Os objetos que serão considerados aqui são de duas naturezas:

- **ESCALAR:** (os números, que constituirão os *corpos numéricos*)
- **VETORIAL:** (os vetores, que constituirão os *espaços vetoriais*)

1.1 Corpos Numéricos

Por *corpo numérico*, ou simplesmente *corpo*, entendemos um conjunto $\mathbb{F}$ de números (reais ou complexos), o qual goza das seguintes propriedades:

(i) Os números 0 e 1 estão $\mathbb{F}$.

(ii) Se $x, y \in \mathbb{F}$, então $x + y$ e $x \cdot y$ pertencem a $\mathbb{F}$.

(iii) Se $x \in \mathbb{F}$, o simétrico $-x$ também pertence a $\mathbb{F}$.

(iv) Se $x \in \mathbb{F}$ e $x \neq 0$, então o inverso x^{-1} também está em $\mathbb{F}$.

É claro que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reias e o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos são corpos numéricos. Qual é o inverso do número complexo não nulo $x = a + ib$?

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Por que o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ não é um corpo? Seria o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros um corpo?

2. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um corpo. Seria o conjunto dos irracionais um corpo?

3. Verifique se o conjunto $\mathbb{F} = \left\{a + b\sqrt{2},\ a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ é um corpo.

4. Mostre que qualquer corpo numérico contém o corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. Por essa razão, diremos que $\mathbb{Q}$ é o *menor corpo numérico*.

5. Dados dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ com coeficientes em um corpo $\mathbb{F}$, o quociente $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ recebe o nome de *função racional*. Se $x \in \mathbb{F}$ e $p(x)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{F}$, mostre que $p(x) \in \mathbb{F}$. Dada uma função racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad b_m \neq 0,$$

mostre que se $x \in \mathbb{F}$ e $q(x) \neq 0$, então $f(x) \in \mathbb{F}$.

1.2 Espaços Vetoriais

Na construção do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, as seguintes propriedades são estabelecidas:

1. $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ **(comutativa)**
2. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ **(associativa)**
3. $x + (-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **(existência do simétrico)**
4. $0 + x = x + 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **(elemento neutro da soma)**
5. $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **(elemento neutro do produto)**
6. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ **(associativa)**
7. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ **(distributiva)**
8. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ **(distributiva)**

Fixemos um corpo $\mathbb{F}$ e consideremos um conjunto não vazio V, cujos elementos u, v, w, etc. denominaremos *vetores*. Para tornar o conjunto V um *espaço vetorial* sobre $\mathbb{F}$ é necessário definir uma soma $(+)$ entre os elementos (vetores) de V e um produto $(\bullet)$ dos escalares (números) de $\mathbb{F}$ pelos vetores de V, de modo que as propriedades análogas (1)-(8) sejam atendidas. Assim, temos duas operações

$$+ : \underset{(u,v)}{V \times V} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{u+v}{V} \qquad \bullet : \underset{(x,v)}{\mathbb{F} \times V} \underset{\longmapsto}{\longrightarrow} \underset{x \cdot v}{V}$$

com as seguintes propriedades válidas para u, v e w em V e x e y no corpo $\mathbb{F}$:

(EV1) $\quad u + v = v + u.$

(EV2) $(u+v)+w = u+(v+w)$.

(EV3) Existe em V um vetor $\mathbf{0}$, tal que $\mathbf{0}+u=u$. **(tal vetor 0 é único)**

(EV4) Dado u em V, existe um único vetor $-u$ em V, tal que $u+(-u)=\mathbf{0}$. $\boldsymbol{(-u=(-1)\cdot u)}$

(EV5) $1 \bullet u = u$.

(EV6) $x \bullet (y \bullet u) = (x \bullet y) \bullet u$.

(EV7) $x \bullet (u+v) = x \bullet u + x \bullet v$.

(EV8) $(x+y) \bullet u = x \bullet u + y \bullet u$.

É claro que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Aliás, qualquer corpo numérico $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos com as operações

SOMA: $(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

PRODUTO: $x \cdot (a+ib) = (xa)+i(xb), \quad x \in \mathbb{R}$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e, também, sobre $\mathbb{C}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ considere as operações usuais:

$$(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y') \quad e \quad \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Mostre que $\mathbb{R}^2$, com essas operações, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De forma similar, mostra-se que o produto cartesiano $V_1 \times V_2$ de dois espaços vetoriais, com as operações usuais

$$(u_1,u_2)+(v_1,v_2) = (u_1+v_1, u_2+v_2) \quad \text{e} \quad \lambda(u_1,u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2), \qquad \lambda \in \mathbb{F},$$

   é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$.

2. Generalize o exercício precedente, considerando o conjunto $\mathbb{R}^n$ constituído das *n-uplas* ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais, com as operações usuais

$$\begin{aligned} (x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) &= (x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \quad \text{e} \\ \lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3. Seja $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, com as operações usuais do $\mathbb{R}^2$. É o conjunto V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

4. Com relação às operações $(x,y)+(x',y')=(x+x',yy')$ e $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$, seria o $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

5. Seria o corpo $\mathbb{Q}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? E o corpo $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$?

6. Em um espaço vetorial V, mostre que:

   (a) $-(-v)=v$ **(b)** se $u+v=u+w$, então $v=w$.

7. Dados u e v em um espaço vetorial V, mostre que existe um único w em V, tal que $u+w=v$.

1.3 O Espaço Vetorial $\mathcal{M}_{m\times n}$

Uma matriz real A de ordem $m\times n$ (lê-se "m por n") é uma coleção de $m\times n$ números reais a_{ij} dispostos em uma tabela com m linhas e n colunas, representada simbolicamente por $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ou $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, onde os índices i e j são inteiros positivos, $1\le i\le m,\ 1\le j\le n$, que determinam a posição do *elemento* (ou *entrada*) a_{ij} na tabela. O conjunto de todas as matrizes reais $m\times n$, representado por $\mathcal{M}_{m\times n}$, será equipado com as operações usuais:

$$\text{SOMA:}\qquad (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\text{PRODUTO:}\qquad x\bullet(a_{ij})_{m\times n}=(x\cdot a_{ij})_{m\times n}\,.$$

Com essas operações $\mathcal{M}_{m\times n}$ é um espaço vetorial, cujos elementos (vetores) são matrizes $m\times n$ e o elemento neutro da soma é a *matriz nula* $m\times n$, com todas as entradas iguais a zero

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n}$$

A i-ésima linha L_i e a j-ésima coluna C_j da matriz A são

$$L_i=\begin{pmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\ldots&a_{in}\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad C_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$$

e podem ser visualizados como vetores do $\mathbb{R}^n$ (n-upla) e do $\mathbb{R}^m$ (m-upla), respectivamente.

EXEMPLO Como ilustração, deixe-nos considerar o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2, isto é:

$$\mathcal{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

equipado com as operaçõs usuais:

SOMA: $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

PRODUTO: $$x \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb \\ xc & xd \end{pmatrix}.$$

Comprove as propriedades **(EV1)**-**(EV8)**, considerando que o vetor nulo do $\mathcal{M}_{2\times 2}$ é

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXEMPLO No espaço $\mathcal{M}_{2\times 3}$, das matrizes reais com 2 linhas e 3 colunas, se A, B e C são os vetores (matrizes 2×3)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então $A - 3B + 2C$ é o vetor de $\mathcal{M}_{2\times 3}$, dado por:

$$A - 3B + 2C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.3.1 Outras Operações com Matrizes

► PRODUTO MATRICIAL

Além das operações usuais de soma e produto por escalar, em certos casos pode-se efetuar o produto entre matrizes. Matrizes de mesma ordem sempre podem ser somadas, mas, nem sempre podem ser multiplicadas. Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$ duas matrizes de ordem $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. O produto da matriz A pela matriz B é a matriz AB de ordem $m \times p$, cuja entrada c_{ik}, que ocupa a posição (i, k), é

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots p.$$

O elemento c_{ik} da matriz AB é obtido efetuando o "produto" da i-ésima linha da matriz A pela j-ésima coluna da matriz B, como ilustra o esquema abaixo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ik} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

É oportuno ressaltar que o produto AB só é possível quando o número de colunas (n) da matriz A for igual ao número de linhas (n) da matriz B. Às vêzes o produto AB é possível e o produto BA não. Quando as matrizes A e B forem quadradas (o número de linhas igual ao número de colunas) e de mesma ordem, os produtos AB e BA são possíveis, mas, não necessariamente iguais.

PROPRIEDADES DO PRODUTO MATRICIAL Admitindo que os produtos envolvidos sejam possíveis, temos as seguintes propriedades:

(P1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$

(P2) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$

(P3) $\lambda (A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B), \quad \lambda \in \mathbb{F}.$

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Calcule o produto AB, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   O produto BA é possível, nesse caso? Por quê? Dê exemplo de duas matrizes quadradas A e B, de ordem 2×2, tais que $AB \neq BA$.

2. **MATRIZ TRANSPOSTA** Dada uma $m \times n$ matriz $A = (a_{ij})$, denomina-se *transposta* de A à matriz A^t, de ordem $n \times m$, definida por $A^t = (a_{ji})$. Do ponto de vista prático, para determinar

a transposta de uma dada matriz, permutamos linhas e colunas da matriz. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}.$$

Em cada caso, encontre a matriz transposta:

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

3. Se A e B são matrizes de mesma ordem e x é um escalar, mostre que $(xA+B)^t = xA^t + B^t$. Se A e B são matrizes quadradas 2×2, mostre que $(AB)^t = B^tA^t$.

4. **O TRAÇO DE UMA MATRIZ** Dada uma quadrada $A = (a_{ij})_{m\times m}$ o *traço* da matriz A, representado por $\operatorname{tr}(A)$, é definido por $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$. Em outras palavras, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m} \Longrightarrow \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots a_{mm}.$$

Determine o traço das matrizes B e C do Exercício 1.2.

5. Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e x é um escalar, mostre que:

(a) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$ **(b)** $\operatorname{tr}(xA) = x\operatorname{tr}(A)$

(c) $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(A^t\right)$ **(d)** $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. **(faça no caso 2×2)**

6. **MATRIZ SIMÉTRICA & ANTISSIMÉTRICA** Uma matriz quadrada A denomina-se *simétrica* quando $A = A^t$. Se $A = -A^t$, diremos que a matriz A é *antissimétrica*. Mostre que a matriz $\frac{1}{2}\left(A + A^t\right)$ é simétrica e $\frac{1}{2}\left(A - A^t\right)$ é antissimétrica. Conclua que toda matriz quadrada se escreve como soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica. Qual a matriz que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica?

7. MATRIZ IDENTIDADE A matriz quadrada $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

em que os elementos diagonais são iguais a 1 e os demais são nulos, recebe o nome de *matriz identidade* de ordem n.

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, mostre que $AI_n = I_nA = A$.

(b) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine uma matriz quadrada B de ordem $n = 2$, tal que $AB = BA = I_2$. Tal matriz B é única, denomina-se *inversa* de A e anota-se $B = A^{-1}$.

8. MATRIZ NILPOTENTE Uma matriz quadrada A, não nula, diz-se *Nilpotente* quando existir um inteiro positivo k, denominado *índice de nilpotência*, tal que $A^k = \mathbf{0}$.

(a) Construa duas matrizes nilpotentes de ordem 2×2.

(b) Se k é o índice de nilpotência da matriz A, mostre que a matriz transposta A^t também é nilpotente, com índice k.

(c) Seja A uma matriz 2×2, simétrica, com índice de nilpotência $k = 2$. Mostre que $A = \mathbf{0}$.

► REDUÇÃO À FORMA ESCALONADA

Consideremos a matriz 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e efetuemos nas linhas de A as seguintes operações, sempre observando a matriz resultante:

(i) Permutar a linha L_1 com a linha L_3 $(L_1 \leftrightarrow L_3)$.

(ii) Permutar a linha L_2 com a linha L_3 $(L_2 \leftrightarrow L_3)$.

(iii) Multiplicar L_1 por -1 $(L_1 \leftrightarrow -L_1)$.

(iv) Multiplicar L_2 por $\frac{1}{2}$ $\quad(L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que a matriz final tem o formato escada e, por isso, diremos que a matriz A foi reduzida à forma *escalonada*. Neste processo, as operações permitidas nas linhas da matriz são:

- Permutar duas linhas. $\qquad (L_i \leftrightarrow L_k)$.
- Multiplicar uma linha por uma constante $\lambda \neq 0$. $\qquad (L_i \leftrightarrow \lambda L_i)$
- Adicionar a uma linha um múltiplo escalar de outra. $\qquad (L_i \leftrightarrow L_i + \lambda L_k)$

Para reconhecer uma matriz na forma escalonada, veja se ela atende aos seguintes requisitos:

(a) As linhas nulas, caso exista alguma, ocorrem abaixo das linhas não nulas.

