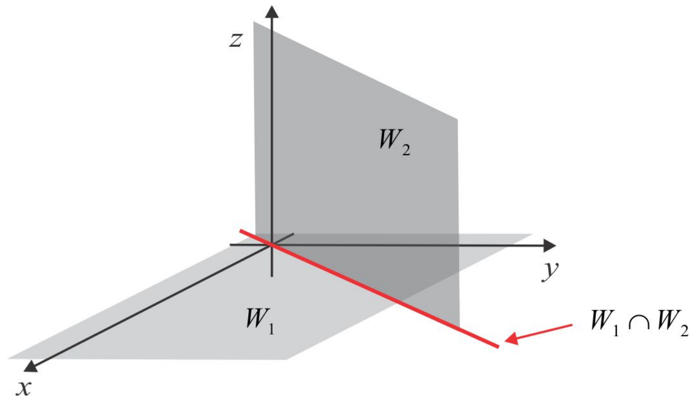


Figura 5.2: $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = [(1, 1, 0)]$.

Finalizamosesta seção com uma caracterização da soma direta.

LEMA 5.3.17 *As seguintes afirmações são equivalentes*:

(A) $V = W_1 \oplus W_2$.

(B) *Todo vetor de* V *se expressa de* ***modo único*** *sob a forma* $v = w_1 + w_2$*, com* $w_1 \in W_1$ *e* $w_2 \in W_2$.

Demonstração: Suponhamos que $V = W_1 \oplus W_2$, e que um dado vetor v tenha duas representações:

$$v = w_1 + w_2 \quad \text{e} \quad v = w_1' + w_2', \quad \text{com } w_1,\ w_1' \in W_1 \text{ e } w_2,\ w_2' \in W_2.$$

Então, $w_1 - w_1' = w_2 - w_2' \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e daí resulta $w_1 = w_1'$ e $w_2 = w_2'$ e temos a unicidade da representação. Reciprocamente, seja $v \in W_1 \cap W_2$ e suponhamos válida a unicidade de representação $v = w_1 + w_2$, com $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$. Temos, pela unicidade:

$$\begin{aligned} v &= v + \mathbf{0} = w_1 + w_2 \Rightarrow w_1 = v \text{ e } w_2 = \mathbf{0} \\ v &= \mathbf{0} + v = w_1 + w_2 \Rightarrow w_1 = \mathbf{0} \text{ e } w_2 = v \end{aligned}$$

e , assim, $w_1 = w_2 = \mathbf{0}$ e $v = \mathbf{0}$. Logo, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e a soma é direta. ■

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.5

1. Encontre dois subespaços W_1 e W_2 do $\mathbb{R}^3$, tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

2. DECOMPONDO O ESPAÇO DE MATRIZES Decomponha o espaço das matrizes reais $\mathcal{M}_{n\times n}$ como soma direta de dois subespaços não nulos W_1 e W_2. **(veja o Exercício 5 da Seção 5.2)**

3. DECOMPONDO O ESPAÇO DE FUNÇÕES Uma função $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ denomina-se *função par* quando $f(x) = f(-x)$, seja qual for o x do intervalo $[-a, a]$. Quando ocorrer $f(x) = -f(-x)$, para todo x do intervalo $[-a, a]$, a função f denominar-se-á *função ímpar*. Seja $\mathcal{F}([-a, a])$ o espaço de todas as funções reais $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que o conjunto das funções pares $\mathcal{F}_P$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}([-a, a])$. Idem para o conjunto das funções ímpares $\mathcal{F}_I$.

   (b) Identifique o subespaço $\mathcal{F}_P \cap \mathcal{F}_I$.

   (c) Mostre que toda função f do espaço $\mathcal{F}([-a, a])$ se escreve como soma de uma função par com uma função ímpar.

   (d) É verdade que $\mathcal{F}([-a, a]) = \mathcal{F}_P \oplus \mathcal{F}_I$?

4. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \big[\,(1,0,0)\,\big] \oplus \big[\,(1,1,0), (0,1,1), (1,0,-1)\,\big]$.

5. No espaço $\mathbb{R}^3$, selecione três subespaços vetoriais W_1, W_2 e W_3, com $W_1 \neq W_2$, tais que

$$W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3.$$

   A *Lei do Cancelamento* é válida para soma direta?

6. Se $W = \big\{\,(x, y, x-y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$, encontre dois subespaços U_1 e U_2 do $\mathbb{R}^3$, com $U_1 \neq U_2$ e $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$.

7. Uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ diz-se *Triangular Superior* se $a_{ij} = 0$, para $i > j$, isto é, os elementos abaixo da diagonal são nulos; se $a_{ij} = 0$, para $i < j$, a matriz A diz-se *Triangular Inferior*. Considere os subespaços W_1 e W_2 constituídos, respectivamente, das matrizes $n \times n$ triangular superior e triangular inferior. Mostre que:

$$\mathcal{M}_{n\times n} = W_1 + W_2.$$

Quando é que a soma é direta?

8. O espaço vetorial V é soma direta dos subespaços W_1, W_2 e W_3, isto é, $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, se:

   (i) $V = W_1 + W_2 + W_3$.

   (ii) A interseção de qualquer um dos subespaços com os outros dois é $\{\mathbf{0}\}$.

   Se W_1, W_2 e W_3 são, respectivamente, os eixos Ox, Oy e Oz, mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

5.4 Base & Dimensão

Recordemos que no espaço $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$ são não coplanares e geram o espaço $\mathbb{R}^3$, no seguinte sentido: todo vetor do $\mathbb{R}^3$ se expressa de modo unico como combinação linear dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$. O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ recebeu a denominação de *Base Canônica* do $\mathbb{R}^3$ e essa noção se generaliza naturalmente para o espaço $\mathbb{R}^n$ considerando os n vetores:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\dots,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1,\dots,0), \dots, \mathbf{e}_n = (0,0,0,\dots,1). \tag{5.8}$$

Os vetores definidos em (5.8) possuem as mesmas características dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, isto é:

(i) São vetores LI: A única solução da equação vetorial:

$$x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

é $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

(ii) Geram o $\mathbb{R}^n$: Todo vetor v do $\mathbb{R}^n$ se expressa como combinação linear dos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$. De fato, dado $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, temos:

$$v = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{e}_n.$$

DEFINIÇÃO 5.4.1 *Em um espaço vetorial V diremos que os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são LI (Linearmente Independentes) quando a equação vetorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}. \tag{5.9}$$

possuir apenas a solução nula $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. *Quando* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *não forem LI, eles serão denominados LD (Linearmente Dependentes). Neste caso, ao menos um dos coeficientes* x_k *da equação vetorial (5.9) é diferente de zero.*

EXEMPLO 5.4.2 *No espaço* $\mathbb{R}^4$ *os vetores* $v_1 = (1,-1,0,0)$ *e* $v_2 = (0,-1,2,1)$ *são LI. De fato, a equação* (5.9), *neste caso, se reduz a:*

$$\begin{aligned} x_1v_1 + x_2v_2 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1\,(1,-1,0,0) + x_2\,(0,-1,2,1) = (0,0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (x_1, -x_1 - x_2, 2x_2, x_2) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

e da última equação, segue que $x_1 = 0$ *e* $x_2 = 0$.

EXEMPLO 5.4.3 *No espaço* $\mathbb{P}_3$, *dos polinômios de grau* ≤ 3, *os vetores* $v_1 = 1,\ v_2 = t,\ v_3 = 1 + t^2$ *e* $v_4 = t - t^3$ *são LI. De fato, considerando que o vetor nulo do espaço* $\mathbb{P}_3$ *é o polinômio identicamente nulo* $\mathbf{0} = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3$, *encontramos:*

$$\begin{aligned} x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot t + x_3 \cdot \left(1 + t^2\right) + x_4 \cdot \left(t - t^3\right) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 + x_3 + (x_2 + x_4)\,t + x_3t^2 - x_4t^3 = 0 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3. \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos: $x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0,\ x_3 = 0$ *e* $x_4 = 0$ *e daí resulta* $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

EXEMPLO 5.4.4 *No espaço* $\mathcal{M}_{2\times 2}$, *das matrizes quadradas* 2×2, *os vetores:*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad e \quad w = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

são LD. Com efeito, se $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = \mathbf{0}$, *então:*

$$\begin{pmatrix} x - 2y - z & x + y + 2z \\ -x - z & 3y + 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e chegamos ao sistema linear homogêneo:

$$\left|\begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x - z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{array}\right.$$

cujo espaço solução é $S = \{(x, x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$. *Por exemplo,* $x = 1,\ y = 1$ *e* $z = -1$ *nos dá uma solução não nula da quação vetorial* $x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = \mathbf{0}$.

EXEMPLO 5.4.5 *No espaço $\mathbb{R}^n$, para que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sejam LI é necessário e suficiente que a $n \times n$ matriz A com colunas $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ tenha posto $p(A) = n$. O sistema linear homogêneo decorrente de (5.9) tem solução única $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \mathbf{0}$, isto é, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.*

Antes de formalizar os conceitos de *Base e Dimensão* de um espaço vetorial é necessário estabelecer alguns resultados preliminares, em forma de Lemas, para dar consistência aos conceitos. No que se segue, V representa um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

LEMA 5.4.6 *Todo subconjunto S de V contendo o vetor nulo é um subconjunto LD (de vetores LD).*

Prova: Se $S = \{\mathbf{0}, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ temos a equação (5.9) atendida:

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0},$$

com um dos escalares (o número 1) não nulo. ∎

LEMA 5.4.7 *A fim de que n vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sejam LD é necessário e suficiente que um deles seja combinação linear dos demais.*

Prova: Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD, existem escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com ao menos um deles, digamos x_k, não nulo e tais que:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k + \cdots x_n v_n = \mathbf{0}. \tag{5.10}$$

Resolvendo (5.10), encontramos:

$$v_k = \left(\frac{x_1}{x_k}\right) v_1 + \left(\frac{x_2}{x_k}\right) v_2 + \cdots \left(\frac{x_{k-1}}{x_k}\right) v_{k-1} + \left(\frac{x_{k+1}}{x_k}\right) v_k + \ldots + \left(\frac{x_n}{x_k}\right) v_n$$

onde vemos o vetor v_k como combunação linear dos demais. Reciprocamente, se um dos vetores, digamos v_1, é combinação linear dos demais, então $v_1 = x_2 v_2 + x_3 v_3 \cdots + x_n v_n$ e temos:

$$(-1)\, v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}$$

onde vemos uma combinação linear nula dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, com um dos coeficientes (o primeiro) não nulo. Isto nos diz que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD. ∎

LEMA 5.4.8 *Se S é um conjunto LI (de vetores LI), então qualquer subconjunto de S também o é.*

Prova: Seja $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto LI e seja $S^* = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$, $k < n$, uma parte do conjunto S. Para mostrar S^* é um conjunto LI, basta observar que:

$$x_1 v_{i_1} + x_2 v_{i_2} + \ldots + x_k v_{i_k} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x_1 v_{i_1} + x_2 v_{i_2} + \ldots + x_k v_{i_k} + 0 \cdot v_{i_k+1} + \cdots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0}$$

e como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, deduzimos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$. ■

LEMA 5.4.9 *Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores LI e $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$, então os escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são únicos. Em outras palavras, a forma de expressar um vetor como combinação linear de vetores LI é única.*

Prova: Basta observar que:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n &= y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \cdots + y_n \cdot v_n \\ &\Leftrightarrow (x_1 - y_1) \cdot v_1 + (x_2 - y_2) \cdot v_2 + \cdots + (x_n - y_n) \cdot v_n = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = \cdots + x_n - y_n = 0 \end{aligned}$$

e daí resulta $x_j = y_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ e, por conseguinte, a unicidade da representação. ■

► **SOBRE BASE & DIMENSÃO** Um conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores LI, que geram o espaço V, é denominado *Base* de V. Neste caso, todo vetor de V se expressa, de maneira única, como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots v_n$. Ao expressar $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$, os escalares x_1, $x_2, \ldots, x_n$ são as coordenadas do vetor v na base $\mathcal{B}$ e anota-se:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \quad \text{ou} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}_{1 \times n}.$$

Para associar ao espaço vetorial V uma dimensão, ressaltamos que qualquer base do espaço V tem o mesmo número de vetores e esse número é o que denominamos *dimensão* do espaço V, anotado $\dim V$. Por exemplo, o espaço $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n, tendo em vista que o conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, definidos em (5.8), é uma base do $\mathbb{R}^n$; no espaço $\mathbb{P}[t]$ de todos os polinômios reais (de qualquer grau) o conjunto

$$\mathcal{B}_k = \left\{1, t, t^2, \ldots, t^k\right\}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

é um conjunto LI, mas não é um conjunto gerador de $\mathbb{P}[t]$. Note que o vetor $p(t) = t^{k+1}$ não é combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}_k$. Uma base de $\mathbb{P}[t]$ é o conjunto:

$$\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2, \ldots, t^k, \ldots\right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$$

com uma infinidade de vetores e, portanto, $\dim \mathbb{P}[t] = \infty$.

