2.1 Fundamentos Básicos

Recordemos que uma aplicação (ou transformação) $T : V \to W$ entre espaços vetoriais é linear quando:

(a) $T(u+v) = T(u) + T(v), \quad u, v \in V.$

(b) $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \quad u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$.

Podemos condensar essas duas condições em uma só e afirmar que $T : V \to W$ é linear quando

$$T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot T(u) + T(v), \quad \lambda \in \mathbb{F}, \quad u, v \in V.$$

É oportuno ressaltar que se $T : V \to W$ é linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (os vetores nulos de V e W estão representados pelo mesmo símbolo $\mathbf{0}$). Assim, se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, a aplicação T **não é linear**.

EXEMPLO A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (x, y, 1)$ não é linear, porque $T(0, 0) = (0, 0, 1)$ não é $\mathbf{0}$.

EXEMPLO A transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x, yz)$ não é linear, embora $T(0, 0, 0) = (0, 0)$. Se $u = (0, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 0)$, temos que

$$T(u+v) \neq Tu + Tv.$$

EXEMPLO A transformação $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = 1 + p(0)$ não é linear, porque $T(\mathbf{0}) = 1 \neq \mathbf{0}$.

EXEMPLO As translações $T(x, y) = (x + a, y + b)$ não são lineares, exceto no caso em que a e b são ambos nulos.

EXEMPLO A projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, no plano xy, definida por $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ é linear. Também é linear a projeção no eixo y dada por $P(x, y, z) = (0, y, 0)$.

TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES DO PLANO Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, além de descrever o tipo mais simples de dependência entre duas variáveis, goza de uma propriedade geométrica interessante: ela transforma retas em retas e circunferências em circunferências. Vejamos algumas transformações especiais.

1. CONTRAÇÕES & DILATAÇÕES Dado um número real positivo λ, as transformações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $T(v) = \lambda v$, isto é, $T(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, recebem o nome de *contração* ou *dilatação*, conforme seja λ menor ou maior do que 1.

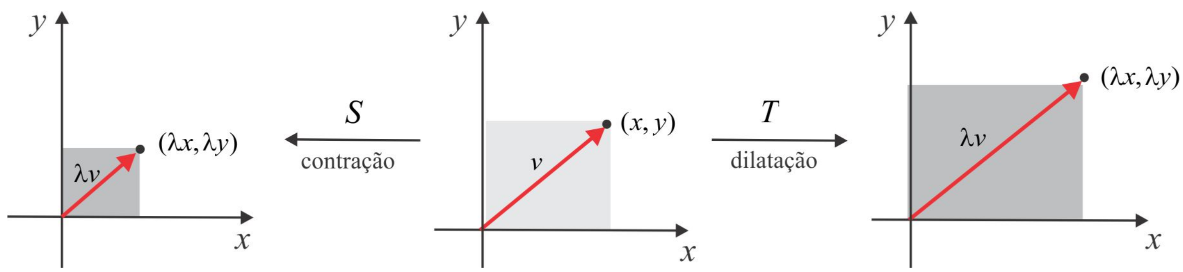


Figura 2.1: Contração & Dilatação

2. REFLEXÕES As transformações R_x, R_y e R_0 de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $R_x(x, y) = (x, -y)$, $R_y(x, y) = (-x, y)$ e $R_0(x, y) = (-x, -y)$, recebem os nomes de *reflexão no eixo x*, *reflexão no eixo y* e *reflexão na origem*, respectivamente. Veja a ilustração na Figura 2.2.

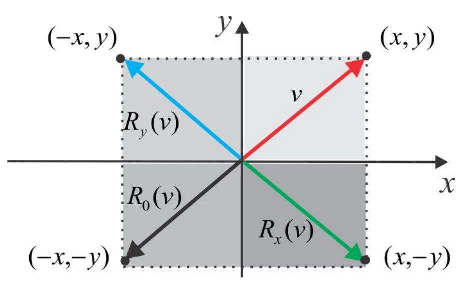


Figura 2.2: Reflexões.

3. ROTAÇÃO A transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

é conhecida por *rotação* de um ângulo θ. Veja a Seção 1.6.

4. CISALHAMENTOS Por *cisalhamento horizontal*, entendemos qualquer transformação $C_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, do tipo $C_\lambda(x, y) = (x + \lambda y, y)$, sendo λ uma constante real. Na Figura 2.3 ilustramos um cisalhamento em que $\lambda > 1$. Como seria um *cisalhamento vertical*?

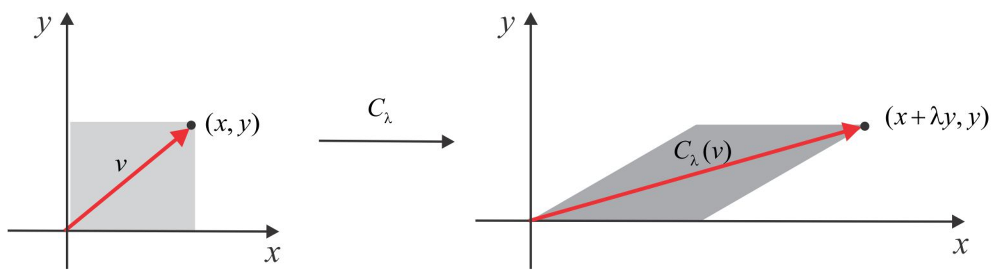


Figura 2.3: Cisalhamento Horizontal.

EXEMPLO Seja S o quadrado de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ e $C(0,1)$. Vamos encontrar a imagem de S pela transformação linear $T(x,y) = (x-y, x+2y)$. A imagem $T(S)$ é o quadrilátero ilustrado na Figura 2.4, de vértices

$$T(\mathbf{0}) = (0,0), \quad T(A) = (1,1), \quad T(B) = (0,3) \quad \text{e} \quad T(C) = (-1,2)$$

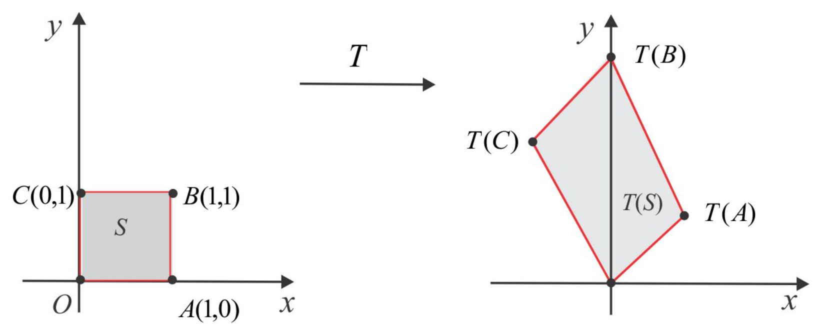


Figura 2.4: Imagem de um Quadrado.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Verifique quais das aplicações $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (x-y, 0)$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x, y, x+y)$
   (c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = ax$
   (d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z,t) = (y-x, t-z)$
   (e) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, \cos x)$
   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x-1, y+z)$
   (g) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $T(x) = \left(x, -x, x^2, 0\right)$
   (h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x, z-y)$

2. Seja A uma matriz quadrada 2×2 e defina $T_A : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ por $T_A(X) = AX$. É a aplicação T_A linear?