(b) O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é igual a 1. Este é o elemento *pivô*.

(c) Uma coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(d) Se $L_1, L_2, \dots L_p$ são as linhas não nulas da matriz e o primeiro elemento não nulo da linha L_i ocorre na coluna de ordem k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots k_p$.

A condição (d) impõe à matriz o formato *escada*; ela nos diz que o número de zeros precedendo o elemento pivô de uma linha aumenta linha após linha; ressaltamos que a matriz identidade I_n já está na forma escalonada. Das matrizes abaixo, apenas a matriz C está escalonada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO Ao reduzir a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

à forma escalonada, encontramos a seguinte matriz equivalente:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

OBSERVAÇÃO Ao reduzir uma matriz A à forma escolonada, surge um novo *ente matemático*, denominado *posto da matriz* A e representado por $p(A)$, que é precisamente o número de linhas não nulas da matriz reduzida. Qual o posto da matriz identidade $n \times n$? Qual a importância de conhecermos o posto de uma matriz? Veja a discussão a seguir sobre a resolução de sistemas lineares e tire suas conclusões.

► INVERTENDO MATRIZES

Uma classe importante de matrizes quadradas é a das *matrizes invertíveis*. Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, ou tem inversa, quando existir uma matriz quadrada B, de mesma ordem, tal que $AB = BA = I_n$. Tal matriz B, quando existir, é única e é representada por A^{-1}. As matrizes invertíveis são precisamente aquelas com determinante não nulo e podemos usar o escalonamento para encontrar a inversa A^{-1}. O processo consiste em escalonar a matriz ampliada $\left[A, I_n\right]$ para chegar à matriz $\left[I_n, A^{-1}\right]$.

EXEMPLO Como ilustração vamos inverter a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz ampliada $\left[A, I_3\right]$, encontramos

$$\left[A, I_3\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left[I_3, A^{-1}\right].$$

Logo, a inversa da matriz A é a matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e pode-se fazer a comprovação verificando que $AA^{-1} = I_3$.

1.4 Resolvendo Sistemas Lineares

Consideremos o sistema linear de m equações e n variáveis

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{1.1}$$

Associadas ao sistema (1.1) destacamos as seguintes matrizes:

(i) a *matriz dos coeficientes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$;

(ii) a *matriz das variáveis* $X = (x_j)_{n\times 1}$;

(iii) a *matriz independente* $B = (b_i)_{m\times 1}$;

(iv) a *matriz ampliada* $\widetilde{A} = [A, B]$ de ordem $m \times (n+1)$, dada por

$$\Big[A, \boxed{\text{B}}\Big] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Com a notação matricial, o sistema se escreve sob a forma $AX = B$ e quando escalonamos a matriz A encontramos um novo sistema, equivalente ao sistema original (1.1), com as mesmas soluções.

► USANDO O POSTO DA MATRIZ

Usaremos o posto das matrizes A e $\widetilde{A}$ para determinar a existência ou não de soluções do sistema (1.1). Neste contexto, temos o seguinte resultado:

1. O sistema linear (1.1) admite solução se, e somente se, as matrizes A e $\widetilde{A}$ têm o mesmo posto. (recorde-se que o posto $p(A)$ de uma matriz A é o número de linhas não nulas da matriz reduzida escalonada)

2. Se $p(A) = p(\widetilde{A}) = n$, então a solução de (1.1) é única.

3. Se $p(A) = p(\widetilde{A}) = p < n$, então o sistema (1.1) tem uma infinidade de soluções e o grau de liberdade é $n - p$. Neste caso, podemos escolher $n - p$ variáveis (livres) e expressar as outras p variáveis em função destas.

EXEMPLO Como primeiro exemplo, vamos considerar o seguinte sistema:

$$\left| \begin{aligned} x - y &= 0 \\ x + y - 2z &= 2 \end{aligned} \right.$$

com duas equações ($m = 2$) e três variáveis ($n = 3$). Escalonando a matriz ampliada do sistema, encontramos

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow -L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e vemos que $p(A) = p(\widetilde{A}) = 2$, de onde concluímos que o sistema tem uma infinidade de soluções e grau de liberdade igual 1. Escolhendo x como variável livre, obtemos $y = x$ e $z = x - 1$; ao atribuirmos um valor à x, digamos $x = \lambda$, obtemos $y = \lambda$ e $z = 1 - \lambda$.

EXEMPLO Escalonando a matriz ampliada do sistema

$$\left| \begin{aligned} & x - y + z + t = 1 \\ & x + y + 2z - t = 0 \\ & 2x + y - z + 2t = -1 \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

encontramos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1/2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -9/2 & 3 & -3/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

e vemos que $p(A) = p(\widetilde{A}) = 3$ e, sendo o número de variáveis $n = 4$, deduzimos que o sistema tem uma infinidade de soluções e grau de liberdade igual a 1. O sistema (1.2) é equivalente ao *sistema escalonado*

$$\left| \begin{array}{l} x + t = 0 \\ y - \frac{2}{3}t = -\frac{2}{3} \\ z - \frac{2}{3}t = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Escolhendo t como variável livre, obtemos $x = -t,\ y = \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}$ e $z = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}$ e a cada valor atribuído à t obtemos uma solução do sistema.

OBSERVAÇÃO Como as matrizes A e $\widetilde{A}$ têm m linhas, deduzimos que $p(A) \le p(\widetilde{A}) \le m$ e, caso o número de variáveis n seja maior do que o número de equações, então ou o sistema não tem solução ou ele tem uma infinidade de soluções.

▶ SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Um caso particular interessante ocorre quando a matriz independente B for zero (a matriz nula $m \times 1$). Neste caso, $X = \mathbf{0}$ é uma solução e o conjunto $\mathcal{S}$ de todas as soluções do sistema tem a seguinte propriedade: se X_1 e X_2 são soluções do sistema e λ é um escalar (número real), então $\lambda \cdot X_1 + X_2$ também é solução. De fato, sendo X_1 e X_2 soluções de $AX = \mathbf{0}$, então $AX_1 = AX_2 = \mathbf{0}$ e, sendo assim,

$$A(\lambda \cdot X_1 + X_2) = \lambda \cdot (AX_1) + AX_2 = \lambda \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Logo, $\lambda \cdot X_1 + X_2 \in \mathcal{S}$, isto é, $\lambda \cdot X_1 + X_2$ é solução. Neste caso, se $p(A) = p(\widetilde{A}) = n$, então a única solução do sistema é $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Consequentemente, se as linhas da matriz A são n vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ do $\mathbb{R}^n$ e o posto de A é igual a n, então os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI.

1.5 Subespaços Vetoriais

Pode ocorrer de um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V, com as operações herdadas de V, ser, também, um espaço vetorial. Neste caso, diremos que W é um *subespaço vetorial* de V. É claro que $W = \{\mathbf{0}\}$ e $W = V$ são subespaços vetoriais de V (os *subespaços triviais* de V). Para verificar se um dado subconjunto W de V é um subespaço vetorial, usaremos a seguinte caracterização: W é um subespaço vetorial de V se, e somente se:

(i) O vetor nulo de V está em W. **($\mathbf{0} \in W$ e, portanto, W não é vazio)**

(ii) Se u e v são vetores de W, então $u + v$ está em W.

(iii) Se u está em W e λ é um escalar, então $\lambda \cdot u$ está em W.

ATALHO A fim de que um subconjunto W de V, não vazio, seja um subespaço vetorial de V é necessário e suficiente que $\lambda u + v$ esteja em W, sejam quais forem os vetores u e v de W e o escalar λ.

EXEMPLO O conjunto $W = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. **(W é o eixo x)**

EXEMPLO O conjunto $W = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ contém o vetor nulo $\mathbf{0} = (0, 0)$, mas, não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. De fato, os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (2, 4)$ pertencem a W e, contudo, a soma $u+v = (3, 5)$ não pertence a W.

EXEMPLO O conjunto das soluções do sistema linear homogêneo $AX = \mathbf{0}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^n$. Este fato ficou estabelecido no final da Seção 1.4.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Por que o subconjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$ não é um subespaço vetorial?

2. Mostre que o conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$ é um subspaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. Observe que W é uma reta que passa pela origem (passar pela origem significa $0 \in W$). Na verdade, os subespaços do $\mathbb{R}^2$ são precisamente $W = \{0\}$, $W = \mathbb{R}^2$ e as retas que passam pela origem. Descreva todos os subespaços do $\mathbb{R}^3$.

3. Mostre $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

4. Seria $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$? Por quê?

5. **OPERAÇÕES COM SUBESPAÇOS** Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, mostre que:

   (a) A interseção $W_1 \cap W_2$ é um subespaço vetorial de V.

   (b) A soma $W_1 + W_2 = \{u + v : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de V.

   (c) O produto $W_1 \times W_2 = \{(u, v) : u \in W_1 \text{ e } v \in W_2\}$ é um subespaço vetorial de $V \times V$.

   (d) Mostre, com um exemplo, que a união $W_1 \cup W_2$ pode não ser um subespaço vetorial de V.

6. Mostre que $W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n} : \operatorname{tr}(A) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

7. Seja $W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \det A = 0\}$. Construa dois vetores A e B de W tais que $A + B \notin W$. É o conjunto W um subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$?

8. Seja W o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ dado por $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & x+2y \\ 0 & x-y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$. Qual dos vetores $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ pertence a W?

9. Mostre que $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)(y-1) = 1\right\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.

10. Mostre que $W = \{p \in \mathbb{P}_3 : p(0) = 2p(1)\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{P}_3$.

1.6 Subespaço Gerado

Fixemos um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dados os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de V, a expressão

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n,$$

onde os coeficientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estão no corpo $\mathbb{F}$, recebe o nome de *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$. O conjunto de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ será representado por $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$, isto é,

$$[v_1, v_2, \ldots, v_n] = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \quad x_i \in \mathbb{F}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n \right\}.$$

OBSERVAÇÃO Em sala de aula demonstrou-se que o conjunto $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ é de fato um subespaço vetorial de V, denominado *subespaço gerado* por $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

EXEMPLO É claro que os vetores $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ geram o $\mathbb{R}^3$. Já o conjunto $S = \{1, t, t^2, t^3, \ldots, t^n\}$ gera o espaço $\mathbb{P}_n$ dos polinômios de grau $\leq n$.

EXEMPLO O subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ gerado pelos vetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o subespaço das matrizes diagonais 2×2. (uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ denomina-se *matriz diagonal* quando $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.)

EXEMPLO Se W_1 e W_2 são subespaços de V, gerados respectivamente por $S_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ e $S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, então o subespaço $W_1 + W_2$ é gerado por $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. De fato, dado $w = u + v$ em $W_1 + W_2$ temos que:

$$\left| \begin{array}{l} u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_m u_m \\ v = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_k v_k \end{array} \right.$$

e, por conseguinte:

$$w = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_m u_m + y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots + y_k v_k.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Expresse o vetor $v = (1, 1, 2, -1)$ como combinação linear dos vetores

$$v_1 = (1,0,0,0), \ v_2 = (0,1,1,0), \ v_3 = (0,0,1,0) \ \text{ e } v_4 = (1,0,0,1).$$

2. Identifique o subespaço W de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Identifique o subespaço W do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto:

$$S = \{(1,0,0), \ (1,0,1)\}.$$

4. Encontre um conjunto gerador do subespaço:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

5. Repita o exercício precedente com o seguinte subespaço do $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z - t = 0\}.$$

6. Verifique que os vetores $1,\ 1-t,\ (1-t)^2$ e $(1-t)^3$ geram o espaço $\mathbb{P}_3$.

7. Seja W o subespaço de $\mathcal{M}_{3\times 2}$ gerado pelos vetores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique se o vetor $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ pertence ou não ao subespaço W.

8. Identifique o subespaço do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,2,1)$.

9. Se o conjunto $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ gera um espaço vetorial V e um dos vetores de S, digamos v_1, é combinação linear dos demais, mostre que $\{v_2, \ldots, v_k\}$ ainda gera o espaço V. É este o processo usado quando desejamos construir um conjunto gerador *minimal*.

10. Seja $W = [v_1, v_2, v_3]$ o subespaço do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores:

$$v_1 = (2,1,0), \quad v_2 = (-1,0,1) \quad \text{e} \quad v_3 = (1,1,1).$$

(a) Determine o valor de λ para que o vetor $v = (\lambda, 2, -2\lambda)$ pertença à W.