Na sequência, aparesentamos alguns corolários de suma importância para o restante do capítulo.

COROLÁRIO 5.4.10 *De um conjunto gerador $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ do espaço V pode-se extrair uma base de V.*

Prova: Se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, nada há a provar! Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD, um dos vetores, digamos v_n, é combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ e o conjunto $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ ainda gera o espaço V. Repetindo esse processo um número finito de vezes, sacamos do conjunto S todos os vetores que são combinações lineares dos demais restando apenas $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vetores LI que geram V. ■

COROLÁRIO 5.4.11 *Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador do espaço V, então qualquer subconjunto de V com $n+1$ vetores é um conjunto LD.*

Prova: Seja $\mathcal{B} = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$, $k \leq n$, uma base de V extraída do conjunto gerador $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e mostremos que se $m > n$, então m vetores $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_m$ de V são LD. De fato, sendo $\mathcal{B}$ um conjunto gerador, existem escalares a_{ij}, tais que:

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_{11}v_{i_1} + a_{12}v_{i_2} + \cdots + a_{1k}v_{i_k} \\
u_2 &= a_{11}v_{i_1} + a_{12}v_{i_2} + \cdots + a_{1k}v_{i_k} \\
&\vdots \\
u_m &= a_{m1}v_{i_1} + a_{m2}v_{i_2} + \cdots + a_{mk}v_{i_k}
\end{aligned}$$

e a combinação linear nula:

$$x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_mu_m = \mathbf{0}$$

nos conduz ao sistema linear homogêneo $AX = \mathbf{0}$, com $A = (a_{ij})_{m \times k}$, de k equações e m variáveis $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$ e sendo $k < m$ o sistema possui uma infinidade de soluções e, claro, dentre elas uma solução não nula. ■

COROLÁRIO 5.4.12 *Um subconjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de vetores LI de V pode ser completado a uma base de V. Uma base é um conjunto LI maximal!*

Prova: Suponhamos $\dim V = n$, de modo que $k \le n$. Do Corolário 5.4.10 deduzimos que:

(a) se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ geram V então $k = n$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de V.

(b) se V não é gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, existe em V um vetor v_{k+1} fora do subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ e, portanto, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ são LI. Repetimos o processo para encontrar $v_{k+2}, \ldots, v_n$, tais que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \cdots v_n\}$ é um conjunto gerador de vetores LI de V. ■

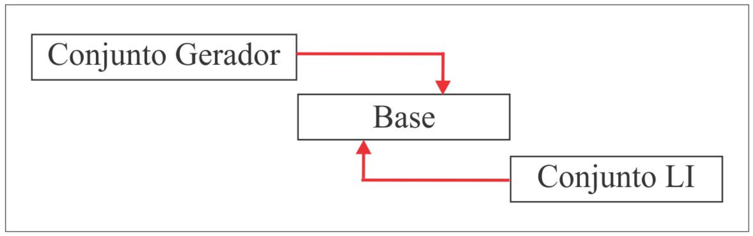


Figura 5.3: Gerador × LI

COROLÁRIO 5.4.13 *Se uma base de V tem n vetores, qualquer outra base também tem n vetores. O número n de vetores de uma base de V recebe o nome de dimensão de V e anota-se $n = \dim V$.*

Prova: Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ duas bases de V. Se $k > n$, pelo Corolário 5.4.11 os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ seriam LD o que não é possível, tendo em vista que $\mathcal{B}'$ é uma base. Da mesma forma, não pode ocorrer $n < k$. ■

COROLÁRIO 5.4.14 *Se W é um subespaço vetorial de V e $\dim V < \infty$, então $\dim W \le \dim V$ e:*

$$\dim W = 0 \Leftrightarrow W = \{\mathbf{0}\} \quad e \quad \dim W = \dim V \Leftrightarrow W = V.$$

Prova: Seja $n = \dim V$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Como $W \subset V$, segue que $\mathcal{B}$ gera o subespaço W e uma base de W pode ser extraída de $\mathcal{B}$. Daí resulta $\dim W \le n$. ■

COROLÁRIO 5.4.15 *Se $\dim V = n$, então:*

(a) *qualquer subconjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com n vetores LI é uma base de V;*

(b) *qualquer subconjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com n geradores de V é uma base de V.*

Prova:

(a) Se o conjunto LI $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ não fosse base de V, poderia ser completado a uma base e teríamos $\dim V > n$, contradizendo a hipótese.

(b) Se o conjunto gerador $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ não fosse base de V, dele poderia ser extraída uma base e teríamos $\dim V < n$, contradizendo a hipótese. ■

EXEMPLO 5.4.16 *Os vetores* $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,-2,1,1)$ *e* $v_3 = (2,-1,1,1)$ *não geram o espaço* $\mathbb{R}^4$*, embora sejam LI. Um conjunto de geradores do* $\mathbb{R}^4$ *deve conter, no mínimo, quatro vetores, porque* $\dim \mathbb{R}^4 = 4$*. Os vetores* $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (1,0,2)$ *e* $u_4 = (1,1,1)$ *geram o* $\mathbb{R}^3$*, mas, não são LI, porque* $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

EXEMPLO 5.4.17 *Dada uma base* $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *do espaço* $\mathbb{R}^4$*, consideremos os seguintes subespaços*:

$$W_0 = \{\mathbf{0}\}, \quad W_1 = [v_1], \quad W_2 \quad [v_1, v_2], \quad W_3 = [v_1, v_2, v_3] \quad e \quad W_4 = [v_1, v_2, v_3, v_4].$$

Temos $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$, $\dim W_3 = 3$ *e* $\dim W_4 = 4$*, com a cadeia de inclusões*:

$$W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 = \mathbb{R}^4.$$

EXEMPLO 5.4.18 *Encontrar uma base do subespaço* W *do* $\mathbb{R}^4$*, dado por*:

$$W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = y \ \ e \ z = t\right\}.$$

Solução: Um vetor genérico $v = (x,x,z,z)$ de W pode se expressar sob a forma:

$$v = x \cdot (1,1,0,0) + z \cdot (0,0,1,1)$$

e isto nos diz que os vetores $v_1 = (1,1,0,0)$ e $v_2 = (0,0,1,1)$ geram o subespaço W e sendo v_1 e v_2 vetores LI, deduzimos que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base de W e $\dim W = 2$. Para construir uma base do $\mathbb{R}^4$ a partir dos vetores v_1 e v_2, consideramos dois vetores v_3 e v_4, de modo v_1, v_2, v_3 e v_4 sejam LI e isto ocorre se, e somente se, a matriz A com colunas v_1, v_2, v_3 e v_4 é tal que $\det A \neq 0$. Podemos escolher, por exemplo, $v_3 = (1,0,0,0)$ e $v_4 = (0,0,0,1)$ e temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{com } \det A = 1.$$

EXEMPLO 5.4.19 *Encontrar uma base e a dimensão do subespaço* $W_1 \cap W_2$*, sendo* W_1 *e* W_2 *os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^4$:

$$W_1 = \left\{(x,x,y,y) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\right\} \quad e \quad W_2 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + 2t = 0\right\}.$$

Solução: O subespaço $W_1 \cap W_2$ é dado por:

$$W_1 \cap W_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y,\ \ z = t \text{ e } x - y - z + 2t = 0\right\}$$

e um vetor genérico de $W_1 \cap W_2$ é, portanto:

$$v = (x, x, 0, 0) = x \cdot (1, 1, 0, 0)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

de onde resulta que $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ é um gerador LI de $W_1 \cap W_2$. Logo, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 0)\}$ é uma base de $W_1 \cap W_2$ e $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.

EXEMPLO 5.4.20 *Sejam $\mathcal{M}_S$ e $\mathcal{M}_A$ os subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ das matrizes simétricas e antissimétricas, respectivamente. Encontrar bases de $\mathcal{M}_S$ e $\mathcal{M}_A$.*

Solução: Para mostrar que os vetores LI:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

geram o subespaço $\mathcal{M}_S$, basta notar que uma matriz simétrica 2×2 é da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3.$$

Logo, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathcal{M}_S$ e $\dim \mathcal{M}_S = 3$. Se B é uma matriz antissimétrica, então:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e o conjunto $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathcal{M}_A$ e $\dim \mathcal{M}_A = 1$.

EXEMPLO 5.4.21 *Se $\mathcal{F}([0, \pi])$ o espaço vetorial das funções reais definidas no intervalo $[0, \pi]$, definido no Exemplo 5.1.5, qual a dimensão do subespaço W gerado pelos vetores $v_1 = \cos t$ e $v_2 = \operatorname{sen} t$?*

Solução: Mostremos que os vetores v_1 e v_2 são LI e, sendo assim, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base de W e $\dim W = 2$. A combinação linear nula:

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = \mathbf{0}$$

dever ser entendida como igualdade funcional:

$$x \cdot \cos t + y \cdot \operatorname{sen} t = 0, \quad 0 \le t \le \pi. \tag{5.11}$$

e para concluir que $x = 0$ e $y = 0$, basta considerar em (5.11) $t = 0$ e em seguida $t = \pi/2$.

EXEMPLO 5.4.22 (Construindo uma Base de $W_1 + W_2$) *Vimos no Exemplo (5.3.14) que dados W_1 e W_2 dois subespaços do espaço vetorial V, gerados por $\mathcal{G}_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ e $\mathcal{G}_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, respectivamente, o subconjunto:*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

é um conjunto gerador do subespaço $W_1 + W_2$. Ao eliminar a dependência linear dos vetores de $\mathcal{G}$, extraímos uma base de $W_1 + W_2$. Por exemplo, sejam W_1 e W_2 os subespaços do $\mathbb{R}^4$, dados por:

$$W_1 = \left[u_1, u_2\right] \quad e \quad W_2 = \left[v_1, v_2, v_3\right]$$

onde $u_1 = (1,1,0,0)$ $u_2 = (0,0,1,1)$, $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (0,1,-1,0)$ e $v_3 = (0,0,2,1)$. O subespaço $W_1 + W_2$ é gerado por $\mathcal{G} = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ e o vetor v_2 pode ser sacado do conjunto gerador, já que $v_2 = u_1 - v_1$, e temos:

$$W_1 + W_2 = \left[u_1, u_2, v_1, v_3\right].$$

Como $\{u_1, u_2, v_1, v_3\}$ é um conjunto gerador de $W_1 + W_2$, de vetores LI, segue que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, v_1, v_3\}$ é uma base de $W_1 + W_2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 4$. Logo, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

Sobre a soma de subspaços de V, ressaltamos que:

(1) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

(2) $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$, porque $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, já que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

(3) A fim de que $W_1 \oplus W_2 = V$ é necessário e suficiente que:

(a) $\dim(W_1 + W_2) = \dim V$ e **(b)** $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$.