3. Mostre que a aplicação $T : \mathcal{M}_{3\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$ definida por $T(X) = X^t$ é linear.

4. Construa duas matrizes A e B, de ordem 2×2, tais que $\det(A) = \det(B) = 0$ e $\det(A+B) \neq 0$. A partir daí conclua que a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, definida por $T(X) = \det(X)$, não é linear.

5. Verifique que as aplicações abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{1\times 2}, \quad T(x) = \begin{bmatrix} x & ax \end{bmatrix}.$

   (b) $T : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathbb{R}, \quad T(A) = \operatorname{tr}(A).$

   (c) $T : \mathcal{M}_{2\times 1} \to \mathcal{M}_{2\times 2}, \quad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}.$

   (d) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_2, \quad T\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & z-t \end{bmatrix}.$

   (e) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_2, \quad T\begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} = (x-y)\,t^2 + zt + r.$

6. FUNCIONAIS LINEARES As aplicações lineares $T : V \to \mathbb{F}$, em que o espaço de chegada é o corpo $\mathbb{F}$ (em geral $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é o corpo dos números reais), são conhecidas na literatura como *funcionais lineares*. Verifique que os funcionais abaixo são lineares ou não.

   (a) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}, \quad T(p) = \int_0^1 p(x)\,dx.$

   (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}, \quad T(p) = p'(0).$

7. Verifique se a transformação $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, definida por $T(p)(x) = x + xp(x)$ é linear. E se fosse $S : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definida por $S(p)(x) = p(x) + x^2 p'(x)$, seria S linear?

8. O ESPAÇO DAS APLICAÇÕES LINEARES DE $\mathcal{L}(V, W)$ Representemos por $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto de todas as aplicações lineares $T : V \to W$, equipado da soma e do produto por escalar definidas de maneira natural por:

$$\begin{aligned} (S+T)(v) &= S(v) + T(v), \quad v \in V, \quad S, T \in \mathcal{L}(V, W). \\ (\lambda T)(v) &= \lambda T(v), \quad v \in V, \quad T \in \mathcal{L}(V, W). \end{aligned}$$

   As aplicações lineares de $V \to V$ são denominadas *operadores lineares* (ou simplesmente *operadores*) de V e o espaço vetorial $\mathcal{L}(V, V)$ será indicado por $\mathcal{L}(V)$. Além da aplicação identicamente nula, a aplicação identidade $I(v) = v$ também pertence a $\mathcal{L}(V)$. Para concluir que $\mathcal{L}(V, W)$ é, de fato, um espaço vetorial, mostre que:

(a) A aplicação identicamente nula um vetor de $\mathcal{L}(V, W)$

(b) Se T e S estão em $\mathcal{L}(V, W)$, mostre que $\lambda T + S \in \mathcal{L}(V, W)$, seja qual for o escalar λ.

9. COMPOSIÇÃO DE APLICAÇÕES LINEARES Sejam U, V e W três espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$ e considere duas aplicações lineares $T : U \to V$ e $S : V \to W$. Defina uma nova aplicação $S \circ T : U \to W$ por

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)), \quad u \in U.$$

Mostre que a aplicação $S \circ T$ é linear. Veja a ilustração gráfica da composição.

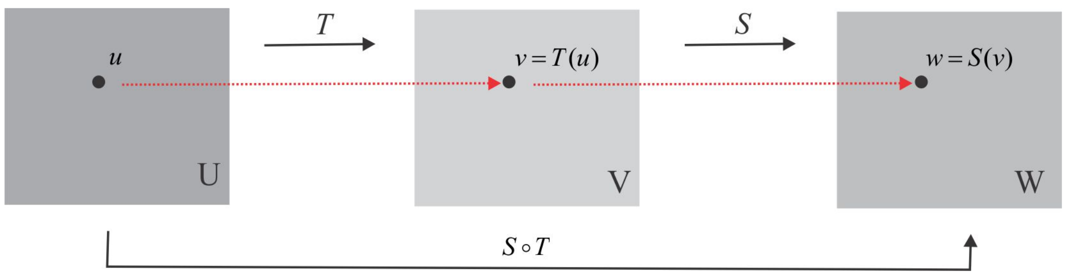


Figura 2.5: Composição de Aplicações Lineares.

10. INVERTENDO UMA APLICAÇÃO LINEAR Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$ (o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais, por exemplo), é simples verificar qua a *aplicação identidade* $I(v) = v$ é linear, isto é, $I \in \mathcal{L}(V, V)$. Se T e S são aplicações lineares de $V \to V$ e $S \circ T = I$, isto é, a composição de S com T é a identidade de V, diremos que S é a inversa de T e anotamos $S = T^{-1}$. Determine a inversa da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - y, y)$.

REGRA PRÁTICA Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n e considere

$$\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

uma base de V. Como veremos adiante, uma aplicação linear invertível $T : V \to W$ transforma a base β de V em uma base de W e podemos usar a base β para encontrar a transformação inversa $S = T^{-1}$. Se $w_k = T(v_k)$, então a inversa $S : W \to V$ é caracterizada por $S(w_k) = v_k$, isto é,

$$T(v_k) = w_k \quad \text{se, e somente se,} \quad S(w_k) = v_k$$

e dado $w \in W$, temos $w = y_1 \cdot T(v_1) + y_2 \cdot T(v_2) + \cdots + y_n \cdot T(v_n)$ e, portanto,

$$S(w) = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \cdots + y_n \cdot v_n.$$

11. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(1,2) = (1,1)$ e $T(0,1) = (1,0)$.

12. Seja $V = \mathcal{M}_{n\times n}$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n. Fixada uma matriz A em V, decida sobre a linearidade das transformações:

    (a) $T(X) = A + X$ **(b)** $S(X) = AX - XA$.