(b) O vetor $v = (-1, 2, -2)$ jaz no subespaço W?

11. Verifique que:

$$[(-1,1,1), (0,,1,-1), (2,-1,3)] = [(2,0,-4), (0,2,-2)].$$

1.7 Base & Dimensão

Recordemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de um espaço vetorial V, são LD (linearmente dependentes) quando existirem escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$, não todos nulos, tais que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}. \tag{1.3}$$

Quando $v_1, v_2, \ldots, v_n$ não forem LD, eles serão denominados LI (linearmente independentes). Neste caso, toda equação vetorial do tipo (1.3) possui apenas a solução nula $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

EXEMPLO Qualquer conjunto de vetores que contiver o vetor nulo é um conjunto LD. De fato, se $S = \{\mathbf{0}, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ temos a equação (1.3) atendida

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n = \mathbf{0},$$

com um dos escalares (o número 1) não nulo.

EXEMPLO No espaço $\mathbb{R}^n$, para que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sejam LI é necessário e suficiente que a $n \times n$ matriz A com colunas $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ tenha posto $p(A) = n$.

► **SOBRE BASE & DIMENSÃO** Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de vetores LI, que geram o espaço V, é denominado *Base* de V. Neste caso, todo vetor de V se expressa, de maneira única, como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots v_n$. Para associar ao espaço vetorial V uma dimensão, ressaltamos que qualquer base do espaço V tem o mesmo número de vetores e esse número é o que denominamos *dimensão* do espaço V. Por exemplo,

$$\dim \mathbb{R}^n = n, \quad \dim \mathcal{M}_{m\times n} = mn, \quad \dim \mathbb{P}_4 = 5.$$

O único espaço vetorial que tem dimensão zero é o espaço nulo $V = \{\mathbf{0}\}$. Se $\dim V = n$, então qualquer subespaço W de V tem dimensão $\leq n$ (caso $\dim W = \dim V$, então $W = V$). As demonstrações dos seguintes resultados sobre base e dimensão podem ser encontradas na vasta literatura sobre o assunto.

(i) Em um espaço vetorial V de dimensão n, um conjunto com n vetores LI é uma base de V.

(ii) Se $\dim V = n$, qualquer subconjunto de V com $n+1$ vetores é um conjunto LD. Isso nos diz que uma base de V é um conjunto LI *maximal*.

(iii) Um conjunto de geradores de um espaço vetorial de dimensão n contém no mínimo n vetores.

(iv) Se $\dim V = n$, qualquer conjunto gerador com exatamente n vetores é uma base de V.

(v) Se $\dim V = n$, qualquer conjunto com k vetores LI, $k < n$, pode ser completado com $n-k$ vetores até formar uma base de V.

(vi) Se $\dim V = n$, de um conjunto de geradores podemos sempre extrair uma base para V.

EXEMPLO Os vetores $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (1,-2,1,1)$ e $v_3 = (2,-1,1,1)$ não geram o espaço $\mathbb{R}^4$, embora sejam LI. Um conjunto de geradores do $\mathbb{R}^4$ deve conter, no mínimo, quatro vetores, porque $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Mostre que os vetores $v = (a,b)$ e $w = (c,d)$ do $\mathbb{R}^2$ são LI se, e somente se, $ad - bc \neq 0$.

2. Em um espaço vetorial V, mostre que dois vetores são LD se, e somente se, um deles é múltiplo escalar do outro.

3. No espaço $\mathcal{F}$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mostre que os seguintes pares de funções são LI:

   (a) $1,\ t$ **(b)** $\operatorname{sen} t,\ \cos t$ **(c)** $t,\ e^t$ **(d)** $t,\ t^3$.

4. Se $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, mostre que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$ são LD, seja qual for o vetor v do espaço V.

5. Em cada caso, exiba uma base para o espaço vetorial V indicado e determine $\dim V$.

   (a) $V = \mathcal{M}_{2\times 3}$ (espaço das matrizes 2×3)

   (b) V é o espaço das matrizes $n \times n$, triangular superior (uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é *triangular superior* quando $a_{ij} = 0$, se $i < j$).

   (c) V é o espaço das matrizes simétricas 2×2.

   (d) V é o espaço das matrizes antissimétricas 3×3.

   (e) V é o espaço das matrizes diagonais $n \times n$.

   (f) V é o espaço das matrizes $A = (a_{ij})$, de ordem 2×2, tais que $a_{11} = a_{21}$ e $a_{12} = a_{11} + a_{22}$.

6. No espaço vetorial $\mathbb{P}_2 = \left\{at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ dos polinômiios de grau ≤ 2, verifique se os vetores são LI ou LD.

   (a) $p_1(t) = 1 + 2t + t^2$, $p_2(t) = 2 + 4t + 2t^2$.

   (b) $p_1(t) = t + t^2$, $p_2(t) = 2$ e $p_3(t) = 1 + 2t^2$.

   (c) $p_1(t) = 1 + t$, $p_2(t) = 2 + t$ e $p_3(t) = 2t^2$.

7. Mostre que $\beta = \{(0,2,2), (0,4,1)\}$ é uma base do subespaço $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$.

8. Se $\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ e $\beta_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ são bases de V_1 e V_2, respectivamente, mostre que
$$\beta = \{(v_1,0), (v_2,0), \ldots, (v_k,0), (0,w_1), (0,w_2), \ldots, (0,w_n)\}$$
é uma base do espaço $V = V_1 \times V_2$. Em particular, deduza que $\dim(V_1 \times V_2) = k + n$.

9. BASE DO SUBESPAÇO GERADO Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, deixe-nos representar por $A_{\mathcal{E}}$ a matriz reduzida de A por escalonamento. Cada linha da matriz A é combinação linear das linhas da matriz escalonada A_E e vice-versa. Assim, os subespaços gerados pelas linhas de A e pelas linhas (não nulas) de $A_{\mathcal{E}}$ coincidem. Também nos parece óbvio que as linhas não nulas da matriz escalonada A_E são vetores LI do $\mathbb{R}^n$. Isso nos conduz à seguinte conclusão: a dimensão do subespaço do $\mathbb{R}^n$ gerado pelas linhas da matriz A é igual a $p(A)$, o posto da matriz A, e as linhas não nulas da matriz reduzida A_E formam uma base do subespaço gerado. Recorde-se que $p(A)$ é o número de linhas não nulas da matriz escalonada $A_{\mathcal{E}}$. Determine a dimensão do subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto de vetores:
$$S = \{(1,0,2),\ (0,-1,2),\ (2,1,1),\ (2,2,2)\}.$$

10. Seja $W = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores:
$$v_1 = (1,-1,0,0),\ v_2 = (0,0,1,1),\ v_3 = (-2,2,1,1) \quad \text{e} \quad v_4 = (1,0,0,0).$$
(a) O vetor $v = (2,-3,2,2)$ está em W?
(b) Exiba uma base do subespaço W.
(c) $W = \mathbb{R}^4$ ou W é um subespaço próprio do $\mathbb{R}^4$?

11. Encontre uma base para o subespaço W de $\mathcal{M}_{2\times 2}$, gerado pelos vetores:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Verifique se os vetores
$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (1,2,3,2),\ v_3 = (2,5,6,4) \quad \text{e} \quad v_4 = (2,6,8,5)$$
formam uma base do $\mathbb{R}^4$. Se não, encontre a dimensão e uma base do subespaço gerado por eles.

13. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = [(1,0,1),(0,1,1)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1,1,0),(0,0,1)].$$

Encontre uma base para: W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$.

14. **BASE DO ESPAÇO SOLUÇÃO** Se W é o espaço solução do sistema linear homogêneo $AX = \mathbf{0}$, então $\dim W = n - p(A)$, onde n é o número de variáveis e $p(A)$ é o posto da matriz A. Na forma escalonada, o sistema $AX = \mathbf{0}$ tem exatamente $n - p(A)$ variáveis livres e os vetores básicos são construídos atribuindo um valor constante (por exemplo 1) a cada variável livre e valor zero às demais. As variáveis dependentes são calculadas a partir do sistema. Por exemplo, o subespaço W do $\mathbb{R}^4$ dado por

$$W = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = x - y - z + t = z - t = 0\right\}$$

é o espaço solução do sistema linear com 4 variáveis e 3 equações:

$$\left|\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ z - t = 0. \end{array}\right. \tag{1.4}$$

Escalonado a matriz A dos coeficientes, encontramos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e vemos que $p(A) = 2$ e o grau de liberdade é 2. Assim, $\dim W = 2$ e a partir das variáveis livres x e z vamos construir uma base de W considerando os valores $x = 1,\ z = 0$ e, depois, $x = 0,\ z = 1$ (os valores de y e t são calculados pelo sistema (1.4)). Encontramos os vetores básicos $v_1 = (1,0,1,0)$ e $v_2 = (0,1,0,1)$. Em cada caso, encontre uma base para o espaço das soluções dos sistemas lineares. Reduza a matriz dos coeficientes à forma escalonada.

(a) $\left|\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{array}\right.$ **(b)** $\left|\begin{array}{l} x + 2y - 4z + 3r - s = 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s = 0 \end{array}\right.$ **(c)** $\left|\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{array}\right.$

15. Sejam W_1 e W_2 os subespaços do $\mathbb{R}^3$ dados por

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Calcule $\dim(W_1 \cap W_2)$ e $\dim(W_1 + W_2)$.

(b) O conjunto $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$? Se for, qual a dimensão?

16. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - t = 0\right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\right\}.$$

Determine bases dos subespaços W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e $W_1 + W_2$. É correto afirmar que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?

17. No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, considere os subespaços

$$W_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{e} \quad W_2 = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Determine bases de W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ e de $W_1 + W_2$.

(b) Exiba um vetor do espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, que não pertença a $W_1 + W_2$.

18. Seja $W = [v_1, v_2, v_3]$ o subespaço de $\mathbb{P}_2$, gerado pelos vetores

$$v_1 = 1, \; v_2 = 1 - t + t^2 \quad \text{e} \quad v_3 = 1 - 2t + 2t^2.$$

(a) Os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI ou LD?

(b) Determine uma base e a dimensão de W.

(c) Construa uma base de $\mathbb{P}_2$, da qual façam parte os vetores v_1 e v_2.

19. Seja $V = M_{n\times n}$, $n \geq 2$, o espaço vetorial das matrizes reais $n \times n$.

(a) Quantos vetores (matrizes) simétricas LI um subconjunto de V pode ter?

(b) É possível uma base de V ser construída a partir de um subconjunto de V, de matrizes simétricas?

20. EXTRAINDO UMA BASE DE UM CONJUNTO GERADOR O processo de escalonamento pode ser usado para extrair uma base de um conjunto gerador de um subespaço W do $\mathbb{R}^n$. Para descrever o método, deixe-nos representar por W o subespaço do $\mathbb{R}^n$, gerado pelos vetores

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

e seja A a $n \times k$ matriz, cuja j-ésima coluna é o vetor v_j, $1 \le j \le k$. Se $j_1, j_2, \ldots, j_m$ são as colunas da matriz $A_{\mathcal{E}}$, reduzida de A à forma escalonada, contendo os primeiros elementos não nulos, das linhas não nulas (os elementos *pivôs*), então o conjunto

$$\{v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_m}\}$$

é uma base de W, extraída do conjunto gerador $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Como ilustração, deixe-nos considerar o subespaço W do $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores:

$$v_1 = (1, -1, 1, 0)\,, \ v_2 = (-1, 3, 1, 2)\,, \ v_3 = (0, 1, 1, 1) \text{ e } v_4 = (-1, 2, 0, 1)$$

e seja A a matriz 4×4, com colunas v_1, v_2, v_3 e v_4. Escalonando a matriz A, encontramos:

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde vemos que as colunas-pivô são: $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ e $j_3 = 4$ (primeira, segunda e quarta colunas). Assim, os vetores geradores v_1, v_2 e v_4 formam uma base de W.

1.8 Soma Direta

No Exercício 1.3E, demonstrou-se que a interseção e a soma de dois subespaços W_1 e W_2 de um dado espaço vetorial V são, também, subespaços vetoriais de V. A soma $W_1 + W_2$ pode coincidir com o espaço inteiro V, mas, pode ser um subespaço próprio de V; quanto à interseção $W_1 \cap W_2$, esta pode se reduzir ao vetor nulo ou pode ter dimensão maior do que zero. Por exemplo, se W_1 é o eixo x e W_2 é o eixo y, então $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ e $W_1 \cap W_2 = \{(0,0)\}$. Quando $V = W_1 + W_2$ e, além disso, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, diremos que V é *soma direta* de W_1 e W_2 e anotamos $V = W_1 \oplus W_2$.