(4) Se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente, então $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base de V. De fato, como $V = W_1 + W_2$ segue que o conjunto $\mathcal{B}$ gera o espaço V e para comprovar que $\mathcal{B}$ é um conjunto de vetores LI, notamos que se:

$$\underbrace{x_1 \cdot v_1 + x_2.v_2 + \ldots + x_m \cdot v_m}_{v\ \in W_1} + \underbrace{y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2 + \ldots + y_n \cdot w_n}_{w\ \in W_2} = \mathbf{0}$$

então $v, w \in W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Logo, $v = \mathbf{0}$ e $w = \mathbf{0}$ e, portanto, $x_i = 0$ e $y_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots n$. Vale ressaltar que se a soma não fosse direta, o resultado não seria válido, como no Exercício 20 da seção Escrevendo para Aprender 5.6.

EXEMPLO 5.4.23 (Construindo uma base por escalonamento) *Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, deixe-nos representar por $A_{\mathcal{E}}$ a matriz reduzida de A por escalonamento. Cada linha da matriz A é combinação linear das linhas da matriz escalonada $A_{\mathcal{E}}$ e vice-versa. Assim, os subespaços gerados pelas linhas de A e pelas linhas (não nulas) de $A_{\mathcal{E}}$ coincidem. Também nos parece óbvio que as linhas não nulas da matriz escalonada $A_{\mathcal{E}}$ são vetores LI do $\mathbb{R}^n$ e isto nos conduz à seguinte conclusão: a dimensão do subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz A é igual a $p(A)$, o posto da matriz A, e as linhas não nulas da matriz reduzida $A_{\mathcal{E}}$ formam uma base do subespaço gerado. Recorde-se que $p(A)$ é o número de linhas não nulas da matriz escalonada $A_{\mathcal{E}}$. Vamos construir, por escalonamento, uma base do subespaço W do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto de vetores:*

$$\mathcal{G} = \{(1,0,2),\ (0,-1,2),\ (2,1,1),\ (2,2,2)\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Escalonando a matriz cujas linhas são os geradores de W, encontramos a matriz

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e daí resulta que $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de W e temos $W = \mathbb{R}^3$. Ressaltamos que o gerador v_4 é combinação linear dos demais e pode ser sacado do conjunto gerador, restando três geradores LI v_1, v_2 e v_3, de modo que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ é, também, uma base de W.

EXEMPLO 5.4.24 *Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores:*

$$v_1 = (1,-1,0,0),\ v_2 = (0,0,1,1),\ v_3 = (-1,2,1,1) \quad e \quad v_4 = (1,0,0,0).$$

Imitando o que foi feito no exemplo precedente, vamos construir uma base do subespaço W. Nesta caso, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

e as linhas não nulas $u_1 = (1,0,0,0)$, $u_1 = (0,1,0,0)$ e $u_3 = (0,0,1,1)$ formam uma base para W e $\dim W = 3 = p(A)$. *Como subconjunto do R^4, temos:*

$$W = \{(x,y,z,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}.$$

EXEMPLO 5.4.25 (Extraindo uma base do conjunto gerador) *O processo de escalonamento também pode ser usado para extrair uma base de um conjunto gerador de um subespaço W do $\mathbb{R}^n$. Para descrever o método, deixe-nos representar por W o subespaço do $\mathbb{R}^n$, gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, e seja A a $n \times k$ matriz, cuja j-ésima coluna é o vetor v_j, $1 \leq j \leq k$. Se $j_1, j_2, \ldots, j_m$ são as colunas-pivô da matriz $A_{\mathcal{E}}$, reduzida de A à forma escalonada, então o conjunto:*

$$\mathcal{B} = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m}\}$$

é uma base de W, extraída do conjunto gerador $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Como ilustração, seja W o subespaço do $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1, -1, 1, 0)\,,\ v_2 = (-1, 3, 1, 2)\,,\ v_3 = (0, 1, 1, 1)\ \text{ e } v_4 = (-1, 2, 0, 1)$$

e seja A a matriz 4×4, com colunas v_1, v_2, v_3 e v_4. Escalonando a matriz A, encontramos:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde destacamos as colunas-pivô $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ e $j_3 = 4$ ($1^a, 2^a$ e 4^a colunas) e concluímos que os vetores geradores v_1, v_2 e v_4 formam uma base de W.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.6

1. Mostre que os vetores $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ do $\mathbb{R}^2$ são LI se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.

2. Em um espaço vetorial V, mostre que dois vetores são LD se, e somente se, um deles é múltiplo escalar do outro.

3. No espaço $\mathcal{F}$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que os seguintes pares de funções são LI:

   (a) $1,\ t$ **(b)** $\operatorname{sen} t,\ e^{2t}$ **(c)** $t,\ e^t$ **(d)** $t,\ t^3$.

4. Se $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, mostre que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ são LD, seja qual for o vetor v do espaço V.

5. Em cada caso, exiba uma base para o espaço vetorial V indicado e determine $\dim V$.

   (a) $V = \mathcal{M}_{2\times 3}$ (espaço das matrizes 2×3)

   (b) V é o espaço das matrizes 3×3, triangular superior.

   (c) V é o espaço das matrizes simétricas 3×3.

   (d) V é o espaço das matrizes antissimétricas 3×3.

   (e) V é o espaço das matrizes diagonais $n \times n$.

   (f) V é o espaço das matrizes $A = (a_{ij})$, de ordem 2×2, tais que $a_{11} = a_{21}$ e $a_{12} = a_{11} + a_{22}$.

6. No espaço vetorial $\mathbb{P}_2 = \left\{at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ dos polinômios de grau ≤ 2, verifique se os vetores $p_1,\ p_2$ e p_3 sugeridos são LI ou LD.

   (a) $p_1(t) = 1 + 2t + t^2, \quad p_2(t) = 2 + 4t + 2t^2.$

   (b) $p_1(t) = t + t^2, \quad p_2(t) = 2 \quad \text{e} \quad p_3(t) = 1 + 2t^2.$

   (c) $p_1(t) = 1 + t, \quad p_2(t) = 2 + t \quad \text{e} \quad p_3(t) = 2t^2.$

7. Mostre que $\mathcal{B} = \{(0,2,2), (0,4,1)\}$ é uma base do subespaço $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\right\}$.

8. Se $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ são bases de V_1 e V_2, respectivamente, então:

$$\mathcal{B} = \{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_n)\}$$

   é uma base do espaço $V = V_1 \times V_2$. Em particular, deduza que $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

9. Seja $W = \left[v_1, v_2, v_3, v_4\right]$ o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1,-1,0,0),\ v_2 = (0,0,1,1),\ v_3 = (-2,2,1,1) \quad \text{e} \quad v_4 = (1,0,0,0).$$

   (a) Exiba uma base do subespaço W.

   (b) O vetor $v = (2,-3,2,2)$ está em W?

   (c) $W = \mathbb{R}^4$ ou W é um subespaço próprio do $\mathbb{R}^4$?

10. Encontre uma base para o subespaço W de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Verifique se os vetores

$$v_1 = (1,1,1,1)\,,\ v_2 = (1,2,3,2)\,,\ v_3 = (2,5,6,4) \quad \text{e} \quad v_4 = (2,6,8,5)$$

formam uma base do $\mathbb{R}^4$. Se não, encontre a dimensão e uma base do subespaço gerado por eles.

12. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \big[\,(1,0,1)\,,(0,1,1)\,\big] \quad \text{e} \quad W_2 = \big[\,(1,1,0)\,,(0,0,1)\,\big].$$

Encontre uma base para: W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

13. BASE DO ESPAÇO SOLUÇÃO Se W é o espaço solução do sistema linear homogêneo $AX = \mathbf{0}$, então $\dim W = n - p(A)$, onde n é o número de variáveis e $p(A)$ é o posto da matriz A. Na forma escalonada, o sistema $AX = \mathbf{0}$ tem exatamente $n - p(A)$ variáveis livres e os vetores básicos são construídos atribuindo um valor constante (por exemplo 1) a cada variável livre e valor zero às demais e calculando as variáveis dependentes a partir do sistema. Por exemplo, o subespaço W do $\mathbb{R}^4$ dado por

$$W = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = x - y - z + t = z - t = 0\big\}$$

é o espaço solução do sistema linear com 4 variáveis e 3 equações:

$$\left|\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ z - t = 0. \end{array}\right. \tag{5.12}$$

Escalonando a matriz A dos coeficientes, encontramos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

e vemos que $p(A) = 2$ e o grau de liberdade é 2. Assim, $\dim W = 2$ e a partir das variáveis livres x e z vamos construir uma base de W considerando os valores $x = 1,\ z = 0$ e, depois, $x = 0,\ z = 1$. Os valores de y e t são calculados pelo sistema (5.12) e encontramos os vetores básicos $v_1 = (1,0,1,0)$ e $v_2 = (0,1,0,1)$. Em cada caso, encontre uma base para o espaço das soluções dos sistemas lineares. Reduza a matriz dos coeficientes à forma escalonada.

(a) $\left|\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-y-z=0 \\ -2x+2z=0 \end{array}\right.$ **(b)** $\left|\begin{array}{l} x+2y-4z+3r-s=0 \\ x+2y-2z+2r+s=0 \\ 2x+4y-2z+3r+4s=0 \end{array}\right.$ **(c)** $\left|\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x-y-2z=0 \\ x+4y+5z=0 \end{array}\right.$

14. Sejam W_1 e W_2 os subespaços do $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y, x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Calcule $\dim(W_1 \cap W_2)$ e $\dim(W_1 + W_2)$.

(b) O conjunto $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$? Se for, qual a dimensão?

15. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z-t = 0\right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z+t = 0\right\}.$$

Determine bases dos subespaços $W_1,\ W_2,\ W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. É correto afirmar que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

16. No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, considere os subespaços

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Determine bases de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e de $W_1 + W_2$.

(b) Exiba um vetor do espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, que não pertença a $W_1 + W_2$.

17. Seja $W = [v_1, v_2, v_3]$ o subespaço de $\mathbb{P}_2$, gerado pelos vetores

$$v_1 = 1,\ v_2 = 1 - t + t^2 \quad \text{e} \quad v_3 = 1 - 2t + 2t^2.$$

(a) Os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI ou LD?

(b) Determine uma base e a dimensão de W.

(c) Construa uma base de $\mathbb{P}_2$, da qual façam parte os vetores v_1 e v_2.

18. Mostre que o subespaço $\mathcal{M}_S$ das matrizes reais simétricas $n \times n$ tem dimensão $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Qual a dimensão do subespaço $\mathcal{M}_A$ das matrizes antissimétricas? Lembre-se que:

$$\mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{M}_S \oplus \mathcal{M}_A.$$

19. Seja $V = \mathcal{M}_{n\times n}$, $n \geq 2$, o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$.

    (a) Quantos vetores (matrizes) simétricas LI um subconjunto de V pode ter?

    (b) É possível uma base de V ser construída a partir de um subconjunto de V, de matrizes simétricas?

20. Sejam W_1 e W_2 os subespaços do $\mathbb{R}^3$, ilustrados na Figura 5.2, em que $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$. Verifique que $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente, e, ainda assim, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$.

21. Se $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$, encontre um subespaço W_2, de dimensão 1, tal que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Por que $\dim W_2$ deve ser igual 1?