13. Identifique e esboce o gráfico da imagem do retângulo $R = [0,1] \times [1,2]$ pela transformação $T(x,y) = (x - y, -x + 2y)$.

14. Sejam a, b, c e d números reais positivos e considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$. Determine as duas raízes λ_1 e λ_2 da equação $\det[T - \lambda I_2] = 0$.

15. Identifique a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, que satisfaz a $T(x+1) = x^2 - 1$ e $T(x-1) = x^2 + x$.

16. Qual o operador $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ que satisfaz às condições $T(1) = x,\ T(x) = 1 - x^2$ e $T\left(x^2\right) = x + 2x^2$?

17. Encontre as transformações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tais que:

    $T(1,1) = (3,2,1)$, $T(0,-2) = (0,1,0)$, $S(3,2,1) = (1,1)$, $S(0,0,1) = (0,0)$ e $S(0,1,0) = (0,-2)$.

    Calcule $T(1,0)$ e $T(0,1)$ e encontre $S \circ T$.

18. Encontre a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma rotação de $\pi/4$ rad, seguida de dilatação de $\sqrt{2}$.

19. Descreva a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão em torno da reta $y = x$.

20. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear, definida por $T(x,y) = (x + y, x - y)$. Mostre que:

    $$T^2 = 2 \cdot T, \quad T^3 = 4 \cdot T \quad \text{e} \quad T^4 = 8 \cdot T.$$

    Usando o processo indutivo, deduza que $T^n = 2^{n-1} \cdot T$.

21. Construa dois operadores lineares não nulos $S,\ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tais que $T^2 = I$ e $S^2 = S$.

2.2 Núcleo e Imagem

A cada transformação linear $T : V \to W$, associamos os seguintes subespaços vetoriais:

▶ **NÚCLEO OU KERNEL DE T** Indicado por $\mathcal{N}(T)$ ou $\ker(T)$ o núcleo da transformação linear T é definido por:

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}\} \qquad \text{(subespaço vetorial de } V\text{)}$$

▶ **IMAGEM DE T** Indicada por $\operatorname{Im}(T)$ ou $T(V)$ a imagem da transformação linear T é definida por:

$$\operatorname{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v)\,,\ \text{para algum } v \in V\} \qquad \text{(subespaço vetorial de } W\text{).}$$

Na Figura 2.6 ilustramos geometricamente o núcleo e a imagem de uma aplicação linear $T : V \to W$.

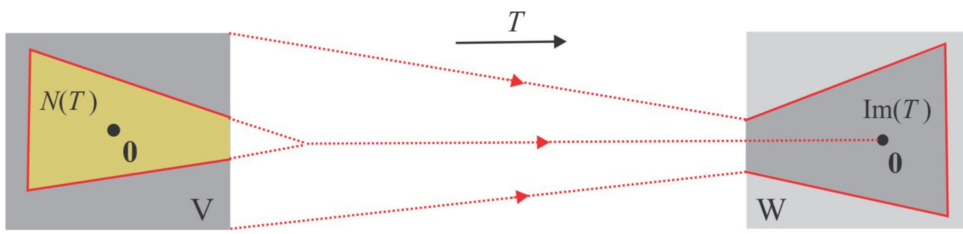


Figura 2.6: Núcleo & Imagem.

É oportuno ressaltar que se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então o subespaço $\operatorname{Im}(T)$ é gerado pelos vetores $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$ e dentre esses geradores podemos extrair uma base de $\operatorname{Im}(T)$. Por outro lado, o núcleo de T pode ser visto, em muitos casos, como o espaço solução de um sistema linear homogêneo, cuja dimensão é igual ao grau de liberdadde, e uma base do núcleo pode ser construída usando as variáveis livres do sistema. Um resultado que relaciona as dimensões de V, $\mathcal{N}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ é o Teorema do Núcleo e da Imagem que apresentamos a seguir:

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM Sejam V e W dois espaços vetoriais dimensão finita e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então:

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)\,.$$

EXEMPLO Como ilustração, vamos encontrar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem do operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$. Inicialmente, observamos que

$$(x, y, z) \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (z, x - y, -z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{e} \quad x - y = 0.$$

Assim, o núcleo de T é o subespaço $\mathcal{N}(T) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, uma base $\mathcal{N}(T)$ é $\beta = \{(1, 1, 0)\}$ e $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Quanto à imagem, esta é gerada pelos vetores $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ e $T(\mathbf{e}_3)$, isto é,

$$\operatorname{Im}(T) = [T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)] = [(0,1,0), (0,-1,0), (1,0,-1)].$$

Escalonando a matriz geradora de $\operatorname{Im}(T)$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de onde resulta que os vetores $w_1 = (1, 0, -1)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$ formam uma base de $\operatorname{Im}(T)$ e, por conseguinte, $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$. Temos que

$$w \in \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow w = xw_1 + yw_2 \Leftrightarrow w = (x, y, -x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

e, sendo assim,

$$\operatorname{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x\right\}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cujo núcleo contém o vetor $(0, 2)$, e é tal que $T(-1, 1) = (1, 2, 0)$.

2. Em cada caso, encontre uma base do núcleo e da imagem da transformação linear.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y) = (x + y, x + y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y, z) = (x + 2y, z)$.

3. Seja $T_A : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$, definida por $T_A(X) = AX$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Determine bases de $\mathcal{N}(T_A)$ e de $\operatorname{Im}(T_A)$.

4. Mostre que a transformação $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$, definida por $T(p(x)) = p(x) + x^2 p'(x)$ é linear e determine o núcleo e a imagem de T.

5. Repita o exercício precedente com o operador $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, definido por $T(p(x)) = x^2 p''(x)$.

6. Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\operatorname{Im}(T) = [(1,2,3), (4,0,5)]$. Uma tal transformação pode ser um isomorfismo? Por quê?

7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{N}(T) = [(1,1,0)]$. Uma tal transformação pode ser um isomorfismo? Por quê?

8. Se $T_1, T_2 : V \to V$ são operadores lineares, tais que $\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_2) = 0$, mostre que $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) = 0$.

9. Dada uma transformação linear $T : V \to W$, use o Teorema do Núcleo e da Imagem e prove as seguintes afirmações:

   (a) Se $\dim V < \dim W$, então T não pode ser sobrejetora.

   (b) Se $\dim V > \dim W$, então T não pode ser injetora.

   (c) Se T é um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$.