EXEMPLO Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^2$:

$$W_1 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$$

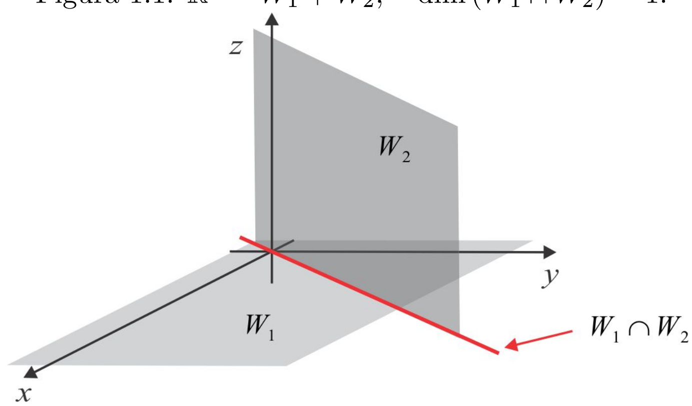
(W_1 é o eixo x e W_2 é o eixo y). É claro que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e como $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ segue que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$ e soma é direta. Assim, $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

EXEMPLO Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\} .$$

Temos que W_1 é o plano xy e W_2 é o plano $x = y$, ilustrados na Figura 1.1, e a interseção $W_1 \cap W_2$ é a reta do $\mathbb{R}^3$ gerada pelo vetor $v = (1, 1, 0)$, isto é, $W_1 \cap W_2 = [(1, 1, 0)]$. Neste caso, $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$, mas, a soma não é direta, porque $W_1 \cap W_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$.

Figura 1.1: $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2, \quad \dim (W_1 \cap W_2) = 1.$



ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Encontre dois subespaços W_1 e W_2 do $\mathbb{R}^3$, tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

2. **DECOMPONDO O ESPAÇO DE MATRIZES** Decomponha o espaço das matrizes reais $\mathcal{M}_{2\times 2}$ como soma direta de dois subespaços não nulos W_1 e W_2. **(veja o Exercício 6 da Seção1.3)**

3. **DECOMPONDO O ESPAÇO DE FUNÇÕES** Uma função $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ denomina-se *função par* quando $f (x) = f (-x)$, seja qual for o x do intervalo $[-a, a]$. Quando ocorrer $f (x) = -f (-x)$, para todo x do intervalo $[-a, a]$, a função f denominar-se-á *função ímpar*. Seja $\mathcal{F} ([-a, a])$ o espaço de todas as funções reais $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

(a) Mostre que o conjunto das funções pares $\mathcal{F}_P$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}([-a,a])$. Idem para o conjunto das funções ímpares $\mathcal{F}_I$.

(b) Identifique o subespaço $\mathcal{F}_P \cap \mathcal{F}_I$.

(c) Mostre que toda função f do espaço $\mathcal{F}([-a,a])$ se escreve como soma de uma função par com uma função ímpar.

(d) É verdade que $\mathcal{F}([-a,a]) = \mathcal{F}_P \oplus \mathcal{F}_I$?

4. Sejam W_1 e W_2 os subespaços do $\mathbb{R}^3$, considerados na Figura 1.1, onde temos $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$. Verifique que $\beta_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ e $\beta_2 = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente, e, ainda assim, $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ não é uma base do $\mathbb{R}^3$.

5. Se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\beta_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $\beta_2 = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ são bases de W_1 e W_2, respectivamente, mostre que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base de V. Vale ressaltar que se a soma não fosse direta, o resultado não seria válido, como vimos no exercício precedente.

6. Mostre que $\mathbb{R}^3 = [(1,0,0)] \oplus [(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)]$.

7. Se $W_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\right\}$, encontre um subespaço W_2, de dimensão 1, tal que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$. Por que $\dim W_2$ deve ser igual 1?

8. No espaço $\mathbb{R}^3$, selecione três subespaços vetoriais W_1, W_2 e W_3, com $W_1 \neq W_2$, tais que

$$W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3.$$

A *Lei do Cancelamento* é válida para soma direta?

9. Se $W = \{(x, y, x-y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, encontre dois subespaços U_1 e U_2 do $\mathbb{R}^3$, com $U_1 \neq U_2$ e $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$.

10. Considere os subespaços W_1 e W_2 constituídos, respectivamente, das matrizes $n \times n$ triangular superior e triangular inferior. Mostre que:

$$\mathcal{M}_{n \times n} = W_1 + W_2.$$

Quando é que a soma é dierta?

11. Um espaço vetorial V é a soma direta dos subespaços W_1, W_2 e W_3 e anota-se $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$, quando:

    (i) $V = W_1 + W_2 + W_3$.

    (ii) A interseção de qualquer um dos subespaços com os outros dois é $\{\mathbf{0}\}$.

    Se W_1, W_2 e W_3 são, respectivamente, os eixos x, y e z, mostre que

$$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3.$$

12. Mostre que qualquer espaço vetorial de dimensão $n = 3$ é a soma direta de três subespaços.

13. No espaço $\mathcal{M}_{n\times n}$, das matrizes quadradas de ordem n, sejam W_1 o subespaço das matrizes com diagonal nula e W_2 o subespaço das matrizes diagonais. Mostre que:

$$\mathcal{M}_{n\times n} = W_1 \oplus W_2$$

    e, com auxílio da fórmula, $\dim \mathcal{M}_{n\times n} = \dim W_1 + \dim W_2$, calcule $\dim W_2$ a partir de $\dim W_1$.

1.9 Mudança de Base

Em um espaço vetorial V, de dimensão n, consideremos duas bases ordenadas:

$$\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}.$$

Expressando cada vetor w_j da base β' como combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ da base β:

$$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}v_i, \quad j = 1, 2, 3, \ldots n,$$

construímos a matriz

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

denominada matriz de *Mudança de Base* (mudança da base β' para a base β). Ela relaciona as *matrizes coordenadas* $[v]_\beta$ e $[v]_{\beta'}$ de um dado vetor v de V nas duas bases ordenadas β e β', por meio da identidade $[v]_\beta = [I]_\beta^{\beta'}[v]$. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são as coordenadas do vetor v na base β e $y_1, y_2, \cdots y_n$ as coordenadas do mesmo v na base β', então:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

De forma similar, temos $[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[v]_\beta$.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em $\mathbb{R}^3$ considere as bases

$$\beta = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

   (a) Encontre as matrizes de mudança de base $[I]_\beta^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$ e verifique que $[I]_{\beta'}^{\beta} \bullet [I]_\beta^{\beta'} = I_3$.

   (b) Determine as coordenadas do vetor $v = (1,2,-1)$ nas bases β e β'.

2. No espaço dos polinômios $\mathbb{P}_2$ considere as bases

$$\beta = \{1, 1+t, t^2\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{2, -t, 1+t^2\}.$$

   (a) Encontre as matrizes de mudança de base $[I]_\beta^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$ e verifique que $[I]_{\beta'}^{\beta} \bullet [I]_\beta^{\beta'} = I_3$.

   (b) Determine as coordenadas do vetor $v = t^2 + t - 2$ nas bases β e β'.

3. Determine $[v]_{\beta'}$, sabendo que as coordenadas do vetor v do $\mathbb{R}^3$ na base β e a matriz de mudança $[I]_\beta^{\beta'}$ são dadas, respectivamente, por:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_\beta^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. No espaço $\mathbb{P}_3$, dos polinômios de grau ≤ 3, considere a base $\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$.

(a) Se $f(t) = (1-t^2)^2$, mostre que $\beta' = \{f'(t), f''(t), f'''(t), f^{(4)}(t)\}$ é uma base para $\mathbb{P}_3$.

(b) Determine a matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ de mudança de base de β' para β.

5. Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{v_1, v_2\}$ duas bases do $\mathbb{R}^2$. Determine v_1 e v_2, de modo que

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. **MATRIZ DE ROTAÇÃO** Seja $\beta = \{e_1, e_2\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e deixe-nos representar por β' a base $\{v_1, v_2\}$ obtida rotacionando a base β, de um ângulo θ, como ilustra a Figura 1.2.

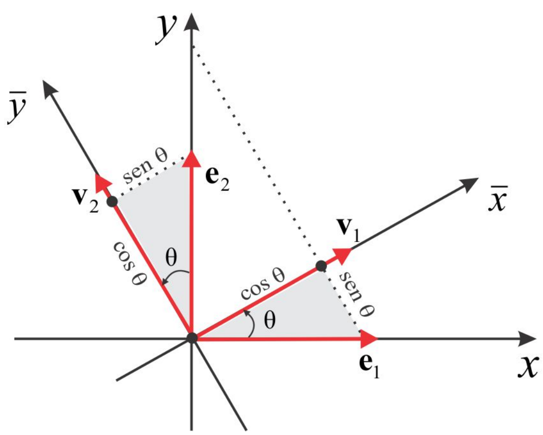


Figura 1.2: Rotação de um ângulo θ.

Dado um vetor $v = (x, y)$ do $\mathbb{R}^2$, temos que

$$v = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = \overline{x}v_1 + \overline{y}v_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = [I]_{\beta'}^{\beta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Para encontrar a matriz de mudança de base $[I]_{\beta'}^{\beta}$, devemos expressar os vetores canônicos $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ como combinação linear de v_1 e v_2. Observando a Figura 1.2, vemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos\theta)\, v_1 - (\operatorname{sen}\theta)\, v_2 \\ \mathbf{e}_2 &= (\operatorname{sen}\theta)\, v_1 + (\cos\theta)\, v_2 \end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Assim, temos a relação entre as coordenadas (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \overline{x} = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta \\ \overline{y} = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Por exemplo, efetuando uma rotação de $\theta = \pi/3$, a matriz de rotação é

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

e as coordenadas do vetor $v = (2, 4)$ na nova base é, portanto,

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{3} \\ 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Resolva o sistema (1.6) para expressar x e y em função de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e obtenha:

$$\left| \begin{array}{l} x = \overline{x}\cos\theta - \overline{y}\operatorname{sen}\theta \\ y = \overline{x}\operatorname{sen}\theta + \overline{y}\cos\theta \end{array} \right. \quad \text{e} \quad [I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

7. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

pode ser uma matriz de mudança de base?

8. Se $\beta = \{(1, 2), (-2, 4)\}$, encontre a base β' do $\mathbb{R}^2$, tal que:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Seja $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de um espaço vetorial V, de dimensão $n = 3$.

(a) Verifique que $\beta' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ é uma base de V.

(b) Encontre a matriz de mudança $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e verifique que esta matriz é triangular superior.

1.10 Questões de Revisão

1. Se $\{u, v, w\}$ é um conjunto LI, o que dizer do conjunto $\{u+v+2w, u+v, u-v-w\}$? E o conjunto $\{u+v-3w, u+v, u+3v-w\}$ é LI ou LD?

2. Mostre que $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \cos(x+y) = 1\}$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$. Idem para o subconjunto $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{sen}(x+y+z) = 0\}$. Note que em ambos os casos o vetor nulo pertence ao conjunto!

3. Um corpo $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre $\mathbb{F}$. Exiba uma base de $\mathbb{F}$. Sobre $\mathbb{R}$ o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é um espaço vetorial de dimensão 2. Exiba uma base.

4. Mostre que $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$ é o *menor* subespaço de V contendo os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

5. Se W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V, mostre que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V se, e somente se, $W_1 \subset W_2$ ou $W_2 \subset W_1$.

6. Mostre que os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$ coincidem:

$$W_1 = [(1, 2, -1, 3), (3, 6, 3, -3), (2, 4, 1, 0)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1, 2, -4, 9), (2, 4, -4, 10)].$$

7. **CONSTRUINDO UMA BASE DE $W_1 + W_2$** Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V e suponha que $\dim W_1 = 3$ e $\dim W_2 = 4$. Dada uma base $\beta = \{w_1, w_2\}$ de $W_1 \cap W_2$, complete β com um vetor u_1 de W_1, para formar uma base de W_1, e com os vetores v_1 e v_2 de W_2, complete β a uma base de W_2. Mostre que

$$\beta' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$$

é uma base de $W_1 + W_2$. Conclua que $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

8. Mostre com um exemplo que se β_1 e β_2 são bases de W_1 e W_2, respectivamente, a união $\beta_1 \cup \beta_2$ pode não ser uma base de $W_1 + W_2$.

9. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, tais que $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim V$, é correto afirmar que $V = W_1 \oplus W_2$? Se não, ilustre com um contra-exemplo.

10. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de certo espaço vetorial V e k é um número inteiro entre 1 e n, mostre que $V = [v_1, v_2, \ldots, v_k] \oplus [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n]$.

11. Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(x, y, z) : x = y = 0\} \quad \text{e} \quad W_3 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

É verdade que $W_1 + W_2 = W_1 + W_3 = W_2 + W_3 = \mathbb{R}^3$? Em qual dos casos a soma é direta?

12. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n = 7$ e sejam W_1 e W_2 subespaços de V, tais que $\dim W_1 = 4$ e $\dim W_2 = 5$. Determine os possíveis valores para $\dim(W_1 \cap W_2)$.

13. Sejam W_1 e W_2 subespaços do $\mathbb{R}^3$, tais que $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ e o subespaço W_1 não está contido em W_2. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

14. Determine uma base do subespaço $W = \{p \in \mathbb{P}_2 : p'(t) = 0\}$.

15. No espaço vetorial V das matrizes $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, considere as bases

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \beta' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Encontre as matrizes de mudança $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$.

16. Em um espaço vetorial V, mostre que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD se, e somente se, para algum índice k, $2 \leq k \leq n$, o vetor v_k jaz no subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$.

1.11 Extraindo uma Base do Conjunto Gerador

Seja $A = [v_1, v_2, \ldots v_k]$, $v_j \in \mathbb{R}^n$, uma $n \times k$ matriz e representemos por A^* a matriz $[v_1^*, v_2^*, \ldots, v_k^*]$, reduzida (linha) de A à forma escalonada. As colunas de A^* que contém o primeiro elemento não nulo (elemento pivô) de uma linha não nula, recebe o nome de *coluna-pivô*.

LEMA 1. Com a notação descrita, temos:

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j^* = \mathbf{0}.$$

DEMONSTRAÇÃO Decorre do fato dos sistemas homogêneos

$$A \cdot X = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad A^* \cdot X = \mathbf{0}$$

possuirem as mesmas soluções. ■

LEMA 2. As colunas-pivô de A^* são vetores LI do $\mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO Se as colunas-pivô $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_m^*$ de A^* fossem LD, existiria um índice j, $1 \leq j \leq m$, tal que:

$$v_j^* = \lambda_1 v_1^* + \lambda_2 v_2^* + \cdots + \lambda_{j-1} v_{j-1}^*. \tag{1.7}$$

Se o elemento-pivô 1 da coluna v_j^* ocorre na $i-$ésima linha, então todos os elementos da $i-$ésima linha das colunas $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_j^*$ são nulos e isto contradiz (1.7). ■

LEMA 3. Uma coluna v_i^*, $1 \leq i \leq k$, que não contem um pivô, jaz no subespaço gerado por $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_{i-1}^*$.

DEMONSTRAÇÃO Seja B a matriz de ordem $n \times (i-1)$, cujas colunas são $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_{i-1}^*$, e deixe-nos considerar o sistema:

$$B \cdot X = v_i^* \tag{1.8}$$

Se $X = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1})$ é uma solução do sistema (1.8), então:

$$v_i^* = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j v_j^*,$$

isto é, $v_i^* \in \left[v_1^*, v_2^*, \ldots, v_{i-1}^*\right]$. A matriz B está escalonada e o sistema (1.8) só não terá solução se a matriz B possuir alguma linha não nula, na qual algum elemento da coluna v_i^* é não nulo. Este elemento não seria um pivô de v_i^*, o que seria uma contradição. ■

TEOREMA Se $v_{i_1}^*, v_{i_2}^*, \ldots, v_{i_k}^*$ são as colunas-pivô da matriz A^*, então $\beta = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ é uma base do subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$.

DEMONSTRAÇÃO Basta observar que:

(a) $\left\{v_{i_1}^*, v_{i_2}^*, \ldots, v_{i_k}^*\right\}$ é um conjunto de vetores LI.

(b) De (a) e do Lema 1, resulta que os vetrores $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ são LI.

(c) O conjunto $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ gera o subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. ■

OBSERVAÇÃO Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $k \geq n$, um conjunto de geradores de um espaço vetorial $n-$dimensional V. Considerando um isomorfismo $T : \mathbb{R}^n \to V$ e fazendo $u_j = T^{-1}(v_j)$, aplicamos o processo ao conjunto gerador $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, extraímos uma base $\beta = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}\}$ do $\mathbb{R}^n$ e uma correpondente base $\beta' = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\}$ do espaço V, extraída do conjunto gerador $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

1.1. CORPO NUMÉRICO

1. O conjunto $\mathbb{N}$ não é um corpo, porque não contém o número zero. Embora o conjunto $\mathbb{Z}$ contenha o número zero, ele também não é corpo. Note que $2 \in \mathbb{Z}$, mas, $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$.

2. Recordemos que o conjunto $\mathbb{Q}$ das frações m/n, sendo m e n números inteiros e $n \neq 0$. É claro que 0 e 1 estão em $\mathbb{Q}$. Dados $x = m/n$ e $y = p/q$ em $\mathbb{Q}$, então

$$x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad x \cdot y = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

   Por outro lado, $-x = (-m)/n \in \mathbb{Q}$ e, se $m \neq 0$, então $x^{-1} = n/m \in \mathbb{Q}$. Para justificar que o conjunto $\mathbb{I}$ dos irracionais não é um corpo, basta observar que $0 \in \mathbb{I}$. (zero é um número racional).

3. Observando que $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$ e que $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, vemos que os números 0 e 1 estão em $\mathbb{F}$. Se $x = a + b\sqrt{2}$ e $y = a' + b'\sqrt{2}$ estão em $\mathbb{F}$, então:

   (a) $x + y = a + b\sqrt{2} + a' + b'\sqrt{2} = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbb{F}$, porque $a + a'$ e $(b + b')$ estão em $\mathbb{Q}$.

   (b) $x \cdot y = \left(a + b\sqrt{2}\right) \cdot \left(a' + b'\sqrt{2}\right) = aa' + 2bb' + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in \mathbb{F}$.

   (c) $x = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in \mathbb{F}$.

   (d) $x^{-1} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^{-1} = a\left(a^2 - 2b^2\right)^{-1} + \left[(-b)\left(a^2 - 2b^2\right)^{-1}\right]\sqrt{2} = r + s\sqrt{2} \in \mathbb{F}$.

4. Comece mostrando que n e $-n$ estão em $\mathbb{F}$, seja qual for o inteiro n. Com isso, deduza que $\mathbb{F}$ contém o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e, usando as propriedades de corpo, mostre que $1/n \in \mathbb{F}$, se n é um inteiro não nulo. Para concluir, note que

$$\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n} \in \mathbb{F}, \quad \forall m, n \in \mathbb{F},\ n \neq 0.$$

Dado um número x no corpo $\mathbb{F}$, considerando que $\mathbb{F}$ é fechado em relação à soma e ao produto, isto é, soma e produto de números de $\mathbb{F}$ continuam em $\mathbb{F}$, deduzimos que as potências $x^2,\ x^3,\ x^4,\ldots$ e, consequentemente, os números, $a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ estão em $\mathbb{F}$. Por outro lado, $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ estando em $\mathbb{F}$ e sendo não nulo, então $q(x)^{-1}$ (o inverso multiplicativo) está em $\mathbb{F}$. Logo,

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \cdot q(x)^{-1} \in \mathbb{F}.$$

1.2. ESPAÇO VETORIAL

1. Comprove as propriedades **(EV1)**-**(EV8)**, considerando que o vetor nulo do $\mathbb{R}^2$ é $\mathbf{0} = (0,0)$.

2. Idem, considerando que o vetor nulo do $\mathbb{R}^n$ é $\mathbf{0} = (0,0,\ldots 0)$.

3. Não, porque o produto de um vetor de V por um número real pode não estar em V.

4. Se ao menos uma das propriedades **(EV1)**-**(EV8)** for violada, fica caracterizado que o conjunto (no caso o $\mathbb{R}^2$) com as operações indicadas não é um espaço vetorial. Considerando $v = (1,1)$, e usando as operações indicadas, vemos que

$$v + (-v) = (1,1) + (-1,-1) = (0,-1) \neq \mathbf{0}$$

e isso viola a propriedade **(EV4)**.

5. $\mathbb{Q}$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, porque o produto λv, com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{Q}$, pode não pertencer ao conjunto $\mathbb{Q}$. Por exemplo, se $\lambda = \sqrt{2}$ e $v = 1$, então $\lambda v \notin \mathbb{Q}$. Sim, $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.

6. **(a)** Consequência direta da propriedade **(EV4)**: $v + (-v) = \mathbf{0}$.

   (b) Sendo $u + v = u + w$, segue das propriedades **(EV1)**-**(EV8)** que

$$\begin{aligned}(-u) + u + v &= (-u) + u + w \Leftrightarrow [(-u) + u] + v \\ &= [(-u) + u] + w \Leftrightarrow \mathbf{0} + v = \mathbf{0} + w \Leftrightarrow v = w.\end{aligned}$$

7. O vetor w procurado é precisamente $v - u$.

1.3. ESPAÇO VETORIAL $M_{m\times n}$

1. Efetuando o cálculo, obtemos:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o produto BA não é possível, porque o número de colunas da matriz B não é igual ao número de linhas da matriz A. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, então

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e temos $AB \neq BA$.

2. **(a)** $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(b)** $C^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

3. Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $A = [b_{ij}]_{m\times n}$, então $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ e, portanto,

$$(xA + B)^t = [xa_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} = x\,[a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} = xA^t + B^t.$$

Para comprovar a propriedade $(AB)^t = B^tA^t$, sejam $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Então

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{pmatrix}$$

Por outro lado,

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & a'c + c'd \\ ab' + bd' & b'c + dd' \end{pmatrix} = (AB)^t.$$

4. $\operatorname{tr}(B) = 3$ e $\operatorname{tr}(C) = a + b + c$.

5. Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $A = [b_{ij}]_{n\times n}$, então:

(a) $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times n} \Rightarrow \operatorname{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$

(b) $xA = [xa_{ij}]_{n\times n} \Rightarrow \operatorname{tr}(xA) = \sum_{i=1}^{n} (xa_{ii}) = x \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = x \operatorname{tr} A.$

(c) Os elementos diagonais de A e A^t são iguais e, sendo assim, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}\left(A^t\right).$

(d) Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, então

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(AB) = aa' + bc' + b'c + dd'.$$

Por outro lado,

$$BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ ac' + cd' & bc' + d'd \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{tr}(BA) = a'a + b'c + bc' + d'd = \operatorname{tr}(AB).$$

6. A matriz quadrada que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica é a matriz nula.

7. O ítem (a) é trivial! Para o ítem (b) considere $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e admita que $AB = I_2$. Então

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a + 2b & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e daí resulta o sistema

$$\left|\begin{array}{r} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{array}\right.$$

cuja solução é $a = 1,\ b = -2,\ c = 0$ e $d = 1$. Logo, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprove a resposta, calculando AB e BA.

1.5 SUBESPAÇO VETORIAL

1. O vetor nulo $\mathbf{0} = (0,0,0)$ não está em W.

2. O vetor nulo $\mathbf{0} = (0,0)$ está em W, porque $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0$. Se $u = (x,y)$ e $v = (x',y')$ estão em W e λ é um escalar, então $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in W$, porque

$$a \cdot \left(\lambda x + x'\right) + b \cdot \left(\lambda y + y'\right) = \lambda \left(ax + by\right) + \left(ax' + by'\right) = 0.$$

3. Note que um vetor (x,y,z) está em W se, e somente se, $z = 0$. Assim, $\mathbf{0} = (0,0,0)$ está em W e dados $u = (x,y,0)$ e $v = (x',y',0)$ em W, então

$$\lambda u + v = \left(\lambda x + x', \lambda y + y', 0\right) \in W, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Não. O vetor nulo $\mathbf{0} = (0,0)$ não está em W.

5. Temos que $\mathbf{0} \in W_1$ e $\mathbf{0} \in W_2$, porque W_1 e W_2 subespaços de V e, portanto,

$$\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2, \quad \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2 \quad \text{e} \quad (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \in W_1 \times W_2.$$

(a) Se $u, v \in W_1 \cap W_2$ e λ é um escalar, então $\lambda u + v \in W_1$ e $\lambda u + v \in W_2$ e, portanto, $\lambda u + v \in W_1 \cap W_2$.