22. Mostre que qualquer espaço vetorial de dimensão $n = 3$ é a soma direta de três subespaços.

23. No espaço $\mathcal{M}_{n\times n}$, das matrizes quadradas de ordem n, sejam W_1 o subespaço das matrizes com diagonal nula e W_2 o subespaço das matrizes diagonais. Mostre que:

$$\mathcal{M}_{n\times n} = W_1 \oplus W_2$$

e, com auxílio da fórmula, $\dim \mathcal{M}_{n\times n} = \dim W_1 + \dim W_2$, calcule $\dim W_1$ a partir de $\dim W_2$.

5.4.1 Mudança de Base

Nesta Seção construiremos uma matriz quadrada $n \times n$ para relacionar as matrizes coordenadas $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[v]_{\mathcal{B}'}$ de um dado vetor v, em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ de um espaço vetorial n-dimensional V. Como ilustração, seja $V = \mathbb{R}^3$ e fixemos as bases ordenadas:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} = \{u_1, u_2, u_3\}\\ \mathcal{B}' &= \{(1,-1,2),(0,1,1),(1,3,0)\} = \{v_1, v_2, v_3\}.\end{aligned}$$

Expressando cada vetor v_j da base $\mathcal{B}'$ como combinação linear dos vetores u_i da base $\mathcal{B}$, encontramos:

$$\begin{aligned}v_1 &= 1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 2 \cdot u_3\\ v_2 &= 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3\\ v_3 &= 1 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3.\end{aligned}$$

e com os coeficientes das combinações llineares, construímos a *matriz de mudança de base*:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuja j-ésima coluna é $[v_j]_{\mathcal{B}}$. Como o próprio nome sugere, a matriz de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ estabelece a relação entre as coordenadas de um dado vetor v nas duas bases. Por exemplo, se $v = (2, -4, 6)$, um cálculo direto nos dá:

$$v = 2 \cdot u_1 + (-4) \cdot u_2 + 6 \cdot u_3 \quad \text{e} \quad v = 2 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot 0$$

e temos:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, usando as matriz de mudança de base, obtemos a relação:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} .$$

Um cálculo similar nos conduz à seguinte relação:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} .$$

Também é fácil comprovar que a matriz $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ é invertível, com inversa $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, isto é:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = I_3.$$

Em um espaço vetorial V, de dimensão n, fixamos duas bases ordenadas:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\},$$

e escrevemos cada vetor w_j da base $\mathcal{B}'$ como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ da base $\mathcal{B}$:

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \quad j = 1, 2, 3, \ldots n.$$

A matriz:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cuja j-ésima coluna é $\left[v_j\right]_{\mathcal{B}}$, $j = 1, 2, 3, \ldots n$, é conhecida por matriz de *Mudança de Base* (mudança da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$) e relaciona as *matrizes coordenadas* $\left[v\right]_{\mathcal{B}}$ e $\left[v\right]_{\mathcal{B}'}$ de um dado vetor v de V nas duas bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, por meio da identidade:

$$\left[v\right]_{\mathcal{B}} = \left[I\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot \left[v\right]_{\mathcal{B}'}. \tag{5.13}$$

Se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as coordenadas do vetor v na base $\mathcal{B}$ e $y_1, y_2, \cdots y_n$ as coordenadas do mesmo v na base $\mathcal{B}'$, temos a relação (5.13) na forma explícita:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Procedendo de forma similar, chegamos à relação:

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \left[I\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}. \tag{5.15}$$

EXEMPLO 5.4.26 *No espaço $\mathbb{P}_3[t]$ dos polinômios de grau ≤ 3, sejam as bases ordenadas*:

$$\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2, t^3\right\} \quad e \quad \mathcal{B}' = \left\{-1, 1+t, t^2, 2t - t^3\right\}$$

(a) *Encontrar a matriz de mudança* $\left[I\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

(b) *Sabendo que* $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, *encontrar o vetor* v.

Solução:

(a) Expressando os vetores de $\mathcal{B}'$ como combinação linear de $\mathcal{B}$, encontramos:

$$\begin{aligned} -1 &= (-1) \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 1 + t &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ t^2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 \\ 2t - t^3 &= 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + (-1) \cdot t^3 \end{aligned}$$

e assim, obtemos:

$$\left[I\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando a relação (5.14), obtemos:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $v = (-3) \cdot 1 + 1 \cdot t + 3 \cdot t^2 + (-1)\, t^3 = -3 + t + 3t^2 - t^3$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.7

1. Em $\mathbb{R}^3$ considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1)\,, (-1,1,0)\,, (1,0,-1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0)\,, (0,1,0)\,, (0,0,1)\}\,.$$

   (a) Encontre as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ e verifique que $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \bullet [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_3$.

   (b) Determine as coordenadas do vetor $v = (1,2,-1)$ nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

2. No espaço dos polinômios $\mathbb{P}_2$ considere as bases

$$\mathcal{B} = \left\{1, 1+t, t^2\right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{2, -t, 1+t^2\right\}.$$

   (a) Encontre as matrizes de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ e verifique que $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \bullet [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = I_3$.

   (b) Determine as coordenadas do vetor $v = t^2 + t - 2$ nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

3. Determine $[v]_{\mathcal{B}'}$, sabendo que as coordenadas do vetor v do $\mathbb{R}^3$ na base $\mathcal{B}$ e a matriz de mudança $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ são dadas, respectivamente, por:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. No espaço $\mathbb{P}_3$, dos polinômios de grau ≤ 3, considere a base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

   (a) Se $f(t) = \left(1 - t^2\right)^2$, mostre que $\mathcal{B}' = \{f'(t), f''(t), f'''(t), f^{(4)}(t)\}$ é uma base para $\mathbb{P}_3$.

   (b) Determine a matriz $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ de mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$.

5. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine v_1 e v_2, de modo que

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. **MATRIZ DE ROTAÇÃO** Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e deixe-nos representar por $\mathcal{B}'$ a base $\{v_1, v_2\}$ obtida rotacionando a base $\mathcal{B}$, de um ângulo θ, como ilustra a Figura 5.4.

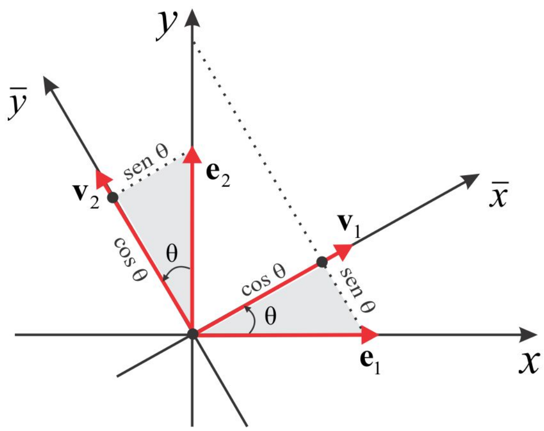


Figura 5.4: Rotação de um ângulo θ.

Dado um vetor $v = (x, y)$ do $\mathbb{R}^2$, temos que

$$v = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 = \overline{x} \cdot v_1 + \overline{y} \cdot v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Para encontrar a matriz de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, devemos expressar os vetores canônicos $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ como combinação linear de v_1 e v_2. Observando a Figura 1.2, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos\theta)\, v_1 - (\operatorname{sen}\theta)\, v_2 \\ \mathbf{e}_2 &= (\operatorname{sen}\theta)\, v_1 + (\cos\theta)\, v_2 \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Assim, temos a relação entre as coordenadas (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \overline{x} = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ \overline{y} = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{array} \right. \tag{5.16}$$

Por exemplo, efetuando uma rotação de $\theta = \pi/3$, a matriz de rotação é

$$[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e as coordenadas do vetor $v = (2, 4)$ na nova base é, portanto,

$$\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Resolva o sistema (5.16) para expressar x e y em função de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e obtenha:

$$\left| \begin{array}{l} x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \overline{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \overline{y}\cos\theta \end{array} \right. \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

7. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

pode ser uma matriz de mudança de base?

8. Se $\mathcal{B} = \{(1, 2), (-2, 4)\}$, encontre a base $\mathcal{B}'$ do $\mathbb{R}^2$, tal que:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço vetorial V, de dimensão $n = 3$.

(a) Verifique que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ é uma base de V.

(b) Encontre a matriz de mudança $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e verifique que esta matriz é triangular superior.

5.4.2 Extraindo uma Base do Conjunto Gerador

Seja $A = \left[v_1, v_2, \dots v_k\right]$, $v_j \in \mathbb{R}^n$, uma $n \times k$ matriz e seja $A_{\mathcal{E}}$ a matriz $\left[v_1^*, v_2^*, \dots, v_k^*\right]$, reduzida (linha) de A à forma escalonada. As colunas de $A_{\mathcal{E}}$ que contém o primeiro elemento não nulo (elemento pivô) de uma linha não nula, recebe o nome de *coluna-pivô.*

LEMA 5.4.27 *Com a notação descrita, temos:*

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j^* = \mathbf{0}.$$

Prova: Decorre do fato dos sistemas homogêneos

$$A \cdot X = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad A^* \cdot X = \mathbf{0}$$

possuirem as mesmas soluções. ■

LEMA 5.4.28 *As colunas-pivô de $A_{\mathcal{E}}$ são vetores LI do $\mathbb{R}^n$.*

Prova: Se as colunas-pivô $v_1^*, v_2^*, \dots, v_m^*$ de $A_{\mathcal{E}}$ fossem LD, existiria um índice j, $1 \leq j \leq m$, tal que:

$$v_j^* = \lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1}^*. \tag{5.17}$$

Se o elemento-pivô 1 da coluna v_j^* ocorre na $i-$ésima linha, então todos os elementos da $i-$ésima linha das colunas $v_1^*, v_2^*, \dots, v_j^*$ são nulos e isto contradiz (5.17). ■

LEMA 5.4.29 *Uma coluna v_i^*, $1 \leq i \leq k$, que não contem um pivô, jaz no subespaço gerado por $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*$.*

Prova: Seja B a matriz de ordem $n \times (i-1)$, cujas colunas são $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*$, e deixe-nos considerar o sistema:

$$B \cdot X = v_i^*. \tag{5.18}$$

Se $X = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1})$ é uma solução do sistema (5.18), então:

$$v_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j v_j^*,$$

isto é, $v_i^* \in \left[v_1^*, v_2^*, \dots, v_{i-1}^*\right]$. A matriz B está escalonada e o sistema (5.18) só não terá solução se a matriz B possuir alguma linha não nula, na qual algum elemento da coluna v_i^* é não nulo. Este elemento não seria um pivô de v_i^*, o que seria uma contradição. ■

TEOREMA 5.4.30 *Se $v_{i1}^*, v_{i2}^*, \ldots, v_{ik}^*$ são as colunas-pivô da matriz $A_{\mathcal{E}}$, então $\mathcal{B} = \{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}\}$ é uma base do subespaço gerado $[v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}]$.*

Demonstração: Basta observar que:

(a) $\{v_{i_1}^*, v_{i_2}^*, \ldots, v_{i_k}^*\}$ é um conjunto de vetores LI.

(b) De (a) e do Lema 5.4.27, resulta que os vetrores $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ são LI.

(c) O conjunto $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ gera o subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. ■

5.5 Revisando o Conteúdo

1. Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto LI, o que dizer do conjunto $\{u + v + 2w, u + v, u - v - w\}$? E o conjunto $\{u + v - 3w, u + v, u + 3v - w\}$ é LI ou LD?

2. Mostre que $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x + y) = 1\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. Idem para o subconjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{sen}(x + y + z) = 0\}$. Note que em ambos os casos o vetor nulo pertence ao conjunto!

3. Um corpo $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre $\mathbb{F}$. Exiba uma base de $\mathbb{F}$. Sobre $\mathbb{R}$ o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é um espaço vetorial de dimensão 2. Exiba uma base.