10. Estabeleça um isomorfismo entre os seguintes pares de espaços vetoriais:

    (a) $\mathbb{R}^2$ e o subespaço $W = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\}$ **(b)** $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2$ (c) $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cujo núcleo seja a reta $y = 2x$.

12. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vetores LI de V. Se $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, mostre que $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$ são LI.

13. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ o operador definido por

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a + 2b)\,x + (b + c)\,.$$

    (a) O operador T é injetor? É sobrejetor?

    (b) Dê uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T.

    (c) $p(x) = -4x^2 + 2x - 2$ pertence a $\mathcal{N}(T)$? E $q(x) = 2x + 1$ pertence a $\operatorname{Im}(T)$?

14. Um operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem núcleo $\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$ e é tal que $T(0,0,1) = (1,1,1)$. Encontre um tal operador.

15. Considere o *operador derivação* $\partial_1 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, definido por $\partial_1 (p(x)) = p'(x)$. Determine o núcleo e a imagem do operador ∂_1. Qual o núcleo do operador $\partial_2 (p(x)) = p''(x)$?

16. Encontre uma transformação lnear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:

    (i) $T(1,-1) = (1,2,0)$ e **(ii)** $(1,0) \in \mathcal{N}(T)$.

17. Mostre que $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2)$ se, e somente se, T é invertível.

18. Prove ou apresente um contra-exemplo.

    (a) Se $T : V \to V$ é linear e não nulo, então $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2)$.

    (b) Se $T : V \to V$ é linear e não nulo, então $\mathcal{N}(T^2) \subset \mathcal{N}(T)$.

    (c) Se $T : V \to V$ é linear e não nulo, então $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Im}(T^2)$.

    (d) Se $T : V \to V$ é linear e não nulo, então $\operatorname{Im}(T^2) \subset \operatorname{Im}(T)$.

    (e) Se $T \neq \mathbf{0}$ e $T^2 = \mathbf{0}$, então $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

2.3 Representação Matricial

Nesta seção há dois problemas a serem tratados e os exemplos que seguem à formulação de cada um deles ilustram como resolvê-los.

► APLICAÇÃO LINEAR ASSOCIADA A UMA MATRIZ Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ são bases de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, e $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem $n \times m$, encontrar a aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, determinada pela relação

$$[T(v)]_{\beta'} = A \cdot [v]_\beta . \tag{2.1}$$

onde $[v]_\beta$ e $[T(v)]_{\beta'}$ são as matrizes coordenadas de v e de $T(v)$ nas bases β e β'. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, temos

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_m v_m, \quad \text{isto é,} \quad [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

e consideremos os escalares $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que satisfazem à relação (2.1), ou seja

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A aplicação linear T vem dada por $T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_n w_n$.

EXEMPLO Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1,0), (0,1,-1), (1,0,2)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dado $v = (x, y)$ um vetor do $\mathbb{R}^2$, temos que

$$v = x(1,0) + y(0,1) \Rightarrow [v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e usando a relação (2.1), encontramos

$$[T(v)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x+2y \\ x-3y \end{bmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow & y_1 \\ \longleftarrow & y_2 \\ \longleftarrow & y_3 \end{matrix}$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= x(1,1,0) + (x+2y)(0,1,-1) + (x-3y)(1,0,2) \\ &= (2x-3y, 2x+2y, x-8y) \end{aligned}$$

é a aplicação linear procurada.

EXEMPLO Se β e β' são as bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, então a transformação T que satisfaz (2.1) é dada por

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad \text{onde} \qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, com relação às bases canônicas a aplicação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ associada à matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

é precisamente

$$T(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = (x = y + 2z, -2x + y + 3z + t, y + 2z - t).$$

► **MATRIZ ASSOCIADA A UMA APLICAÇÃO LINEAR** Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita e considere $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases de V e W, respectivamente. Associada à transformação linear T consideramos a $n \times m$ matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$, cuja j-ésima coluna é $[T(v_j)]_{\beta'}$. A matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é construída da seguinte forma: escrevemos cada vetor $T(v_j)$ como combinação linear da base β' e formamos a j-ésima coluna da matriz.

$$\left| \begin{array}{l} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T(v_m) = a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \cdots + a_{nm}w_n \end{array} \right.$$

Assim, a matriz associada à aplicação T é:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & v & a_{nm} \end{bmatrix}$$

No caso em que $\beta = \beta'$, a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$ será indicada simplesmente por $[T]_{\beta}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Seja $I : V \to V$ o *operador identidade* de V, isto é, $I(v) = v$, $\forall v$. Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, determine a matriz $[I]_\beta$. Se β' é outra base de V, quem é $[I]_{\beta'}$?

2. Qual é a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, cuja representação matricial em relação às bases canônicas é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - y - z)$ e considere as bases
$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1,1,0), (1,1,1), (1,-2,-1)\}.$$
Determine a matriz $[T]_\beta^{\beta'}$.

4. Sejam $\beta = \{(0,1,1), (1,0,0), (1,0,1)\}$ e $\beta' = \{(-1,0), (0,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que
$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine $T(x, y, z)$.

   (b) Determine bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$. É a transformação T injetora?

5. Em relação às bases ordenadas $\beta = \{t, 1\}$ e $\beta' = \{t^2, t-1, t+1\}$ de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente, qual a matriz da transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, definida por $T(p(t)) = tp(t)$?

6. Sejam $\beta = \{(1,-1), (0,2)\}$ e $\beta' = \{(1,0,-1), (0,1,2), (1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que
$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Determine $T(x, y)$.

(b) Encontre uma base β'' do $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]^{\beta}_{\beta''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear, definida por

$$T \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = (x+z, y+t)$$

e seja β a base canônica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(a) Determine $[T]^{\beta}_{\beta'}$, onde $\beta' = \{(1,-1), (1,2)\}$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ é tal que

$$[S]^{\beta'}_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine, caso exista, um vetor v, tal que $Sv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear, cuja matriz em relação à base canônica β é

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, caso exista, vetores u e v tais que $Tu = u$ e $Tv = -v$.

(b) Determine $\dim \mathcal{N}(T)$ e $\dim \operatorname{Im}(T)$.

(c) T é um isomorfismo? Se for, encontre $T^{-1}(x,y)$ e a matriz $\left[T^{-1}\right]_{\beta}$.

9. Seja $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ o funcional linear definido por

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx.$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas.

10. Seja $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ o operador linear definido por $T(p(x)) = (1-x)\,p'(x)$. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathcal{P}_1$.