(b) Se $u, v \in W_1 + W_2$ e λ é um escalar, então $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, com $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$. Logo,

$$\lambda u + v = (\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2) \in W_1 + W_2.$$

(c) Se $u, v \in W_1 \times W_2$ e λ é um escalar, então $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, com $u_1, v_1 \in W_1$ e $u_2, v_2 \in W_2$. Logo,

$$\lambda u + v = (\lambda u_1, \lambda u_2) + (v_1, v_2) = (\lambda u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in W_1 \times W_2.$$

(d) Considere os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^2$:

$$W_1 = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_1 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

temos que $u = (1,0)$ e $v = (0,1)$ pertencem a $W_1 \cup W_2$ e, contudo, $u + v \notin W_1 \cup W_2$. Isso mostra que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço do $\mathbb{R}^2$, embora W_1 e W_2 o sejam.

6. Deve-se mostrar que $\mathbf{0} \in W$ (isso é óbvio, porque $\operatorname{tr}\mathbf{0} = 0$) e que $\lambda A + B \in W$, sempre que $A, B \in W$. No Exercicio 1.2N provamos que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ e como $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$, segue que $\operatorname{tr}(\lambda A + B) = 0$ e, portanto, $\lambda A + B \in W$.

7. Considere os vetores $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Temos que $\det A = \det B = 0$ e, contudo, $\det(A + B) \neq 0$. Conclua que $A, B \in W$ e $A + B \notin W$.

8. O vetor A está em W e o vetor B não.

9. O vetor $u = (2, 2)$ está em W, mas, o simétrico $-u$ não.

10. Primeiro, note que $\mathbf{0} \in W$ e, portanto, W não é vazio. Considere dois vetores (polinômios) p e q em W e mostre que $(\lambda \cdot p + q)(0) = 2(\lambda \cdot p + q)(1)$ e deduza que $\lambda \cdot p + q \in W$.

1.6 SUBESPAÇO GERADO

1. Escreva

$$(1, 1, 2, -1) = x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 1, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(1, 0, 0, 1) = (x + t, y, y + z, t)$$

e deduza que $x = 2,\ y = 1,\ z = 1$ e $t = -1$. Assim, $v = 2v_1 + v_2 + v_3 - v_4$.

2. Um vetor de W é da forma

$$v = xv_1 + yv_2 + zv_3 = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & x \\ z & y \end{pmatrix}.$$

Assim, vemos que

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a = c \right\}.$$

3. Temos $v \in W$ se, e somente se, $v = x(1, 0, 0) + y(1, 0, 1) = (x + y, 0, y)$. Assim,

$$W = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(o plano } xz\text{)}.$$

4. O subespaço W é um plano e é gerado por dois vetores não colineares. Um vetor $v = (x, y, z)$ está em W se, e somente se, $x + y + z = 0$. Comprove que os vetores $v_1 = (1, -1, 0)$ e $v_2 = (0, -1, 1)$ geram W.

5. O subespaço W é constituído das soluções (x, y, z, t) do sistema homogêneo

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 0 \\ z - t = 0, \end{array} \right.$$

cuja matriz dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

já está na forma escalonada. Temos $p(A) = 2$ e considerando x e z variáveis livres, construímos os vetores básicos $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1, 1)$. Assim, $W = [v_1, v_2]$.

O resultado pode ser obtido trabalhando diretamente nas coordenadas. De fato, um vetor genérico de W é da forma

$$\begin{aligned} v &= (x, x, z, z) = (x, x, 0, 0) + (0, 0, z, z) \\ &= x(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 1), \end{aligned}$$

de onde resulta que $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$.

6. É suficiente provar que todo polinômio de grau ≤ 3 pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $1,\ 1 - t,\ (1 - t)^2$ e $(1 - t)^3$. Verifiquemos que existem constantes x_1, x_2, x_3 e x_4, tais que $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = x_1 + x_2(1 - t) + x_3(1 - t)^2 + x_4(1 - t)^3$. De fato, se

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 &= x_1 + x_2(1 - t) + x_3(1 - t)^2 + x_4(1 - t)^3 \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - (x_2 + 2x_3 + 3x_4)t + (x_3 + 3x_4)t^2 - x_4 t^3 \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes, encontramos o sistema

$$\left| \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a_0 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 = a_1 \\ x_3 + 3x_4 = a_2 \\ -x_4 = a_3 \end{array} \right.$$

cuja solução é $x_4 = -a_3,\ x_3 = a_2 + 3a_3,\ x_2 = -a_1 - 2a_2 - 3a_3$ e $x_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

7. O subespaço W, gerado por $v_1,\ v_2$ e v_3, é:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b + c \\ a & a - b \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}. \right\}$$

Tente escrever o vetor v como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3 e conclua que o vetor v não pertence ao subespaço gerado $[v_1, v_2, v_3]$.

8. O plano $x - y + 2z = 0$.

9. Dado v um vetor de V, então

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_kv_k$$

e sendo vetor v_1 combinação linear dos demais, então $v_1 = y_2v_2 + y_3v_3 + \cdots + y_kv_k$. Logo,

$$\begin{aligned} v &= x_1(y_2v_2 + y_3v_3 + \cdots + y_kv_k) + x_2v_2 + x_3v_3 + \cdots + x_kv_k \\ &= (x_1y_2 + x_2)v_2 + (x_1y_3 + x_3)v_3 + \cdots + (x_1y_k + x_k)v_k. \end{aligned} \tag{1.9}$$

O que vemos em (1.9) é o vetor v escrito como combinação linear dos vetores $v_2, v_3, \ldots, v_k$. Logo, o espaço V é gerado por $\{v_2, v_3, \ldots, v_k\}$.

10. **(a)** Escalonando a matriz geradora de W chegamos à matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e vemos que $\dim W = 2$ e $\beta = \{(1,0,-1), (0,1,2)\}$ é uma base de W.

(b) O vetor $v = (\lambda, 2, -2\lambda)$ estará em W quando existirem escalares x e y, tais que

$$v = (\lambda, 2, -2\lambda) = x(1,0,-1) + y(0,1,2) = (x, y, -x+2y) \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

11. Escalone as matrizes geradoras e conclua que ambos os subespaços são gerados pelos vetores $v_1 = (1,0,-2)$ e $v_2 = (0,1,-1)$.

1.7 BASE & DIMENSÃO

1. Os vetores $v = (a,b)$ e $w = (c,d)$ são LI se, e somente se, o sistema

$$\left| \begin{array}{l} ax + cy = 0 \\ bx + dy = 0 \end{array} \right.$$

tem solução única $x = 0$ e $y = 0$. Isto equivale dizer que a matriz dos coeficientes tem posto 2. Se a e b forem ambos nulos, então os vetores serão LD e $ad - bc = 0$. Suponhamos, então, que a seja não nulo (raciocínio similar se aplica se $b \neq 0$). Escalonando a mariz dos coeficientes, obtemos

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & c/a \\ 0 & (ad - bc)/a \end{pmatrix}$$

onde vemos que $p(A) = 2 \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$. Se preferir, pode usar a Regra de Cramer!

2. Se os vetores u e v são LD, existem escalares x e y, com um deles não nulo, tais que $xu + yv = \mathbf{0}$. Se, por exemplo, $x \neq 0$, obtemos $u = (-y/x)\, v$ (u múltiplo de v). Reciprocamente, se u for múltiplo de v, então existe um escalar λ, tal que $u = \lambda v$ e daí resulta $u + (-\lambda)\, v = \mathbf{0}$. O que vemos na última igualdade é uma combinação linear nula de u e v, com um dos coeficientes $\neq 0$. Veja o conceito de vetores LD!

3. No espaço $\mathcal{F}$ das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o vetor nulo é a função $\mathbf{0}$, identicamente nula, isto é, aquela que assume o valor zero em cada t.

   (a) Se $x \cdot 1 + y \cdot t = \mathbf{0}$, consideremos $t = 0$, para obtermos $x = 0$ e, em seguida, com $t = 1$, obtemos $y = 0$.

   (b) Considerando a combinação linear nula $x \cdot \operatorname{sen} t + y \cdot \cos t = \mathbf{0}$ e fazendo $t = 0$, obtemos $y = 0$; com $t = \pi/2$, obtemos $x = 0$.

   (c) Se $x \cdot t + y \cdot e^t = \mathbf{0}$, então por derivação chegamos ao sistema

$$\begin{aligned} x \cdot t + y \cdot e^t &= 0, \quad \forall t \qquad \text{(I)} \\ x + y \cdot e^t &= 0, \quad \forall t \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

   Considerando $t = 0$, obtemos $y = 0$ (de I) e $x + y = 0$ (de II). Logo, $x = y = 0$.

   (d) Se $x \cdot t + y \cdot t^3 = \mathbf{0}$, então $x \cdot t + y \cdot t^3 = 0 \cdot t + 0 \cdot t^3, \quad \forall t$, e igualando os coeficientes, chegamos a $x = y = 0$.

4. Sendo $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base, então o vetor v se expressa como a combinação linear $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$ e daí resulta

$$(-1)\, v + x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n = 0. \tag{1.10}$$

O que vemos em (1.10)? Uma combinação linear nula, com pelo menos um coeficiente ($x_0 = -1$) não nulo. Então os vetores $v, v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD.

5. Fazer

6. (a) p_1 e p_2 são LD, porque p_2 é um múltiplo escalar de p_1. $(p_2 = 2p_1)$

(b) Considere a combinação linear nula $xp_1 + yp_2 + zp_3 = \mathbf{0}$. Então

$$\begin{aligned} x\left(t+t^2\right) + 2y + z\left(1+2t^2\right) &= 0 \\ &\Leftrightarrow 2y + z + xt + (x+2z)\,t^2 = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow 2y + z = 0,\ x = 0,\ x + 2z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

Logo, p_1, p_2 e p_3 são LI.

(c) Procedendo como no ítem (b), encontramos

$$\begin{aligned} x\,(1+t) + y\,(2+t) + 2zt^2 &= 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y + (x+y)\,t + 2zt^2 = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow x + 2y = 0,\ x + y = 0,\ z = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0 \end{aligned}$$

e os vetores p_1, p_2 e p_3 são LI.

7. Em primeiro lugar, note que os vetores $v_1 = (0,2,2)$ e $v_2 = (0,4,1)$ são LI, porque a equação vetorial $xv_1 + yv_2 = \mathbf{0}$ só admite a solução nula $x = y = 0$ e resta-nos provar que esses vetores geram o subespaço W. Ora, dado $v = (0,a,b)$ um vetor qualquer de W, resolva a equação $v = xv_1 + yv_2$ e encontre $x = (-a+5b)/2$ e $y = (a-b)/4$. "Todo vetor de W é combinação linear de v_1 e v_2."

8. Basta mostrar que β é um conjunto gerador de $V_1 \times V_2$, constituído de vetores LI. Para mostrar que β gera $V_1 \times V_2$, seja (v,w) em $V_1 \times V_2$, de modo que $v \in V_1$ e $w \in V_2$ e, assim:

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_kv_k$$
$$w = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n$$

e daí resulta que:

$$(v, w) = x_1 (v_1, 0) + x_2 (v_2, 0) + \ldots + x_k (v_k, 0) + y_1 (0, w_1) + y_2 (0, w_2) + \ldots + y_n (0, w_n).$$

Para mostrar que β é um conjunto de vetores LI, observamos que:

$$x_1 (v_1, \mathbf{0}) + x_2 (v_2, \mathbf{0}) + \ldots + x_k (v_k, \mathbf{0}) + y_1 (\mathbf{0}, w_1) + y_2 (\mathbf{0}, w_2) + \ldots + y_n (\mathbf{0}, w_n) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$$

nos dá:

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k &= \mathbf{0} \\ y_1 w_1 + y_2 w_2 + \cdots + y_n w_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

e daí resulta $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$.

9. Escalonando a matriz cujas linhas são os geradores de W, encontramos a matriz

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e daí resulta que $\dim W = 3$ e, portanto, $W = \mathbb{R}^3$. (o único subespaço do $\mathbb{R}^3$, com dimensão 3, é o próprio $\mathbb{R}^3$)

10. Escalonando a *matriz geradora* de W, encontramos

$$A_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, consequentemente, $\dim W = 3 = p(A_E)$. As linhas não nulas da matriz escalonada A_E formam uma base de W e, sendo assim,

$$W = \{(x, y, z, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \tag{1.11}$$

(a) Segue de (1.11) que um vetor $v = (a, b, c, d)$ do $\mathbb{R}^4$ pertence a W se, e só se, $c = d$. Assim, o vetor $v = (2, -3, 2, 2)$ está em W.

(b) $\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,1)\}$.

(c) W é um subespaço próprio (menor) do que $\mathbb{R}^4$, porque $\dim W = 3 < \dim \mathbb{R}^4$.