4. Mostre que $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ é o *menor* subespaço de V contendo os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

5. Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

6. Mostre que os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ coincidem:

$$W_1 = [(1, 2, -1, 3), (3, 6, 3, -3), (2, 4, 1, 0)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, 2, -4, 9), (2, 4, -4, 10)].$$

7. **CONSTRUINDO UMA BASE DE $W_1 + W_2$** Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V e suponha que $\dim W_1 = 3$ e $\dim W_2 = 4$. Dada uma base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ de $W_1 \cap W_2$, complete $\mathcal{B}$ com um vetor

u_1 de W_1, para formar uma base de W_1, e com os vetores v_1 e v_2 de W_2, complete $\mathcal{B}$ a uma base de W_2. Mostre que

$$\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$$

é uma base de $W_1 + W_2$. Conclua que $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

8. Mostre com um exemplo que se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente, a união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ pode não ser uma base de $W_1 + W_2$.

9. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, tais que $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$, é correto afirmar que $V = W_1 \oplus W_2$? Se não, ilustre com um contra-exemplo.

10. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de certo espaço vetorial V e k é um número inteiro entre 1 e n, mostre que $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \oplus [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n]$.

11. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(x, y, z) : x = y = 0\} \quad \text{e} \quad W_3 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

É verdade que $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$? Em qual dos casos a soma é direta?

12. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n = 7$ e sejam W_1 e W_2 subespaços de V, tais que $\dim W_1 = 4$ e $\dim W_2 = 5$. Determine os possíveis valores para $\dim(W_1 \cap W_2)$.

13. Sejam W_1 e W_2 subespaços do $\mathbb{R}^3$, tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e o subespaço W_1 não está contido em W_2. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

14. Determine uma base do subespaço $W = \{p \in \mathbb{P}_2 : p'(t) = 0\}$.

15. No espaço vetorial V das matrizes $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, considere as bases

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Encontre as matrizes de mudança $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

16. Em um espaço vetorial V, mostre que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD se, e somente se, para algum índice k, $2 \le k \le n$, o vetor v_k jaz no subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.0

1. O conjunto $\mathbb{N}$ não é um corpo, porque não contém o número zero. Embora o conjunto $\mathbb{Z}$ contenha o número zero, ele também não é corpo. Note que $2 \in \mathbb{Z}$, mas, $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$.

2. Sim, o conjunto $\mathbb{Q}$ das frações m/n, com m e n números inteiros e $n \neq 0$ é um corpo. É claro que 0 e 1 estão em $\mathbb{Q}$ e dados $x = m/n$ e $y = p/q$ em $\mathbb{Q}$, então:

   (a) $-x = \dfrac{-m}{n}$ e $x^{-1} = \dfrac{n}{m}$, $m \neq 0$, estão em $\mathbb{Q}$.

   (b) $x + y = \dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{mq + np}{nq} \in \mathbb{Q}$ e $x \cdot y = \dfrac{m}{n} \cdot \dfrac{p}{q} = \dfrac{mp}{nq} \in \mathbb{Q}$.

   Para justificar que o conjunto $\mathbb{I}$ dos irracionais não é um corpo, basta observar que $0 \in \mathbb{I}$. (zero é um número racional).

3. Observando que $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$ e que $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, vemos que os números 0 e 1 estão em $\mathbb{F}$. Se $x = a + b\sqrt{2}$ e $y = a' + b'\sqrt{2}$ estão em $\mathbb{F}$, então:

   (a) $x + y = a + b\sqrt{2} + a' + b'\sqrt{2} = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbb{F}$, porque $a + a'$ e $(b + b')$ estão em $\mathbb{Q}$.

   (b) $x \cdot y = \left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2} = r + s\sqrt{2} \in \mathbb{F}$.

   $(r = aa' + 2bb'$ e $s = ab' + a'b)$

   (c) $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{F}$.

   (d) $x^{-1} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^{-1} = a\left(a^2 - 2b^2\right)^{-1} + \left[(-b)\left(a^2 - 2b^2\right)^{-1}\right]\sqrt{2} = r + s\sqrt{2} \in \mathbb{F}$.

   $\left(r = a\left(a^2 - 2b^2\right)^{-1\prime}\right.$ e $\left.s = -b\left(a^2 - 2b^2\right)^{-1}\right)$

4. Sendo $\mathbb{F}$ um corpo, então 0 e 1 estão em $\mathbb{F}$ e dados m e n números inteiros, com $n \neq 0$, então m, $-m$ e $1/n$ estão em $\mathbb{F}$ e, portanto:

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} \in \mathbb{F}, \quad \forall m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0.$$

5. Dado um número x no corpo $\mathbb{F}$, considerando que $\mathbb{F}$ é fechado em relação à soma e ao produto, isto é, soma e produto de números de $\mathbb{F}$ continuam em $\mathbb{F}$, deduzimos que as potências x^2, x^3, $x^4, \ldots$ e, consequentemente, os números, $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ estão em $\mathbb{F}$. Por outro

lado, $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ estando em $\mathbb{F}$ e sendo não nulo, então $q(x)^{-1}$ (o inverso multiplicativo) está em $\mathbb{F}$. Logo,

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \cdot q(x)^{-1} \in \mathbb{F}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.1

1. Embora o vetor nulo $\mathbf{0} = (0,0)$ esteja no conjunto V, o simétrico de dado vetor de V pode não estar em V. Por exemplo, $v = (0,1)$ está em V, mas, $-v = (0,-1)$ não. O conjunto$V$ não é um espaço vetorial.

2. Se ao menos uma das propriedades (EV1)-(EV8) for violada, fica caracterizado que o conjunto (no caso o $\mathbb{R}^2$) com as operações indicadas não é um espaço vetorial. Considerando $v = (1,1)$, e usando as operações indicadas, vemos que

$$v + (-v) = (1,1) + (-1,-1) = (0,-1) \neq \mathbf{0}$$

e isso viola a propriedade (EV4).

3. $\mathbb{Q}$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, porque o produto λv, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{Q}$, pode não pertencer ao conjunto $\mathbb{Q}$ (por exemplo, $\lambda = \sqrt{2}$ e $v = 1 \Rightarrow \lambda v \notin \mathbb{Q}$). Sim, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

4. **(a)** Consequência direta da propriedade (EV4): $v + (-v) = \mathbf{0}$.

   (b) Sendo $u + v = u + w$, segue das propriedades (EV1)-(EV8) que

$$\begin{aligned}(-u) + u + v &= (-u) + u + w \Leftrightarrow [(-u) + u] + v \\ &= [(-u) + u] + w \Leftrightarrow \mathbf{0} + v = \mathbf{0} + w \Leftrightarrow v = w.\end{aligned}$$

5. O vetor w procurado é precisamente $v - u$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.2

1. Efetuando o cálculo, obtemos:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o produto BA não é possível, porque o número de colunas da matriz B não é igual ao número de linhas da matriz A. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e temos $AB \neq BA$.

2. **(a)** $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $C^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

3. Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $A = (b_{ij})_{m\times n}$, então $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$ e, portanto,

$$(xA + B)^t = [xa_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} = x\,[a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} = xA^t + B^t.$$

Para comprovar a propriedade $(AB)^t = B^t A^t$, sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{pmatrix} = (AB)^t.$$

4. **(a)** $\operatorname{tr}(B) = 3$ e $\operatorname{tr}(C) = a + b + c$.

   (b) Sejam $A = (a_{1j})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$, de modo que $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}$.

   (i) $\operatorname{tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.

   (ii) $xA = (xa_{ij})_{n\times n} \Rightarrow \operatorname{tr}(xA) = \sum_{i=1}^{n} (xa_{ii}) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = x \operatorname{tr} A$.

   (iii) Os elementos diagonais de A e A^t são iguais e, sendo assim, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}\left(A^t\right)$.

   (iv) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, então

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(AB) = aa' + bc' + b'c + dd'.$$

Por outro lado,

$$BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + d'd \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(BA) = a'a + b'c + bc' + d'd = \operatorname{tr}(AB).$$

5. A matriz quadrada que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica é a matriz nula.

6. O ítem (a) é trivial! Para o ítem (b) considere $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e admita que $AB = I_2$. Então

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2b & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e daí resulta o sistema

$$\left|\begin{array}{r} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

cuja solução é $a = 1,\ b = -2,\ c = 0$ e $d = 1$. Logo, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprove a resposta, calculando AB e BA.

7. (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tem índice de nilpotência $k = 2$.

   (b) Temos $A^k = \mathbf{0}$ e usando a propriedade $\left(A^t\right)^k = \left(A^k\right)^t$, obtemos o resultado.

   (c) Considere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e usando $A^2 = \mathbf{0}$, deduza que $a = b = c = 0$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.3

1. O vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ não está em W.

2. O vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ está em W, porque $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$. Se $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$ estão em W e λ é um escalar, então $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in W$, porque

$$a \cdot \left(\lambda x + x'\right) + b \cdot \left(\lambda y + y'\right) = \lambda\underbrace{(ax + by)}_{= 0} + \underbrace{(ax' + by')}_{= 0} = 0.$$

3. Note que um vetor (x, y, z) está em W se, e somente se, $z = 0$. Assim, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ está em W e dados $u = (x, y, 0)$ e $v = (x', y', 0)$ em W, então

$$\lambda u + v = \big(\lambda x + x', \lambda y + y', 0\big) \in W, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Não! O vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$ não está em W.

5. Temos que $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$, porque W_1 e W_2 são subespaços de V e, portanto:

$$\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2, \quad \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2 \quad \text{e} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in W_1 \times W_2.$$

(a) Se $u, v \in W_1 \cap W_2$ e λ é um escalar, então $\lambda \cdot u + v \in W_1$ e $\lambda \cdot u + v \in W_2$ e, portanto, $\lambda \cdot u + v \in W_1 \cap W_2$.

(b) Se $u, v \in W_1 + W_2$ e λ é um escalar, então $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, com $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$. Logo,

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda \cdot u_1 + v_1) + (\lambda \cdot u_2 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

(c) Se $u, v \in W_1 \times W_2$ e λ é um escalar, então $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, com $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$. Logo,

$$\lambda \cdot u + v = (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2) + (v_1, v_2) = (\lambda \cdot u_1 + v_1, \lambda \cdot u_2 + v_2) \in W_1 \times W_2.$$

(d) Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^2$:

$$W_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_1 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

temos que $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ pertencem a $W_1 \cup W_2$ e, contudo, $u + v \notin W_1 \cup W_2$. Isso mostra que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço do $\mathbb{R}^2$, embora W_1 e W_2 o sejam.

6. Deve-se mostrar que $\mathbf{0} \in W$ (isso é óbvio, porque $\operatorname{tr} \mathbf{0} = 0$) e que $\lambda A + B \in W$, sempre que $A, B \in W$. No Exercicio 1.2N provamos que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ e como $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, segue que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = 0$ e, portanto, $\lambda A + B \in W$.

7. Considere os vetores $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Temos que $\det A = \det B = 0$ e, contudo, $\det(A + B) \neq 0$. Conclua que $A, B \in W$ e $A + B \notin W$.

8. O vetor A está em W e o vetor B não.

9. O vetor $u = (2, 2)$ está em W, mas, o simétrico $-u$ não.

10. Primeiro, note que $\mathbf{0} \in W$ e, portanto, W não é vazio. Considere dois vetores (polinômios) p e q em W e mostre que $(\lambda \cdot p + q)(0) = 2(\lambda \cdot p + q)(1)$ e deduza que $\lambda \cdot p + q \in W$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.4

1. Escreva

$$(1, 1, 2, -1) = x \cdot (1, 0, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1, 0) + t \cdot (1, 0, 0, 1) = (x + t, y, y + z, t)$$

e deduza que $x = 2,\ y = 1,\ z = 1$ e $t = -1$. Assim, $v = 2v_1 + v_2 + v_3 - v_4$.