11. **SOBRE A MATRIZ DA APLICAÇÃO COMPOSTA** Dadas as aplicações lineares $T : \{V, \beta\} \to \{W, \beta'\}$ e $T : \{W, \beta'\} \to \{U, \beta''\}$ a matriz da aplicação composta $S \circ T : \{V, \beta\} \to \{U, \beta''\}$ pode ser determinada pela regra:

$$[S \circ T]_{\beta''}^{\beta} = [S]_{\beta''}^{\beta'} \bullet [T]_{\beta'}^{\beta}.$$

Quando $T : \{V, \beta\} \to \{W, \beta'\}$ for um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$ e a matriz da aplicação inversa $T^{-1} : \{W, \beta'\} \to \{V, \beta\}$ será dada por

$$\left[T^{-1}\right]_{\beta}^{\beta'} = \left([T]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1}.$$

Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x - y, y, y + z)$ é um isomorfismo e encontre as matrizes $[T]_\beta$ e $\left[T^{-1}\right]_\beta$, em relação à base canônica β.

12. Sejam T_1 e T_2 operadores do $\mathbb{R}^3$, com representação matricial

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre o operador T, sabendo que $T_1 = T_2 \circ T$.

13. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sejam T_A e T_B as transformações canônicas definidas pelas matrizes A e B, respectivamente. Encontre bases dos subespaços

$$\mathcal{N}(T_A),\ \mathcal{N}(T_B),\ \mathcal{N}(T_B \circ T_A),\ \operatorname{Im}(T_A),\ \operatorname{Im}(T_B) \text{ e } \operatorname{Im}(T_B \circ T_A).$$

14. Em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente, considere as bases

$$\beta = \{(1,0,0), (-1,0,1), (1,1,0)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1,0,0,1), (-1,0,1,0), (1,1,0,0), (-1,2,0,1)\}$$

e seja A a matriz 3×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, tal que $[T(v)]_\beta = A[v]_{\beta'}$. Essa é a transformação associada à matriz A e às bases β e β'. Quando β e β' são as bases canônicas, teremos:

$$T(v) = A \cdot v, \quad \text{isto é,} \quad T(x,y,z,t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

15. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ as transformações lineares definidas por

$$T(x,y,z) = (x+2y, x-z) \quad \text{e} \quad S(x,y) = (x, x-y, 2y, 2x+y).$$

e considere as bases

$$\begin{aligned} \beta &= \{(1,0),(1,1)\} && (\text{base do } \mathbb{R}^2) \\ \beta' &= \{(1,0,0),(1,1,1),(0,1,-1)\} && (\text{base do } \mathbb{R}^3) \\ \beta'' &= \{(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(1,-1,0,0)\} && (\text{base do } \mathbb{R}^4) \end{aligned}$$

(a) Encontre as matrizes $[T]_\beta^{\beta'}$ e $[S]_{\beta''}^{\beta}$ e calcule o produto $[S]_{\beta''}^{\beta} \cdot [T]_\beta^{\beta'}$.

(b) Determine $(S \circ T)(x,y,z)$.

(c) Encontre a matriz $[S \circ T]_{\beta''}^{\beta'}$.

16. Sejam $\beta = \{(1,1,0),(-1,0,1),(-1,1,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x,y,z) = (x+y-2z, x-y, x+z).$$

(a) Mostre que T é um isomorfismo e encontre a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

(b) Encontre a transformação inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a matriz $\left[T^{-1}\right]_\beta^{\beta'}$.

(c) Escalone a matriz ampliada $\left[[T]_{\beta'}^{\beta}, I_3\right]$.

17. Considere as seguintes bases do espaço $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por: $T(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$. Verifique diretamente que a matriz S, de mudança da base β para a base β', satisfaz a relação:

$$[T]_\beta = S^{-1} \cdot [T]_{\beta'} \cdot S. \tag{eq2.1}$$

A relação (**??**) estabelece a equivalência entre as matrizes $[T]_\beta$ e $[T]_{\beta'}$ e a matriz S recebe o nome de matriz de *similaridade*.

2.4 Autovalor & Autovetor

UM BREVE COMENTÁRIO Dada uma transformação linear $T : V \to V$, um problema típico de álgebra linear consiste em encontrar um escalar λ e um vetor v, tais que $T(v) = \lambda v$. É claro que $v = \mathbf{0}$ satisfaz à equação $T(v) = \lambda v$, seja qual for o escalar λ, e o problema torna-se interessante quando o vetor procurado v for não nulo. Um tal escalar λ denomina-se *autovalor* (ou *valor característico*) da transformação T e o vetor não nulo v um *autovetor* (ou *vetor característico*) de T, associado ao autovalor λ. Se v é um autovetor de T, associado ao autovalor λ, então qualquer múltiplo escalar de v também o é; se λ é um autovalor de T, representamos por V_λ o subespaço vetorial de V constituído pelos vetores v, tais que $T(v) = \lambda v$. Esse subespaço recebe o nome de *auto-espaço* associado a λ. O auto-espaço V_λ é constituídos dos autovetores associados ao autovalor λ, mais o vetor nulo.

Dada uma base β de V, se representarmos por A a matriz de T na base β, os autovalores de T são as soluções λ da equação matricial $A[v]_\beta = \lambda [v]_\beta$, isto é, as soluções da equação $(A - \lambda I)[v]_\beta = \mathbf{0}$. No caso em que $V = \mathbb{R}^n$, esta equação nos conduz a um sistema linear homogêneo, o qual terá solução não nula quando $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, quando λ for uma raiz do polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, denominado *polinômio característico* de T.

EXEMPLO Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, contendo apenas autovetores de T, então a matriz $[T]_\beta$ é uma matriz diagonal. Para comprovar esse fato, basta observar que

$$T(v_j) = \lambda_j v_j = \boxed{0} \cdot v_1 + \boxed{0} \cdot v_2 + \cdots + \boxed{0} \cdot v_{j-1} + \boxed{\lambda_j} \cdot v_j + \boxed{0} \cdot v_{j+1} + \cdots + \boxed{0} \cdot v_n.$$

e os escalares destacados formam a j-ésima coluna da matriz.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, determine o polinômio característico do operador, seus autovalores e autovetores correspondentes. Por fim, encontre uma base dos auto-espaços associados.

   (a) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (2y, x)$.

   (b) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x+y, 2x+y)$.

   (c) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x+y+z, 2y+z, 3z)$.

   (d) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x,y,z) = (x+y, x-y+z, 2x+y-z)$.