11. O processo consiste em excluir (um a um) do conjunto gerador cada vetor que é combinação linear dos demais, até que sobrem apenas vetores LI que formarão a base (veja o Exercício 1.3Q). A combinação linear nula $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = \mathbf{0}$, nos conduz ao sistema homogêneo

$$\left| \begin{array}{rl} x+y+z+t=0 & \text{(I)} \\ -5x+y-4z-7t=0 & \text{(II)} \\ -4x-y-5z-5t=0 & \text{(III)} \\ 2x+5y+7z+t=0 & \text{(IV)} \end{array} \right.$$

e, escalonando a matriz dos coeficientes, chegamos à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cujo posto é 3 e o grau de liberdade do sistema é $GL = 4 - 3 = 1$. O sistema é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} x + \frac{4}{3}t = 0 \\ y - \frac{1}{3}t = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

e escolhendo os valores $t = 1$ (variável livre), obtemos $x = -4/3$ e $y = 1/3$. Com esses valores, a combinação linear fica

$$-\tfrac{4}{3}v_1 + \tfrac{1}{3}v_2 + v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow v_4 = \tfrac{4}{3}v_1 - \tfrac{1}{3}v_2$$

e eliminamos o vetor v_4 da coleção de geradores. Assm, o subespaço W é gerado pelos vetorres v_1, v_2 e v_3. Para concluir, mostremos que os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI. de fato, consideramos a combinação linear nula $xv_1 + yv_2 + zv_3 = \mathbf{0}$, a qual é equivalente ao sistema:

$$\left| \begin{array}{rl} x+y+z=0 & \text{(V)} \\ -5x+y-4y=0 & \text{(VI)} \\ -x-y-5z=0 & \text{(VII)} \\ 2x+5y+7z=0 & \text{(VIII)} \end{array} \right.$$

cuja solução é $x = y = z = 0$. Assim, v_1, v_2 e v_3 são LI e geram o subespaço W, constituindo, portanto, uma base de W.

FUGINDO DO ESCALONAMENTO Trabalhando diretamente no sitema (I)-(IV), segue de (III) e (IV) que $y + z = t/3$ e usando (I), encontramos $x = -4t/3$. Agora, de (II) e (III), obtemos:

$$-9x - 9z - 12t = 0 \Leftrightarrow 3x + 3z + 4t = 0$$

e, considerando que $x = -4t/3$, resulta $z = 0$. Para obter uma solução não nula, fazemos $t = 3$ para chegarmos à solução:

$$x = -4, \ y = 1, \ z = 0 \quad \text{e} \quad t = 3.$$

Assim,

$$-4v_1 + v_2 + 0v_3 + 3v_4 = \mathbf{0} \Rightarrow v_4 \in [v_1, v_2, v_3].$$

Para concluir, eliminamos v_4 do conjunto gerador e mostramos que v_1, v_2 e v_3 são LI. De fato, somando (VI) e (VII), encontramos $x = -z$ e usando (V), chegamos a $y = 0$. Finalmente, usamos (VIII) e obtemos $x = 0$ e $z = 0$.

12. Escalonando a matriz geradora A, chegamos à matriz $A_{\mathcal{E}}$ cujas linhas não nulas formam uma base de W.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\mathcal{E}}$$

Como $p(A) = 3$, segue que $\dim W = 3$ e uma base de W é $\beta = \{(1, 0, 0, 1/2), (0, 1, 0, 1/2) \, (0, 0, 1, 1/2)\}$.

EXTRAINDO UMA BASE POR ESCALONAMENTO Escalonando a matriz cujas colunas são os vetrores v_1, v_2, v_3 e v_4, encontramos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{\mathcal{E}}$$

e observamos que, na forma escalonada, as colunas 1,2 e 3 contêm os elementos pivôs destacados e, portanto, $\{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 2), (2, 5, 6, 4)\}$ é uma base de W, extraída do conjunto gerador.

13. Temos que $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ e o subespaço W_1+W_2 é gerado por $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$. Escalonando a matriz geradora chegamos à matriz

$$A_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\dim(W_1 + W_2) = 3$ e, sendo assim, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$. Para identificar $W_1 \cap W_2$, observamos inicialmente que

$$W_1 = \{(x, y, x+y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x, x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

e, consequentemente, $v = (1,1,2)$ está em $W_1 \cap W_2$. Como $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, segue que

$$W_1 \cap W_2 = [(1,1,2)] = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

14. Como ilustração, faremos o ítem (b). Escalonando a matriz A dos coeficientes, chegamos à matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde vemos que $p(A) = 2$ e o grau de liberdade do sistema é $GL = 5 - 2 = 3$. Na tabela abaixo contruímos os vetores básicos v_1, v_2 e v_3 a partir ds valores atribídos às variáveis livres x, y e z.

x	y	z	r	s	vetor básico
1	0	0	$-2/5$	$-1/5$	$v_1 = (1,0,0,-2/5,-1/5)$
0	1	0	$-4/5$	$-2/5$	$v_2 = (1,0,0,-4/5,-2/5)$
0	0	1	$6/5$	$-2/5$	$v_3 = (1,0,0,6/5,-2/5)$

15. O o método para encontrar bases de W_1 e W_2 é o mesmo usado no Exercício 1.4N. Temos

$$W_1 = [(1,0,0),(0,1,0)] \quad \text{e} \quad W_2 = [(1,0,1),(0,1,-1)].$$

sendo $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$.

(a) O subespaço $W_1 \cap W_2$ é o espaço solução do sistema homogêneo

$$\left| \begin{aligned} z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned} \right.$$

cuja matriz dos coeficientes A tem posto $p(A) = 2$. Assim, $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$, que é o grau de liberdade do sistema. Por outro lado,

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) = 3.$$

($W_1 \cap W_2$ **é uma reta pela origem e** $W_1 + W_2$ **coincide com o espaço** $\mathbb{R}^3$)

(b) Para justificar que $W_1 \cup W_2$ não é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^3$ é suficiente exibir dois vetores u e v de $W_1 \cup W_2$, tais que $u + v \notin W_1 \cup W_2$. Considere os vetores $u = (1, 0, 0) \in W_1$ e $v = (2, 1, 1) \in W_2$. Temos que

$$u, v \in W_1 \cup W_2, \quad \text{mas} \quad u + v = (3, 1, 1) \notin W_1 \cup W_2.$$

16. Sejam A e B as matrizes dos coeficientes dos sistemas homogêneos que descrevem W_1 e W_2, respectivamente. Temos que $p(A) = 2$, $p(B) = 1$ e, por conseguinte, $\dim W_1 = 2$ e $\dim W_2 = 3$. (recorde-se que cada sistema tem 4 variáveis e a dimensão do espaço solução é o grau de liberdade do sistema). O subespaço $W_1 \cap W_2$ é o espaço solução do sistema

$$\left| \begin{aligned} x + y &= 0 \\ z - t &= 0 \\ x - y - z + t &= 0 \end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

com grau de liberdade 1. Assim, $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$. Temos

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2) = 4$$

e, portanto, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$. A construção das bases baseia-se no Exercício 14. Por exemplo, se fizermos $z = 1$ no sistema (1.12) que define $W_1 \cap W_2$, encontramos $t = 1$, $y = 0$ e $x = 0$ e $\beta = \{(0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de $W_1 \cap W_2$.

17. **(a)** As bases β_1 e β_2 de W_1 e W_2 são construidas de forma direta:

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

O subespaço $W_1 \cap W_2$ é constituído das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ e uma base desse subespaço é $\beta_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. A dimensão do subespaço $W_1 + W_2$ é igual a 3 e ele é gerado pelos vetores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que esses vetores são LD, porque $v_1 + v_2 = v_3 + v_4$, e eliminando, por exemplo, o vetor v_1 temos que $\beta_4 = \{v_2, v_3, v_4\}$ é base de $W_1 + W_2$.

(b) O subespaço $W_1 + W_2$ é constituído das matrizes do tipo $\begin{pmatrix} y & x+z \\ x+y & z \end{pmatrix}$ e o vetor $v = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ não está em $W_1 + W_2$.

18. **(a)** Os vetores (polinômios) v_1, v_2 e v_3 são LD. De fato,

$$\begin{aligned} xv_1 + yv_2 + zv_3 &= \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y\left(1 - t + t^2\right) + z\left(1 - 2t + 2t^2\right) = 0, \quad \forall t, \\ &\Leftrightarrow (x+y+z) + (-y-2z)\,t + (y+2z)\,t^2 = 0, \quad \forall t. \end{aligned}$$

Resulta da última equação que os coeficientes $x,\ y$ e z devem satisfazer ao sistema linear homogêneo

$$\left| \begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

com 1 grau de liberdade (uma variável livre). O sistema tem uma infinidade de soluções e, portanto, os vetores são LD.

(b) O vetor v_3 sendo combinação linear dos vetores v_1 e v_2, pode ser sacado do conjunto gerador. Os vetores v_1 e v_2 geram W e são LI, formando, por conseguinte, uma base de W. Temos $\dim W = 2$.

(c) Como $\dim \mathbb{P}_2 = 3$, para formar uma base de $\mathbb{P}_2$ devemos acrescentar ao conjunto $\{v_1, v_2\}$ um terceiro vetor LI com v_1 e v_2. Seja $v = a + bt + ct^2$ um tal vetor. Como v_1 e v_2 são LI, para que v_1, v_2 e v também sejam LI basta que v não seja combinação linear de v_1 e v_2. Ora,

$$\begin{aligned} v &= x \cdot v_1 + y \cdot v_2 \Leftrightarrow v = (x+y) + (-y)\,t + yt^2 \\ &\Leftrightarrow a + bt + ct^2 = (x+y) + (-y)\,t + yt^2 \\ &\Leftrightarrow a = x + y, \quad b = -y \quad \text{e} \quad c = y. \qquad (\Rightarrow b = -c) \end{aligned}$$

Se considerarmos $b \neq -c$ o vetor v não será combinação lilnear de v_1 e v_2. Seja, por exemplo, $v = 1 + t + t^2$. O conjunto $\{v_1, v_2, v\}$ é uma base de $\mathbb{P}_2$, contendo os vetores v_1 e v_2.

19. Recorde-se que $\dim V = n^2$ e o subespaço W_S, das matrizes simétricas, tem dimensão $\frac{1}{2}n\,(n+1)$.

(a) No máximo $\frac{1}{2}n\,(n+1)$.

(b) Não, porque $\dim V > \dim W_S$.

1.8 SOMA DIRETA

1. Considere os subespaços $W_1 = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x,y,0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e mostre que (i) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e (ii) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W$. Dessa forma, teremos $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W$.

2. Sejam $W_1 = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = A^t\right\}$ e $W_2 = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = -A^t\right\}$ os subespaços das matrizes simétricas e antissimétricas, respectivamente. A matriz A que é, ao mesmo tempo, simétrica e antissimétrica é a matriz nula $A = \mathbf{0}$, isto é, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Por outro lado, dada uma matriz A de ordem 2×2, temos

$$A = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(A + A^t\right)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(A - A^t\right)}_{\text{antissimétrica}}.$$

3. Proceda como exercício precedente e comece mostrando que a única função que é, ao mesmo tempo, par e ímpar é a função identicamente nula. Depois, note que

$$f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]}_{\text{par}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left[f(x) - f(-x)\right]}_{\text{ímpar}}.$$

4. O conjunto

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0), (0,0,1)\}$$

não pode ser uma base do $\mathbb{R}^3$, porque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e o conjunto β tem 4 vetores.

5. Base de um espaço vetorial V é um conjunto de vetores LI que geram V. Primeiro mostremos que $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots w_n\}$ é um conjunto de vetores LI. De fato, considerando uma combinação linear nula

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m + y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_m w_n = \mathbf{0}$$

obtemos

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m = -y_1 w_1 - y_2 w_2 - \ldots - y_m w_n$$

e daí resulta que os vetores $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m$ e $w = -y_1 w_1 - y_2 w_2 - \ldots - y_m w_n$ estão na interseção $W_1 \cap W_2$. Como esta interseção é nula, isto é, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, segue que

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m &= \mathbf{0} \\ -y_1 w_1 - y_2 w_2 - \ldots - y_m w_n &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.13}$$

O que vemos em (1.13) são combinações lineares nulas de vetores LI e, consequentemente,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0,$$

como queríamos. Resta-nos provar que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_m, w_1, w_2, \ldots w_n$ geram o subespaço $W_1 + W_2$. Se $u = v + w$ é um vetor qualquer do subespaço $W_1 + W_2$, temos que $v \in W_1$, $w \in W_2$ e, sendo assim,

$$u = v + w = \underbrace{(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_m v_m)}_{=v} + \underbrace{(y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_m w_n)}_{=w}. \tag{1.14}$$

O que vemos em (1.14) é um vetor genérico u de $W_1 + W_2$ escrito como combinação linear dos vetores do conjunto β. Isto significa que o conjunto β gera o subespaço $W_1 + W_2$.