2. Um vetor de W é da forma

$$v = xv_1 + yv_2 + zv_3 = x \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x \\ z & y \end{pmatrix}.$$

Assim, vemos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = c \right\}.$$

3. (a) Temos $v \in W$ se, e somente se, $v = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (1, 0, 1) = (x + y, 0, y)$. Assim,

$$W = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(o plano } xz\text{)}.$$

(b) O plano $x - y + 2z = 0$.

4. Um vetor $v = (x, y, z)$ está em W se, e somente se, $x + y + z = 0$. Comprove que os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 1)$ geram W.

5. O subespaço W é constituído das soluções (x, y, z, t) do sistema homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z - t = 0, \end{array} \right.$$

cuja matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{pmatrix}$$

já está na forma escalonada. Temos $p(A) = 2$ e considerando x e z variáveis livres, construímos os vetores básicos $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 1)$. Assim, $W = [v_1, v_2]$.

O resultado pode ser obtido trabalhando diretamente nas coordenadas. De fato, um vetor genérico de W é da forma

$$\begin{aligned} v &= (x, x, z, z) = (x, x, 0, 0) + (0, 0, z, z) \\ &= x(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

de onde resulta que $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$.

6. É suficiente provar que todo polinômio de grau ≤ 3 pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $1,\ 1-t,\ (1-t)^2$ e $(1-t)^3$. Verifiquemos que existem constantes x_1, x_2, x_3 e x_4, tais que $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = x_1 + x_2(1-t) + x_3(1-t)^2 + x_4(1-t)^3$. De fato, se

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 &= x_1 + x_2(1-t) + x_3(1-t)^2 + x_4(1-t)^3 \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (x_2 + 2x_3 + 3x_4)\, t + (x_3 + 3x_4)\, t^2 - x_4 t^3 \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes, encontramos o sistema

$$\left|\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= a_0 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= a_1 \\ x_3 + 3x_4 &= a_2 \\ -x_4 &= a_3 \end{aligned}\right.$$

cuja solução é $x_4 = -a_3,\ x_3 = a_2 + 3a_3,\ x_2 = -a_1 - 2a_2 - 3a_3$ e $x_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

7. Dado v um vetor de V, então:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \cdots + x_k v_k$$

e sendo vetor v_1 combinação linear dos demais, então $v_1 = y_2 v_2 + y_3 v_3 + \cdots + y_k v_k$. Logo,

$$\begin{aligned} v &= x_1(y_2 v_2 + y_3 v_3 + \cdots + y_k v_k) + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \cdots + x_k v_k \qquad (5.19) \\ &= (x_1 y_2 + x_2)\, v_2 + (x_1 y_3 + x_3)\, v_3 + \cdots + (x_1 y_k + x_k)\, v_k. \end{aligned}$$

O que vemos em (5.19) é o vetor v escrito como combinação linear dos vetores $v_2, v_3, \ldots, v_k$. Logo, o espaço V é gerado por $\{v_2, v_3, \ldots, v_k\}$.

8. O subespaço W, gerado por v_1, v_2 e v_3, é:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b+c \\ a & a-b \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}. \right\}$$

Tente escrever o vetor v como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3 e conclua que o vetor v não pertence ao subespaço gerado $[v_1, v_2, v_3]$.

9. **(a)** Escalonando a matriz geradora de W chegamos à matriz:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e vemos que $S = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$ é um conjunto gerador de W. O vetor $v = (\lambda, 2, -2\lambda)$ estará em W quando existirem escalares x e y, tais que:

$$v = (\lambda, 2, -2\lambda) = x \cdot (1,0,-1) + y \cdot (0,1,2) = (x, y, -x+2y) \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

(b) Verifique se existem escalares x e y, tais que $v = x \cdot (1,0,-1) + y \cdot (0,1,2)$

10. Escalone as matrizes geradoras e conclua que ambos os subespaços são gerados pelos vetores $v_1 = (1,0,-2)$ e $v_2 = (0,1,-1)$.

11. Considere, por exemplo, $W_1 = \big[\,(1,0,1)\,\big]$ e $W_2 = \big[\,(0,1,1)\,\big]$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.5

1. Considere os subespaços $W_1 = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e mostre que (i) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e (ii) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W$. Dessa forma, teremos $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W$.

2. Sejam $W_1 = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = A^t\right\}$ e $W_2 = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = -A^t\right\}$ os subespaços das matrizes simétricas e antissimétricas, respectivamente. A matriz A que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica é a matriz nula $A = \mathbf{0}$, isto é, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Por outro lado, dada uma matriz A de ordem 2×2, temos

$$A = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(A + A^t\right)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(A - A^t\right)}_{\text{antissimétrica}}.$$

3. Proceda como exercício precedente e comece mostrando que a única função que é, ao mesmo tempo, par e ímpar é a função identicamente nula. Depois, note que

$$f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{\text{par}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{\text{ímpar}}.$$

4. Sejam $W_1 = [(1,0,0)]$ e $W_2 = [(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)] = [(0,1,1),(1,0,-1)]$, já que $(1,1,0) = (0,1,1) + (1,0,-1)$.

   Se $v \in W_1 \cap W_2$, então

$$\begin{aligned} &v \in W_1 \Rightarrow v = x(1,0,0) = (x,0,0) \\ &v \in W_2 \Rightarrow v = y(0,1,1) + z(1,0,-1) = (z,y,y-z) \end{aligned}$$

   e da relação $(x,0,0) = (z,y,y-z)$ resulta $x = y = z = 0$ e, portanto, $v = \mathbf{0}$. Por outro lado, dado $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos que $v \in W_1 + W_2$, porque:

$$v = \underbrace{(x-y+z)\cdot(1,0,1)}_{\in W_1} + \underbrace{y\cdot(0,1,1) + (y-z)\cdot(1,0,-1)}_{\in W_2}$$

5. Considere os subespaços:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\} && \textbf{(o plano } \boldsymbol{xy}\textbf{)} \\ W_2 &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} && \textbf{(o eixo } \boldsymbol{z}\textbf{)} \\ W_3 &= \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} && \textbf{(a reta } \boldsymbol{x=z,\ y=0}\textbf{)} \end{aligned}$$

   Se valesse a Lei do cancelamento, teríamos $W_2 = W_3$, o que não é verdade!

6. A relação

$$(x,y,x-y) = (x,0,x) + (0,y,-y)$$

   nos dá uma indicação de como devem ser os subespaços U_1 e U_2 :

$$U_1 = \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad U_2 = \{(0,y,-y) : x \in \mathbb{R}\}.$$

7. Para concluir que $M_{n\times n} = W_1 + W_2$, basta notar que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & 2\cdot a_{12} & \cdots & 2\cdot a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & 2\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 2\cdot a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2\cdot a_{n1} & 2\cdot a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

   A soma será direta se, e só se, $a_{ii} = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

8. Temos $W_1 = [\mathbf{e}_1]$, $W_2 = [\mathbf{e}_2]$ e $W_3 = [\mathbf{e}_3]$, de modo que:

$$v = (x, y, z) = x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad W_i \cap W_j = \{\mathbf{0}\}, \ i \neq j.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.6

1. Os vetores $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ são LI se, e somente se, o sistema

$$\left| \begin{array}{l} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{array} \right.$$

tem solução única $x = 0$ e $y = 0$. Isto equivale dizer que a matriz dos coeficientes tem posto 2. Se a e b forem ambos nulos, então os vetores serão LD e $ad - bc = 0$. Suponhamos, então, que a seja não nulo (raciocínio similar se aplica se $b \neq 0$). Escalonando a mariz dos coeficientes, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c/a \\ 0 & (ad - bc)/a \end{pmatrix}$$

onde vemos que $p(A) = 2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. Se preferir, pode usar a Regra de Cramer!

2. Se os vetores u e v são LD, existem escalares x e y, com um deles não nulo, tais que $xu + yv = \mathbf{0}$. Se, por exemplo, $x \neq 0$, obtemos $u = (-y/x)v$ (u múltiplo de v). Reciprocamente, se u for múltiplo de v, então existe um escalar λ, tal que $u = \lambda v$ e daí resulta $u + (-\lambda)v = \mathbf{0}$. O que vemos na última igualdade é uma combinação linear nula de u e v, com um dos coeficientes $\neq 0$. Veja na Definição 5.4.1 o conceito de vetores LD!

3. No espaço $\mathcal{F}$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o vetor nulo é a função $\mathbf{0}$, identicamente nula, isto é, aquela que assume o valor zero em cada t.

   (a) Se $x \cdot 1 + y \cdot t = \mathbf{0}$, consideremos $t = 0$, para obtermos $x = 0$ e, em seguida, com $t = 1$, obtemos $y = 0$.

   (b) Considerando a combinação linear nula $x \cdot \operatorname{sen} t + y \cdot e^{2t} = \mathbf{0}$ e fazendo $t = 0$, obtemos $y = 0$; com $t = \pi/2$, obtemos $x = 0$.

   (c) Se $x \cdot t + y \cdot e^t = \mathbf{0}$, então considerando $t = 0$ e em seguida $t = 1$, encontramos $x = y = 0$.

   (d) Se $x \cdot t + y \cdot t^3 = \mathbf{0}$, então $x \cdot t + y \cdot t^3 = 0 \cdot t + 0 \cdot t^3$, $\quad \forall t$, e igualando os coeficientes, chegamos a $x = y = 0$.

4. Sendo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base, então o vetor v se expressa, de modo único, como combinação linear $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ e daí resulta:

$$(-1)\,v + x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = \mathbf{0}. \tag{5.20}$$

O que vemos em (5.20)? Uma combinação linear nula, com pelo menos um coeficiente $(x_0 = -1)$ não nulo. Então os vetores $v, v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD.

5. (a) $\dim V = 6$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) $\dim V = 6$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) $\dim V = 6$ **(d)** $\dim V = 3$ **(e)** $\dim V = n$. (construa as respectivas bases!)

(f) $\dim V = 2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

6. (a) p_1 e p_2 são LD, porque p_2 é um múltiplo escalar de p_1. $(p_2 = 2p_1)$

(b) A partir da combinação linear nula $x \cdot p_1 + y \cdot p_2 + z \cdot p_3 = \mathbf{0}$, obtemos:

$$\begin{aligned} x\left(t + t^2\right) + 2y + z\left(1 + 2t^2\right) &= 0 \\ &\Leftrightarrow 2y + z + xt + (x + 2z)\,t^2 = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow 2y + z = 0,\ x = 0,\ x + 2z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

Logo, p_1, p_2 e p_3 são LI.

(c) Procedendo como no ítem (b), encontramos:

$$\begin{aligned} x\,(1 + t) + y\,(2 + t) + 2zt^2 &= 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y + (x + y)\,t + 2zt^2 = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow x + 2y = 0,\ x + y = 0,\ z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0 \end{aligned}$$

e os vetores p_1, p_2 e p_3 são LI.

7. Em primeiro lugar, note que os vetores $v_1 = (0, 2, 2)$ e $v_2 = (0, 4, 1)$ são LI e resta-nos provar que esses vetores geram o subespaço W. Ora, dado $v = (0, a, b)$ um vetor qualquer de W, resolva a equação $v = x \cdot v_1 + y \cdot v_2$ e encontre $x = (-a + 5b)/2$ e $y = (a - b)/4$. "Todo vetor de W é combinação linear de v_1 e v_2."