   (e) $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x,y,z,t) = (x, x+y, x+y+z, x+y+z+t)$.

   (f) $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x,y,z,t) = (2x+y, 2y, 2z, 3t)$.

   (g) $T:\mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}, \quad T(A) = A^t$. **($A^t$ é transposta de A)**

   (h) $T:\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1, \quad T(ax+b) = 2ax - b$.

   (i) $T:\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad T(p(x)) = p'(x)$.

   (j) $T:\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad T\left(ax^2+bx+c\right) = ax^2 + cx + b$.

   (k) $T:\mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad T(p(x)) = p(x+1)$.

   (l) $T:\mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3, \quad T(p(x)) = \left(1-x^2\right)p''(x) - 2xp'(x)$.

2. Mostre que um operador $T:V\to V$, com um autovalor nulo, não pode ser injetor.

3. No espaço $\mathbb{R}^2$, considere as bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(-1,0),(1,2)\}$. Determine o polinômio característico do operador $T(x,y) = (x, x+y)$, usando as matrizes $[T]_\beta$ e $[T]_{\beta'}$.

4. Seja $R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$ o operador de rotação. Se $\theta = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, mostre que os autovalores de R_θ são $\lambda = \pm 1$.

5. Identifique o operador de $\mathbb{R}^2$, com autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, e respectivos autovetores $v_1 = (3,1)$ e $v_2 = (-2,1)$.

6. Se T é um isomorfismo, com autovalor λ, mostre que $\dfrac{1}{\lambda}$ é um autovalor do operador inverso T^{-1}.

7. Mostre que autovetores (não nulos) associados a autovalores distintos são LI.

8. Sejam λ e μ dois autovalores distintos do operador $T : V \to V$. Mostre que $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$.

9. Se λ é um autovalor do operador $T : V \to V$, mostre que λ^2 é um autovalor do operador T^2.

10. **SUBESPAÇO INVARIANTE** Dado um operador $T : V \to V$, diremos que um subespaço W de V é *invariante* pelo operador T ou é T-*invariante*, quando $T(W) \subset W$. Se λ é um autovalor do operador T, mostre que o auto-espaço V_λ é invariante por T.

2.5 Operadores Diagonalizáveis

Por *diagonalizar* um operador $T : V \to V$, entendemos *associá-lo* a uma matriz diagonal. Isso consiste em encontrar, caso exista, uma base de V em relação à qual a matriz de T é diagonal. Uma tal base de V deve ser constituída de autovetores de T.

REGRA DE DIAGONALIZAÇÃO Suponhamos $\dim V = n$ e que $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ sejam os autovalores distintos do operador $T : V \to V$. Se V_{λ_j} são os auto-espaços correspondentes e

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_r} = n$$

então o operador T é diagonalizável e se β_j é uma base do auto-espaço V_{λ_j}, então

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \cdots \cup \beta_r$$

é uma base de V que diagonaliza T, isto é, a matriz $[T]_\beta$ é diagonal. Na diagonal principal da matriz $[T]_\beta$ figuram os autovalores de T e o número de vezes que cada autovalor aparece na diagonal corresponde à sua multiplicidade como raiz do polinômio característico.

EXEMPLO Um operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que possui dois autovalores distintos é diagonalizável. Neste caso, os dois autoespaços têm dimensão igual a 1. De forma mais geral, se $\dim V = n$ e o operador $T : V \to V$ possui n autovalores distintos, um tal operador T é diagonalizável.

EXEMPLO Seja T o operador do $\mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ (de multiplicidade 2) e $\lambda_2 = -1$, que são as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(-1 - \lambda)$, e os auto-espaços correspondentes são:

$$V_3 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_{-1} = \{(4z, -5z, 4z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Vemos que $\dim V_3 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$ e, portanto, T é diagonalizável. Em relação à base de autovetores $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (4,-5,4)\}$ a matriz de T é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\beta_1 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ e $\beta_2 = \{(4,-5,4)\}$ são bases dos auto-espaços V_3 e V_{-1}, respectivamente.

EXEMPLO Seja T o operador do $\mathbb{R}^3$, definido por $T(x,x,z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, que são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12,$$

e os auto-espaços correspondentes são:

$$V_2 = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_3 = \{(-2y, y, y) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Vemos que $\dim V_2 + \dim V_3 = 1 + 1 \neq \dim \mathbb{R}^3$ e, portanto, T não é diagonalizável.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, encontre uma base de V que diagonaliza o operador $T : V \to V$.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x,y) = (2x, x - y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (x + y, -2y, z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (-2x, x - y, 4x + 3y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (x, -2x + 2y, 12x - 3z)$.

2. Se a matriz do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base canônica é simétrica, mostre que T é diagonalizável.

3. Determine, caso exista algum, os valores de a que tornam os operadores $T(x,y) = (x + y, ay)$ e $S(x,y) = (x + ay, y)$ diagonalizáveis.

2.6 Questões de Revisão

1. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetorias de V, tais que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Mostre que $T(u,v) = u + v$ define um isomorfismo de $W_1 \times W_2$ sobre $W_1 \oplus W_2$.

2. Se duas transformações lineares $S, T : V \to W$ são iguais nos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de uma base de V, mostre que $S(v) = T(v)$, $\forall v \in V$.

3. Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, mostre que a aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ também o é.

4. Se $T : V \to W$ é um isomorfismo linear, mostre que $\dim V = \dim W$ e T transforma uma base de V em uma base de W.

5. Seja $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador definido por $P(x,y,z,t) = (x,y,0,0)$. Mostre que:

   (a) $P^2 = P \qquad (P^2 = P \circ P)$.

   (b) $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

   (c) Encontre uma base β do $\mathbb{R}^4$, tal que
$$[P]_\beta = \begin{pmatrix} [I_2] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

6. Dado um isomorfismo $T : V \to V$, com $\dim V < \infty$, qual a relação entre as matrizes $[T]^{\beta}_{\beta'}$ e $\left[T^{-1}\right]^{\beta'}_{\beta}$?

7. Mostre que um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma retas em retas.

8. Qual a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pelo operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T(x,y) = (ax + by, bx + ay)$, sendo $a \neq b$.

9. Encontre a expressão do operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que representa uma rotação de $\pi/3\,\text{rad}$ em torno da reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $v = (1,1,0)$.

10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador que representa uma reflexão através da reta $y = 3x$. Encontre $T(x,y)$ e uma base β do $\mathbb{R}^2$, tal que
$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Sejam T e R os operadores do $\mathbb{R}^3$ que representam, respectivamente, a projeção e a reflexão no plano $\pi : 3x + 2y + z = 0$.