6. Sejam $W_1 = [(1,0,0)]$ e $W_2 = [(1,1,0), (0,1,1), (1,0,-1)]$. Se $v \in W_1 \cap W_2$, então

$$\begin{aligned} & v \in W_1 \Rightarrow v = x(1,0,0) = (x,0,0) \\ & v \in W_2 \Rightarrow v = y(1,1,0) + z(0,1,1) + t(1,0,-1) = (y+t, y+z, z+t) \end{aligned}$$

e da relação $(x,0,0) = (y+t, y+z, z+t)$ resulta $x = 0$. Logo, $v = 0$ e temos $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Para concluir que $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ basta observar que $\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$ é uma base de $W_1 + W_2$.

7. O subespaço W_1 é o espaço solução do sistema $x+2y+z=0$, o qual tem grau de liberdade 2. Assim, $\dim W_1 = 2$ e o subespaço W_2 que procuramos deve ter dimensão 1. Com a construção usada no Exercício 14 da Seção 1.7, temos que $\beta_1 = \{(1,0,-1),(0,1,-2)\}$ é uma base de W_1 e acrescentando à β_1 o vetor $v=(0,0,1)$ obtemos uma base do $\mathbb{R}^3$. Se $W_2 = [(0,0,1)]$ é o subespaço gerado pelo vetor v, então $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

8. Considere os subespaços:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x,y,z) : x,y \in \mathbb{R}\} && \textbf{(o plano } \boldsymbol{xy}\textbf{)} \\ W_2 &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} && \textbf{(o eixo } \boldsymbol{z}\textbf{)} \\ W_3 &= \{(x,0,z) : x,z \in \mathbb{R}\} && \textbf{(a reta } \boldsymbol{x=z}\textbf{)} \end{aligned}$$

9. A relação

$$(x,y,x-y) = (x,0,x) + (0,y,-y)$$

nos dá uma indicação de como devem ser os subespaços U_1 e U_2 :

$$U_1 = \{(x,0,x) : x \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad U_2 = \{(0,y,-y) : x \in \mathbb{R}\}.$$

1.9 MUDANÇA DE BASE

1. **(a)** $[I]_\beta^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **(b)** $[v]_\beta = [I]_\beta^{\beta'} \bullet [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$.

2. **(a)** $[I]_\beta^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Por inversão, obtemos $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e, portanto, $[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} \bullet [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. **(a)** Sendo $f = (1-t^2)^2$, então

$$f' = -4t + 4t^3, \quad f'' = -4 + 12t^2, \quad f''' = 24t \quad \text{e} \quad f^{(4)} = 24$$

e, portanto, $\beta' = \left\{24, 24t, -4+12t^2, -4t+4t^3\right\}$. Tendo em vista que $\dim P_3 = 4$, é suficiente provar que β' é um conjunto com 4 vetores LI. De fato, considerando uma combinação linear nula dos vetores de β', encontramos

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= 24x_1 + (24x_2)\,t + x_3\left(-4+12t^2\right) + x_4\left(-4t+4t^3\right) \\
&\Leftrightarrow (24x_1 - 4x_3) + (24x_2 - 4x_4)\,t + (12x_3)\,t^2 + (4x_4)\,t^3 = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

e igualando os coeficientes a zero, encontramos $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

(b) Para chegar à matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$, de mudança da base β' para a base β, iniciamos escrevendo cada vetor w_j da base β' como combinação linear dos vetores v_i da base β, como na tabela.

β'	combinação linear de $v_1,\ v_2,\ v_3$ e v_4	β
$w_1 = 24$	$24 = 24\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$	$v_1 = 1$
$w_2 = 24t$	$24t = 0\cdot v_1 + 24\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4$	$v_2 = t$
$w_3 = -4+12t^2$	$-4+12t^2 = -4\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 12\cdot v_3 + 0\cdot v_4$	$v_3 = t^2$
$w_4 = -4t+4t^3$	$-4t+4t^3 = 0\cdot v_1 + -4\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 4\cdot v_4$	$v_4 = t^3$

Assim, a matriz de mudança $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. O procedimento para construir a matriz $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é: expressar cada vetor u_i da base β como combinação linear dos vetores v_j da base β'; as colunas da matriz são precisamente os vetores coordenadas $[u_i]_{\beta'}$. Fazendo $v_1 = (a,b)$ e $v_2 = (c,d)$ e observando a matriz $[I]_{\beta'}^{\beta}$, temos:

$$\begin{aligned}
(1,0) &= 1\cdot(a,b) + (-1)\cdot(c,d) \\
(0,1) &= 1\cdot(a,b) + 2\cdot(c,d)
\end{aligned}$$

e resolvendo o sistema, encontramos $a = 2/3,\ b = 1/3,\ c = -1/3$ e $d = 1/3$. Logo, $v_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $v_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

6. O sistema (1.6) é

$$\left| \begin{array}{ll} \overline{x} = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta & \text{(I)} \\ \overline{y} = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta & \text{(II)} \end{array} \right.$$

(i) Multiplicamos (I) por $\cos\theta$ e (II) por $-\mathrm{sen}\,\theta$ e somamos membro a membro, para obter

$$\overline{x}\cos\theta - \overline{y}\,\mathrm{sen}\,\theta = x.$$

(ii) Multiplicamos (I) por $\mathrm{sen}\,\theta$ e (II) por $\cos\theta$, somamos membro a membro e obtemos

$$\overline{x}\,\mathrm{sen}\,\theta + \overline{y}\cos\theta = y.$$

Daí resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

7. Não, porque a matriz A não é invertível. Note que $\det A = 0$.

8. $\beta' = \{(-11, 18), (2, 12)\}$.

9. Veja que as entradas da matriz de mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta'}$ abaixo da diagonal principal são nulas e, por esta razão, ela é triangular superior.

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.10 QUESTÕES DE REVISÃO

1. O conjunto $\{u + v + 2w, u + v, u - v - w\}$ é também LI. De fato, a equação vetorial

$$x \cdot (u + v + 2w) + y \cdot (u + v) + z \cdot (u - v - w) = \mathbf{0}$$

nos conduz à solução $x = y = z = 0$. Procedimento similar pode ser utilizado para testar se o conjunto $\{u + v - 3w, u + v, u + 3v - w\}$ é LI ou LD.

2. Note que o vetor $v = (\pi, \pi)$ está em W, enquanto $\frac{1}{2}v = (\pi/2, \pi/2) \notin W$, já que $\cos(\pi/2 + \pi/2) = -1$. Para verificar que o subconjunto U não é um subespaço vetorial, considere o vetor $w = (\pi/2, \pi/2, 0)$ de U e note que $\frac{1}{2}w$ não pertence a U.

3. O conjunto $\beta = \{1\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{F}$. O conjunto $\beta' = \{1, i\}$ é uma base do espaço $\mathbb{C}$, quando considerado um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Olhando $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, uma base é $\beta = \{1\}$.

4. É claro que cada vetor v_j, $j = 1, 2, \ldots k$, jaz no subespaço $[v_1, v_2, \ldots, v_k]$. Se W é qualquer subespaço de V contendo os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então as combinações lineares

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_k \cdot v_k$$

estão em W e, consequentemente, $[v_1, v_2, \ldots, v_k] \subset W$.

5. Se, por exemplo, $W_1 \subset W_2$, então $W_1 \cup W_2 = W_2$ e nada há a demonstrar. Por outro lado, suponha que $W_1 \cup W_2$ seja um subespaço e que nenhum deles esteja contido no outro. Escolha v_1 e v_2, de modo que

$$v_1 \in W_1 \backslash W_2 \quad \text{e} \quad v_2 \in W_2 \backslash W_1.$$

Note que $v_1, v_2 \in W_1 \cup W_2$ e, portanto, $v_1 + v_2 \in W_1 \cup W_2$. Ocorre que $v_1 + v_2 \notin W_1$ e $v_1 + v_2 \notin W_2$ e isso faz com que $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$.

6. Na forma escalonada, as matrizes geradoras têm posto igual a 2, com linhas não nulas iguais.

7. Mostremos que $\beta' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$ é uma base de $W_1 + W_2$.

   (a) Como $\{w_1, w_2, u_1\}$ gera W_1 e $\{v_1, v_2\}$ gera W_2, segue que $\{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$ gera o subespaço $W_1 + W_2$.

   (b) Para mostrar que $\beta' = \{w_1, w_2, u_1, v_1, v_2\}$ é um conjunto de vetores LI, suponha que

$$x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x \cdot u_1 + y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 = \mathbf{0}.$$

   onde x_1, x_2, x, y_1 e y_2 são escalares. O vetor

$$v = x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x \cdot u_1 = -y_1 \cdot v_1 - y_2 \cdot v_2$$

   está em $W_1 \cap W_2$ e, portanto, existem escalares t_1 e t_2, tais que$v = -y_1 \cdot v_1 - y_2 \cdot v_2 = t_1 \cdot w_1 + t_2 \cdot w_2$.

   Logo,

$$y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + t_1 \cdot w_1 + t_2 \cdot w_2 = 0$$

e, sendo os vetores w_1, w_2, v_1, v_2 linearmente independentes, resulta que $y_1 = y_2 = t_1 = t_2 = 0$ e, consequentemente, $v = \mathbf{0}$, de onde resulta que $x_1 = x_2 = x = 0$.

8. Considere os subespaços $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x, y, x - y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, com bases:

$$\beta_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad \beta_2 = \{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\},$$

respectivamente. Ressaltamos que $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$ e que $\beta_1 \cup \beta_2$ não é uma base de $W_1 + W_2$.

9. Não. Considere no espaço $\mathbb{R}^3$ os subespaços $W_1 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W_2 = \{(x, x, 0) : x, \in \mathbb{R}\}$. Temos que:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$$

e, ainda assim, o espaço $\mathbb{R}^3$ não é soma (e muito menos soma direta) de W_1 e W_2. Note que $W_1 + W_2 = W_1$.

10. Se $W_1 = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$ e $W_2 = [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n]$, então $\dim W_1 = k$ e $\dim W_2 = n - k$, de modo que $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$. Por outro lado, dado $v \in W_1 \cap W_2$, temos:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k = x_{k+1} v_{k+1} + x_{k+2} v_{k+2} + \ldots + x_n v_n$$

e daí resulta

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_k v_k - x_{k+1} v_{k+1} - x_{k+2} v_{k+2} - \ldots - x_n v_n = \mathbf{0}.$$

Logo, $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ e, portanto, $v = \mathbf{0}$. Assim, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ e teremos $V = W_1 \oplus W_2$.

11. Note que W_1 e W_3 são planos e, portanto, de dimensão 2, enquanto W_2 é uma reta (o eixo z). Nenhum dos planos W_1 ou W_3 contém a reta W_2 e isto nos dá:

$$W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad W_3 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3.$$

Finalmente, a soma $W_1 + W_3 = \mathbb{R}^3$ não é direta, já que $W_1 \cap W_3 = [(1, -2, 1)]$ e, portanto, $\dim (W_1 \cap W_2) = 1$.

12. A partir da relação

$$\dim (W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 + W_2) = 9 - \dim (W_1 + W_2)$$

deduza que os possíveis valores de $\dim (W_1 \cap W_2)$ são 2, 3 ou 4.

13. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de W_1, e também de W_2, e W_1 não está contido em W_2, deduzimos que $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$. Assim,

$$\dim(W_1 + W_2) = 3 \Rightarrow W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

e a soma é direta, já que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

14. O subespaço W é precisamente o espaço $\mathcal{P}_0$ dos polinômios constantes. Temos $\dim W = 1$ e uma base de W é, por exemplo, $\beta = \{1\}$.

15. Um cálculo direto nos dá:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Se $v_k \in [v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}]$, então

$$v_k = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{k-1} v_{k-1}$$

e daí resulta a combinação linear nula

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{k-1} v_{k-1} + (-1)\, v_k + 0 v_{k+1} + \cdots + 0 v_n = \mathbf{0},$$

onde o escalar $x_k = -1$ é não nulo. Isto mostra que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LD. Reciprocamente, suponhamos que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sejam LD e seja k o primeiro índice para o qual se tem $x_k \neq 0$ e

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{k-1} v_{k-1} + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n = \mathbf{0}.$$

Daí segue que $x_j = 0$, para $k + 1 \leq j \leq n$ e, portanto:

$$v_k = \frac{x_1}{x_k} v_1 + \frac{x_2}{x_k} v_2 + \ldots + \frac{x_{k-1}}{x_k} v_{k-1}.$$

FIM