8. Basta mostrar que $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de $V_1 \times V_2$, constituído de vetores LI. Para mostrar que $\mathcal{B}$ gera $V_1 \times V_2$, seja (v, w) em $V_1 \times V_2$, de modo que $v \in V_1$ e $w \in V_2$ e, assim:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k$$
$$w = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_n w_n$$

e daí resulta que:

$$(v, w) = x_1 (v_1, 0) + x_2 (v_2, 0) + \ldots + x_k (v_k, 0) + y_1 (0, w_1) + y_2 (0, w_2) + \ldots + y_n (0, w_n).$$

Para mostrar que $\mathcal{B}$ é um conjunto de vetores LI, observamos que:

$$x_1 (v_1, \mathbf{0}) + x_2 (v_2, \mathbf{0}) + \ldots + x_k (v_k, \mathbf{0}) + y_1 (\mathbf{0}, w_1) + y_2 (\mathbf{0}, w_2) + \ldots + y_n (\mathbf{0}, w_n) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

nos dá:

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k &= \mathbf{0} \\ y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_n w_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e daí resulta $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$.

9. Escalonando a *matriz geradora* de W, encontramos:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, consequentemente, $\dim W = 3 = p(A_{\mathcal{E}})$.

(a) As linhas não nulas da matriz escalonada $A_{\mathcal{E}}$ formam uma base de W e, sendo assim:

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}. \tag{5.21}$$

(b) Segue de (5.21) que um vetor $v = (a, b, c, d)$ do $\mathbb{R}^4$ pertence a W se, e só se, $c = d$. Assim, o vetor $v = (2, -3, 2, 2)$ está em W.

(c) W é um subespaço próprio (menor) do que $\mathbb{R}^4$, porque $\dim W = 3 < \dim \mathbb{R}^4$.

10. O processo consiste em excluir (um a um) do conjunto gerador cada vetor que é combinação linear dos demais, até que sobrem apenas vetores LI que formarão uma base (veja o Exercício 13 da seção Escrevendo para Aprender 5.6). A combinação linear nula $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = \mathbf{0}$, nos conduz ao sistema homogêneo

$$\left|\begin{array}{rl} x + y + z + t = 0 & \textbf{(I)} \\ -5x + y - 4z - 7t = 0 & \textbf{(II)} \\ -4x - y - 5z - 5t = 0 & \textbf{(III)} \\ 2x + 5y + 7z + t = 0 & \textbf{(IV)} \end{array}\right.$$

e, escalonando a matriz dos coeficientes, chegamos à matriz

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cujo posto é 3 e o grau de liberdade do sistema é $GL = 4 - 3 = 1$. O sistema é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} x + \frac{4}{3}t = 0 \\ y - \frac{1}{3}t = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

e escolhendo $t = 1$ (variável livre), obtemos $x = -4/3$ e $y = 1/3$. Com esses valores, a combinação linear fica

$$-\tfrac{4}{3}v_1 + \tfrac{1}{3}v_2 + v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow v_4 = \tfrac{4}{3}v_1 - \tfrac{1}{3}v_2$$

e eliminamos o vetor v_4 da coleção de geradores. O subespaço W é gerado pelos vetorres v_1, v_2 e v_3 e para concluir, mostremos que os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI. De fato, consideramos a combinação linear nula $xv_1 + yv_2 + zv_3 = \mathbf{0}$, a qual é equivalente ao sistema:

$$\left|\begin{array}{rl} x + y + z = 0 & \textbf{(V)} \\ -5x + y - 4y = 0 & \textbf{(VI)} \\ -x - y - 5z = 0 & \textbf{(VII)} \\ 2x + 5y + 7z = 0 & \textbf{(VIII)} \end{array}\right.$$

cuja solução é $x = y = z = 0$. Assim, v_1, v_2 e v_3 são LI e geram o subespaço W, constituindo, portanto, uma base de W.

FUGINDO DO ESCALONAMENTO Trabalhando diretamente no sistema **(I)-(IV)**, segue de **(III)** e **(IV)** que $y + z = t/3$ e usando **(I)**, encontramos $x = -4t/3$. Agora, de **(II)** e **(III)**, obtemos:

$$-9x - 9z - 12t = 0 \Leftrightarrow 3x + 3z + 4t = 0$$

e, considerando que $x = -4t/3$, resulta $z = 0$. Para obter uma solução não nula, fazemos $t = 3$ para chegarmos à solução:

$$x = -4, \; y = 1, \; z = 0 \quad \text{e} \quad t = 3.$$

Assim,

$$-4v_1 + v_2 + 0v_3 + 3v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow v_4 \in [v_1, v_2, v_3].$$

Para concluir, eliminamos v_4 do conjunto gerador e mostramos que v_1, v_2 e v_3 são LI. De fato, somando **(VI)** e **(VII)**, encontramos $x = -z$ e usando (V), chegamos a $y = 0$. Finalmente, usamos **(VIII)** e obtemos $x = 0$ e $z = 0$.

11. Escalonando a matriz A, chegamos à matriz $A_{\mathcal{E}}$ cujas linhas não nulas formam uma base de W.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

Como $p(A) = 3$, segue que $\dim W = 3$ e $\mathcal{B} = \{(1,0,0,1/2), (0,1,0,1/2)\,(0,0,1,1/2)\}$ é uma base de W.

EXTRAINDO UMA BASE POR ESCALONAMENTO Escalonando a matriz cujas colunas são os vetrores v_1, v_2, v_3 e v_4, encontramos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{\mathcal{E}}$$

e observamos que, na forma escalonada, as colunas 1,2 e 3 contêm os elementos pivôs destacados e, portanto, $\{(1,1,1,1), (1,2,3,2), (2,5,6,4)\}$ é uma base de W, extraída do conjunto gerador.

12. Temos que $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ e o subespaço $W_1 + W_2$ é gerado por $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$. Escalonando a matriz geradora chegamos à matriz:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ e, sendo assim, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. Para identificar $W_1 \cap W_2$, observamos inicialmente que:

$$W_1 = \{(x, y, x+y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

e, consequentemente, $v = (1,1,2)$ está em $W_1 \cap W_2$. Como $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, segue que:

$$W_1 \cap W_2 = \left[\,(1,1,2)\,\right] = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

13. Como ilustração, faremos o ítem (b). Escalonando a matriz A dos coeficientes, chegamos à matriz:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde vemos que $p(A) = 2$ e o grau de liberdade do sistema é $GL = 5 - 2 = 3$. Na tabela abaixo contruímos os vetores básicos v_1, v_2 e v_3 a partir ds valores atribídos às variáveis livres x, y e z.

x	y	z	r	s	vetor básico
1	0	0	$-2/5$	$-1/5$	$v_1 = (1,0,0,-2/5,-1/5)$
0	1	0	$-4/5$	$-2/5$	$v_2 = (1,0,0,-4/5,-2/5)$
0	0	1	$6/5$	$-2/5$	$v_3 = (1,0,0,6/5,-2/5)$

14. Temos

$$W_1 = \left[\,(1,0,0),(0,1,0)\,\right] \quad \text{e} \quad W_2 = \left[\,(1,0,1),(0,1,-1)\,\right].$$

sendo $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$.

(a) O subespaço $W_1 \cap W_2$ é o espaço solução do sistema homogêneo

$$\left|\begin{array}{r} z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right.$$

cuja matriz dos coeficientes A tem posto $p(A) = 2$. Assim, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, que é o grau de liberdade do sistema. Por outro lado:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 3.$$

($W_1 \cap W_2$ é uma reta pela origem e $W_1 + W_2$ coincide com o espaço $\mathbb{R}^3$)

(b) Para justificar que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$ é suficiente exibir dois vetores u e v de $W_1 \cup W_2$, tais que $u + v \notin W_1 \cup W_2$. Considere os vetores $u = (1,0,0) \in W_1$ e $v = (2,1,1) \in W_2$. Temos que

$$u, v \in W_1 \cup W_2, \quad \text{mas} \quad u + v = (3,1,1) \notin W_1 \cup W_2.$$

15. Sejam A e B as matrizes dos coeficientes dos sistemas homogêneos que descrevem W_1 e W_2, respectivamente. Temos que $p(A) = 2$, $p(B) = 1$ e, por conseguinte, $\dim W_1 = 2$ e $\dim W_2 = 3$. (recorde-se que cada sistema tem 4 variáveis e a dimensão do espaço solução é o grau de liberdade do sistema). O subespaço $W_1 \cap W_2$ é o espaço solução do sistema:

$$\left| \begin{aligned} x + y &= 0 \\ z - t &= 0 \\ x - y - z + t &= 0 \end{aligned} \right. \tag{5.22}$$

com grau de liberdade 1. Assim, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Temos:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = 4$$

e, portanto, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. A construção das bases baseia-se no Exercício 13 da Seção 5.6. Por exemplo, se fizermos $z = 1$ no sistema (5.22) que define $W_1 \cap W_2$, encontramos $t = 1$, $y = 0$ e $x = 0$ e $\mathcal{B} = \{(0,0,1,1)\}$ é uma base de $W_1 \cap W_2$.

16. **(a)** As bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ de W_1 e W_2 são construidas de forma direta:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

O subespaço $W_1 \cap W_2$ é constituído das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ e uma base desse subespaço é $\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. A dimensão do subespaço $W_1 + W_2$ é igual a 3 e ele é gerado pelos vetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que esses vetores são LD, porque $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$, e eliminando, por exemplo, o vetor v_1 temos que $\mathcal{B}_4 = \{v_2, v_3, v_4\}$ é base de $W_1 + W_2$.

(b) $W_1+W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y & x+z \\ x+y & z \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ e o vetor $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ não está em W_1+W_2.

17. **(a)** Os vetores (polinômios) v_1, v_2 e v_3 são LD. De fato:

$$\begin{aligned} xv_1 + yv_2 + zv_3 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y\left(1 - t + t^2\right) + z\left(1 - 2t + 2t^2\right) = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow \ (x + y + z) + (-y - 2z)\,t + (y + 2z)\,t^2 = 0, \quad \forall t, \end{aligned}$$

e da última equação segue que os coeficientes x, y e z devem satisfazer ao sistema linear homogêneo:

$$\left| \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

com 1 grau de liberdade (uma variável livre). O sistema tem uma infinidade de soluções e, portanto, os vetores são LD.

(b) Sendo v_3 combinação linear de v_1 e v_2, pode ser sacado do conjunto gerador, restando v_1 e v_2 geradores LI de W, isto é, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ é uma base de W e $\dim W = 2$.

(c) Como $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, para formar uma base de $\mathbb{P}_2$ devemos acrescentar ao conjunto $\{v_1, v_2\}$ um terceiro vetor LI com v_1 e v_2. Seja $v = a + bt + ct^2$ um tal vetor. Como v_1 e v_2 são LI, para que v_1, v_2 e v também sejam LI basta que v não seja combinação linear de v_1 e v_2. Ora,

$$\begin{aligned} v &= x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \Leftrightarrow v = (x + y) + (-y)\,t + yt^2 \\ &\Leftrightarrow \ a + bt + ct^2 = (x + y) + (-y)\,t + yt^2 \\ &\Leftrightarrow \ a = x + y, \quad b = -y \quad \text{e} \quad c = y. \qquad (\Rightarrow b = -c) \end{aligned}$$

Se $b \neq -c$, então o vetor v não é combinação linear de v_1 e v_2 e considerando $v = 1 + t + t^2$ o conjunto $\{v_1, v_2, v\}$ é uma base de $\mathbb{P}_2$, contendo os vetores v_1 e v_2.

18. Construa uma base do subespaço $\mathcal{M}_S$ das matrizes simétricas e mostre, usando Indução Finita, que $\dim \mathcal{M}_S = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Com o resultado, conclua que:

$$\dim \mathcal{M}_A = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

19. Recorde-se que $\dim V = n^2$ e o subespaço W_S, das matrizes simétricas, tem dimensão $\frac{1}{2}n(n+1)$.

    (a) No máximo $\frac{1}{2}n(n+1)$ **(b)** Não, porque $\dim V > \dim W_S$.