    (a) Encontre $T(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$.

    (b) Encontre bases β e β' do $\mathbb{R}^3$, tais que

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [R]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

    (tais bases devem conter dois vetores v_1 e v_2 do plano e um vetor v_3 ortogonal ao plano π)

12. Se $p(\lambda) = (\lambda - a)^n$ é o polinômio característico de um operador diagonalizável $T : V \to V$, com $\dim V = n$, mostre que $[T]_\beta = aI$, seja qual for a base β de V.

13. Repita o Exercício 2.4A(k), com o operador $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$, dado por $T(p(x)) = p(x+1)$. Considere a base $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

2.1 FUNDAMENTOS BÁSICOS

1. São lineares as aplicações (a), (b), (c), (d) e (h). Nos casos (e) e (f), temos $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ e, portanto, T não é linear. Para verificar que a aplicação (g) não é linear, basta observar que $T(-1) \neq -T(1)$.

2. Sim. Usando as propriedades do produto matricial, temos

$$T_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda T_A(X) + T_B(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Usando as propriedades da transposição de matrizes, temos:

$$T(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)^t = \lambda X^t + Y^t = \lambda T(X) + T(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 3}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $\det A = \det B = 0$ e $\det(A+B) = \det I_2 = 1$. Para essas matrizes, temos $T(A+B) \neq T(A) + T(B)$ e isso mostra que T não é linear.

5. Vejamos o ítem (c), como ilustração. Sejam $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ dois vetrores em $\mathcal{M}_{2\times 1}$ e seja λ um escalar. Temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u + v) &= Tu = T\begin{pmatrix} \lambda x + z \\ \lambda y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + z & 0 \\ 0 & \lambda y + t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ & \lambda \cdot T(u) + T(v). \end{aligned}$$

6. Em (a), usamos a linearidade da integral e obtemos

$$T(\lambda p + q) = \int_0^1 (\lambda p(x) + q(x))\, dx = \lambda \int_0^1 p(x)\, dx + \int_0^1 q(x)\, dx = \lambda T(p) + T(q).$$

Em (b), usamos a lienearidade da derivada. Temos

$$T(\lambda p + q) = [\lambda p(x) + q(x)]' = \lambda p'(0) + q'(0) = \lambda T(p) + T(q),$$

para $\lambda \in \mathbb{R},\ p, q \in \mathcal{P}_2$.

7. A transformação T não é linear, porque $T(\mathbf{0})$ é o vetor (polinômio) não nulo $p(x) = x$. No caso da aplicação S, dados p e q no espaço $\mathcal{P}_1$ e um escalar λ,temos:

$$\begin{aligned} S(\lambda \cdot p + q)(x) &= (\lambda \cdot p + q)(x) + x^2 (\lambda \cdot p + q)'(x) \\ &= \lambda \cdot \big(p(x) + x^2 p'(x)\big) + q(x) + x^2 q'(x) = [\lambda \cdot S(p) + S(q)](x). \end{aligned}$$

Logo, $S(\lambda \cdot p + q) = \lambda \cdot S(p) + S(q)$ e, portanto S é linear.

8. Atividade de Sala de Aula.

9. Atividade de Sala de Aula.

10. Atividade de Sala de Aula.

17 Temos: $T(x, y) = \frac{1}{2}(6x, 5x - y, 2x)$ e $S(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, 5x - y, 3x)$. Assim,$(S \circ T)(x, y) = (x, y)$.

19 $T(x, y) = (y, x)$

20 O caso geral $T^n = 2^{n-1} \cdot T$ é deduzido de forma indutiva. Como ilustração, vejamos o caso $n = 2$. Temos:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x + y, x - y) = T(2x, 2y) = 2 \cdot T(x, y).$$

21 $T(x,y) = (y,x)$ e $S(x,y) = \frac{1}{2}(x-y, y-x)$.

2.2 NÚCLEO & IMAGEM

1. Considere a base $\beta = \{(0,2), (-1,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e observe que $(x,y) = \frac{1}{2}(y-x)(0,2) + x(-1,1)$, de modo que:

$$T(x,y) = \frac{1}{2}(y-x) \cdot T(0,2) + x \cdot T(-1,1) = x \cdot (1,2,0) = (x, 2x, 0).$$

2. Em cada caso, identifique o núcleo e a imagem da aplicação linear.

   (a) $\mathcal{N}(T) = \{(x,2x) : x \in \mathbb{R}\}$ e uma base do núcleo é $\beta = \{(1,2)\}$. A imagem do operador T é o eixo x e uma base de $\mathrm{Im}(T)$ é $\beta' = \{(1,0)\}$.

   (b) $\beta = \{(-2,1,1)\}$ é uma base do núcleo de T. O subespaço $\mathrm{Im}(T)$ é consiste dos vetores da forma:

$$(x+2y, y-z, x+2z) = x \cdot (1,0,1) + y \cdot (2,1,0) + z \cdot (0,-1,2)$$

   e $\beta' = \{(1,0,1), (0,-1,2)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

3. O núcleo de T é constituído da matrizes da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ e uma base de $\mathcal{N}(T)$ é:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Acrescentando à base β os vetores $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtemos uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e o conjunto $\beta' = \{T(X_3), T(x_4)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

4. $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}_2$.

2.2B

(a)

2.2G Considere a base $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e defina o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por:

$$T(1,0,0) = (1,2,3), \quad T(1,0,0) = (4,0,5) \quad \text{e} \quad T(1,0,0) = (0,0,0).$$

Um tal operador não pode ser um isomorfismo, porque $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.

2.3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

1. Em qualquer base β do espaço V a matriz $[I]_\beta$ é a matriz identidade $n \times n$.

2. Um vetor (polinômio) genérico de $\mathcal{P}_1$ é $p(t) = a + bt$ e a aplicação é $T(a + bt) = a + bt$.

3. A matriz de $[T]_\beta^{\beta'}$ é:

$$[T]_\beta^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. **(a)** $T(x,y,z) = (-2y + z, -x + y)$.

   (b) Considerando $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$, então a imagem de T é gerada pelos vetores $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$. Como $T(v_1) = (-1,1)$ é combinação linear $T(v_2)$ e $T(v_3)$, estes dois últimos LI, segue que $\{T(v_2), T(v_3)\}$ é uma base de $\operatorname{Im}(T)$. O núcleo de T tem dimensão 1 e $\mathcal{N}(T) = [(1,1,2)]$.