20. O conjunto

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$$

    não pode ser uma base do $\mathbb{R}^3$, porque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e o conjunto $\mathcal{B}$ tem 4 vetores.

21. O subespaço W_1 é o espaço solução do sistema $x+2y+z=0$, o qual tem grau de liberdade 2. Assim, $\dim W_1 = 2$ e o subespaço W_2 que procuramos deve ter dimensão 1. Com a construção usada no Exercício 13 da Seção Escrvendo para Aprender 5.6, temos que $\mathcal{B}_1 = \{(1,0,-1), (0,1,-2)\}$ é uma base de W_1 e acrescentando à $\mathcal{B}_1$ o vetor $v = (0,0,1)$ obtemos uma base do $\mathbb{R}^3$. Se $W_2 = \left[(0,0,1)\right]$ é o subespaço gerado pelo vetor v, então $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

22. Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ uma base de V e os subespaços: $W_1 = [v_1]$, $W_2 = [v_2]$ e $W_3 = [v_3]$.

23. Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, considere as matrizes $B = (b_{ij})_{n\times n}$ e $C = (c_{ij})_{n\times n}$, sendo:

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij}, \text{ se } i \neq j \text{ e } b_{ii} = 0, \quad i,j = 1,2,3,\ldots n. \\ c_{ij} &= 0, \text{ se } i \neq j \text{ e } c_{ii} = a_{ii}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots n. \end{aligned}$$

    Deduza que $B \in W_1$, $C \in W_2$ e $A = B + C$. Além disso, verifique que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Quanto à dimensão, note que $\dim W_2 = n$ e, portanto:

$$\dim W_1 = \dim \mathcal{M}_{n\times n} - \dim W_2 = n^2 - n.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.7

1. **(a)** $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ **(b)** $[v]_{\mathcal{B}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \bullet [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$.

2. **(a)** $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(b)** $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Por inversão, obtemos $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e, portanto, $[v]_{\mathcal{B}'} = [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \bullet [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. **(a)** Sendo $f = (1-t^2)^2$, então

$$f' = -4t + 4t^3, \quad f'' = -4 + 12t^2, \quad f''' = 24t \quad \text{e} \quad f^{(4)} = 24$$

e, portanto, $\mathcal{B}' = \{24, 24t, -4+12t^2, -4t+4t^3\}$. Tendo em vista que $\dim P_3 = 4$, é suficiente provar que $\mathcal{B}'$ é um conjunto com 4 vetores LI. De fato, considerando uma combinação linear nula dos vetores de $\mathcal{B}'$, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= 24x_1 + (24x_2)\,t + x_3\left(-4+12t^2\right) + x_4\left(-4t+4t^3\right) \\ &\Leftrightarrow (24x_1 - 4x_3) + (24x_2 - 4x_4)\,t + (12x_3)\,t^2 + (4x_4)\,t^3 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes a zero, encontramos $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

(b) Para chegar à matriz $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, de mudança da base $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$, iniciamos escrevendo cada vetor w_j da base $\mathcal{B}'$ como combinação linear dos vetores v_i da base $\mathcal{B}$, como na tabela.

$\mathcal{B}'$	combinação linear de $v_1,\ v_2,\ v_3$ e v_4	$\mathcal{B}$
$w_1 = 24$	$24 = 24 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$	$v_1 = 1$
$w_2 = 24t$	$24t = 0 \cdot v_1 + 24 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$	$v_2 = t$
$w_3 = -4 + 12t^2$	$-4 + 12t^2 = -4 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 12 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4$	$v_3 = t^2$
$w_4 = -4t + 4t^3$	$-4t + 4t^3 = 0 \cdot v_1 + -4 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 4 \cdot v_4$	$v_4 = t^3$

Assim, a matriz de mudança $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ é:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. O procedimento para construir a matriz $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ é: expressar cada vetor u_i da base $\mathcal{B}$ como combinação linear dos vetores v_j da base $\mathcal{B}'$; as colunas da matriz são precisamente os vetores coordenadas $[u_i]_{\mathcal{B}'}$. Fazendo $v_1 = (a,b)$ e $v_2 = (c,d)$ e observando a matriz $[I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, temos:

$$\begin{aligned} (1,0) &= 1 \cdot (a,b) + (-1) \cdot (c,d) \\ (0,1) &= 1 \cdot (a,b) + 2 \cdot (c,d) \end{aligned}$$

de onde resulta $a = 2/3,\ b = 1/3,\ c = -1/3$ e $d = 1/3$. Logo, $v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $v_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

6. O sistema (5.16) é:

$$\left| \begin{array}{ll} \overline{x} = x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta & \textbf{(I)} \\ \overline{y} = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta & \textbf{(II)} \end{array} \right.$$

(i) Multiplicamos **(I)** por $\cos\theta$ e **(II)** por $-\operatorname{sen}\theta$ e somamos membro a membro, para obter

$$\overline{x}\cos\theta - \overline{y}\operatorname{sen}\theta = x.$$

(ii) Multiplicamos **(I)** por $\operatorname{sen}\theta$ e **(II)** por $\cos\theta$, somamos membro a membro e obtemos

$$\overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta = y.$$

Daí resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

7. Não, porque a matriz A não é invertível. Note que $\det A = 0$.

8. $\mathcal{B}' = \{(-11, 18), (2, 12)\}$.

9. Veja que as entradas da matriz de mudança de base $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ abaixo da diagonal principal são nulas e, por esta razão, ela é triangular superior.

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

REVISANDO O CONTEÚDO

1. O conjunto $\{u + v + 2w, u + v, u - v - w\}$ é também LI. De fato, a equação vetorial

$$x \cdot (u + v + 2w) + y \cdot (u + v) + z \cdot (u - v - w) = \mathbf{0}$$

nos conduz à solução $x = y = z = 0$. Procedimento similar pode ser utilizado para testar se o conjunto $\{u + v - 3w, u + v, u + 3v - w\}$ é LI ou LD.

2. O vetor $v = (\pi, \pi)$ está em W, enquanto $\frac{1}{2}v = (\pi/2, \pi/2) \notin W$, já que $\cos(\pi/2 + \pi/2) = -1$. Para verificar que U não é um subespaço vetorial, considere o vetor $w = (\pi/2, \pi/2, 0)$ de U e note que $\frac{1}{2}w$ não pertence a U.

3. O conjunto $\mathcal{B} = \{1\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{F}$. O conjunto $\mathcal{B}' = \{1, i\}$ é uma base do espaço $\mathbb{C}$, quando considerado um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Olhando $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, uma base é $\mathcal{B} = \{1\}$.

4. É claro que cada vetor v_j, $j = 1, 2, \ldots k$, jaz no subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. Se W é qualquer subespaço de V contendo os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então as combinações lineares

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k$$

estão em W e, consequentemente, $[v_1, v_2, \ldots, v_k] \subset W$.

5. Se, por exemplo, $W_1 \subset W_2$, então $W_1 \cup W_2 = W_2$ e nada há a demonstrar. Por outro lado, suponha que $W_1 \cup W_2$ seja um subespaço e que nenhum deles esteja contido no outro. Escolha v_1 e v_2, de modo que

$$v_1 \in W_1 \backslash W_2 \quad \text{e} \quad v_2 \in W_2 \backslash W_1.$$

Note que $v_1, v_2 \in W_1 \cup W_2$ e, portanto, $v_1 + v_2 \in W_1 \cup W_2$. Ocorre que $v_1 + v_2 \notin W_1$ e $v_1 + v_2 \notin W_2$ e isso faz com que $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$.

6. Na forma escalonada, as matrizes geradoras têm posto igual a 2, com linhas não nulas iguais.

7. Mostremos que $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$ é uma base de $W_1 + W_2$.

   (a) Já sabemos que $\{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$ gera o subespaço $W_1 + W_2$. (veja o Exemplo 5.3.14)

   (b) Para mostrar que $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$ é um conjunto de vetores LI, suponha que

   $$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x \cdot u_1 + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 = \mathbf{0}.$$

   onde x_1, x_2, x, y_1 e y_2 são escalares. O vetor

   $$v = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x \cdot u_1 = -y_1 \cdot v_1 - y_2 \cdot v_2$$

   está em $W_1 \cap W_2$ e, portanto, existem escalares t_1 e t_2, tais que

   $$v = -y_1 \cdot v_1 - y_2 \cdot v_2 = t_1 \cdot w_1 + t_2 \cdot w_2$$

e, portanto:

$$y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + t_1 \cdot w_1 + t_2 \cdot w_2 = 0.$$

Como os vetores w_1, w_2, v_1, v_2 são LI, segue que $y_1 = y_2 = t_1 = t_2 = 0$ e, consequentemente, $v = \mathbf{0}$ e, assim, $x_1 = x_2 = x = 0$.

8. Considere os subespaços $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, com bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0), (0,1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \{(1,0,1), (0,1,-1)\},$$

respectivamente. Ressaltamos que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ e que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ não é uma base de $W_1 + W_2$.

9. Não. Considere no espaço $\mathbb{R}^3$ os subespaços $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x, x, 0) : x, \in \mathbb{R}\}$. Temos que:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$$

e, ainda assim, o espaço $\mathbb{R}^3$ não é soma (e muito menos soma direta) de W_1 e W_2. Note que $W_1 + W_2 = W_1$.

10. Se $W_1 = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ e $W_2 = [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n]$, então $\dim W_1 = k$ e $\dim W_2 = n - k$, de modo que $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$. Por outro lado, dado $v \in W_1 \cap W_2$, temos:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k = x_{k+1} v_{k+1} + x_{k+2} v_{k+2} + \ldots + x_n v_n$$

e daí resulta

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k - x_{k+1} v_{k+1} - x_{k+2} v_{k+2} - \ldots - x_n v_n = \mathbf{0}.$$

Logo, $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ e, portanto, $v = \mathbf{0}$. Assim, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e teremos $V = W_1 \oplus W_2$.

11. Note que W_1 e W_3 são planos e, portanto, de dimensão 2, enquanto W_2 é uma reta (o eixo z). Nenhum dos planos W_1 ou W_3 contém a reta W_2 e isto nos dá:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad W_3 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3.$$

Finalmente, a soma $W_1 + W_3 = \mathbb{R}^3$ não é direta, já que $W_1 \cap W_3 = [(1, -2, 1)]$ e, portanto, $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.

12. A partir da relação

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 9 - \dim(W_1 + W_2)$$

deduza que os possíveis valores de $\dim(W_1 \cap W_2)$ são 2, 3 ou 4.

13. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de W_1 e de W_2, e W_1 não está contido em W_2, deduzimos que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. Assim,

$$\dim(W_1 + W_2) = 3 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

e a soma é direta, já que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

14. O subespaço W é precisamente o espaço $\mathcal{P}_0$ dos polinômios constantes. Temos $\dim W = 1$ e uma base de W é, por exemplo, $\mathcal{B} = \{1\}$.

15. Um cálculo direto nos dá:

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Se $v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$, então

$$v_k = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{k-1} v_{k-1}$$

e daí resulta a combinação linear nula

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{k-1} v_{k-1} + (-1)\, v_k + 0 v_{k+1} + \cdots + 0 v_n = \mathbf{0},$$

onde o escalar $x_k = -1$ é não nulo. Isto mostra que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD. Reciprocamente, suponhamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sejam LD e seja k o primeiro índice para o qual se tem $x_k \neq 0$ e

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{k-1} v_{k-1} + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}.$$

Daí segue que $x_j = 0$, para $k + 1 \leq j \leq n$ e, portanto:

$$v_k = \frac{x_1}{x_k} v_1 + \frac{x_2}{x_k} v_2 + \ldots + \frac{x_{k-1}}{x_k} v_{k-1}.$$