5. Considerando as bases ordenadas β e β', encontramos:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. O ponto de oartida é a relação $[T]_\beta = [T]_\beta^{\beta'} [v]_{\beta'}$.

   (a) $T(x,y) = \frac{1}{2}(x - y, x - y, 4x + 2y)$.

   (b) Considere a base $\beta'' = \{w_1, w_2, w_3\}$, sendo

$$w_1 = T(1,-1) = (1,1,1) \quad \text{e} \quad w_3 = T(0,2) = (-1,-1,2)$$

   e escolha w_2 LI com w_1 e w_3. Por exemplo, $w_2 = (0,0,1)$.

7. **(a)** A matriz $[T]_{\beta}^{\beta'}$ é a matriz 2×4

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) Dado $v = (x, y)$, temos que $[v]_{\beta'} = \frac{1}{3}(2x - y, x + y)$ e, portanto:

$$[Sv]_{\beta} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ x - 2y \\ 2x - y \\ x + y \end{bmatrix} \Leftrightarrow Sv = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 3y & x - 2y \\ 2x - y & x + y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$Sv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5x - 3y = 3 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{array} \right.$$

e, como o sistema não tem solução, um tal vetor v não existe.

8. A aplicação T é dada por $T(x, y) = (-x - 2y, y)$.

(a) Os vetores do tipo $u = (x, -x)$ satisfazem a $Tu = u$, enquanto os vetores $v = (x, 0)$ satisfazem a $Tv = -v$.

(b) Temos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, de modo que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. On the other hand,

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathcal{N}(T) = 2.$$

(c) Sendo T injetora e sobrejetora, concluímos que T é um isomorfismo. Se $T^{-1}(x, y) = (a, b)$, então:

$$(x, y) = T(a, b) = (-a - 2b, b)$$

e daí resulta que $a = -x - 2y$ e $b = y$. Logo, $T^{-1}(x, y) = (-x - 2y, y)$. Com a notação matricial, temos:

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. As bases canônicas de $\mathcal{P}_3$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente:

$$\beta = \{1, t, t^2, t^3\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{1\}$$

e um cálculo direto nos conduz a:

$$T(1) = 1, \ T(t) = 1/2, \ T(t^2) = 1/3 \quad \text{e} \quad T(t^3) = 1/4.$$

Assim,

$$[T]^{\beta}_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

10. A base canônica de $\mathcal{P}_1$ é $\beta = \{1, t\}$ e temos que

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \quad \text{e} \quad T(t) = 1 - t = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t$$

e, portanto,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Um operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ será um isomorfismo se, e somente se, for injetor. (veja as dimensões). Temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (0,0,0) \Leftrightarrow (x - y, y, y + z) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{N}(T) = \{(0,0,0)\}$ e T é um isomorfismo. As matrizes de T e T^{-1} na base canônica β são:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T^{-1}]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde observamos que $[T]_\beta \cdot [T^{-1}]_\beta = I_{3\times 3}$.

12. Desde que $T_1 = T_2 \circ T$, então $T = T_2^{-1} \circ T_1$ e o operador T é representado, com relação à base canônica, pela matriz $A \cdot [T_1]$, onde a matriz A é a inversa da matriz $[T_2]$. Assim,

$$[T] = [T_2]^{-1} \cdot [T_1].$$

13. As aplicações T_A e T_B são dadas por:

$$T_A(x,y) = (y, 2y, y) \quad \text{e} \quad T_B(x,y,z) = (0, x+2y+z, -x)$$

e, portanto, $T_B \circ T_A(x,y) = (0, 6y, -y)$. Temos:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{N}(T_A) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \beta = \{(1,0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_A) = 1. \\ \mathcal{N}(T_B) = \{(0,y,-2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \beta = \{(0,1,-2)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) = 1. \\ \mathcal{N}(T_B \circ T_A) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \beta = \{(1,0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B \circ T_A) = 1. \end{array}$$

As colunas da matriz que representa a aplicação linear geram a imagem de tal aplicação. Observando as matrizes das aplicações T_A, T_B e $T_B \circ T_A$, deduzimos que

$$\begin{array}{lll} \operatorname{Im}(T_A) = [(1,2,1)] & \text{Base:} \quad \beta = \{(1,2,1)\}, & \dim \operatorname{Im}(T_A) = 1. \\ \operatorname{Im}(T_B) = \{(0,y,-2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \beta = \{(0,1,0),(0,1,-1)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) = 2. \\ \operatorname{Im}(T_B \circ T_A) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \beta = \{(0,6,-1)\}, & \dim \operatorname{Im}(T_B \circ T_A) = 1. \end{array}$$

14. Dado $v = (x,y,z,t)$ do $\mathbb{R}^4$, um cálculo direto nos dá

$$[v]_{\beta'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

e, por conseguinte,

$$[T(v)]_\beta = A \cdot [v]_{\beta'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z + 2t \\ 4x + 8z + 4t \\ x + 3y - 3z - t \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(v) &= \frac{1}{4} \cdot (2x + 2y + 2z + 2t)(1,0,0) + (4x + 8z + 4t)(-1,0,1) + (x + 3y - 3z - t)(1,1,0) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-x - 3y - z - t, x + 3y - 3z - t, 4x + 8z + 4t). \end{aligned}$$

15. Ponto de partida: $T(x,y,z) = (x + 2y, x - z)$ e $S(x,y) = (x, x - y, 2y, 2x + y)$.

(a) Temos:

$$\begin{aligned}
T(1,0,0) &= (1,1) = 0\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1)\,,\\
T(1,1,1) &= (3,0) = 3\cdot(1,0) + 0\cdot(1,1)\,,\\
T(0,1,-1) &= (2,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \quad \text{e}\\
S(1,0) &= (1,1,0,2) = 2\cdot(1,0,0,0) + 2\cdot(0,0,1,1) + (-2)\cdot(0,0,1,0) + (-1)\cdot(1,-1,0,0)\,,\\
S(1,1) &= (1,0,2,3) = 1\cdot(1,0,0,0) + 2\cdot(0,0,1,1) + (-1)\cdot(0,0,1,0) + 0\cdot(1,-1,0,0)\,.
\end{aligned}$$

Logo:

$$[T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S]_{\beta''}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto:

$$[S]_{\beta''}^{\beta}\cdot[T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) A aplicação composta $S\circ T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ vem dada por:

$$[S\circ T](x,y,z) = S(T(x,y,z)) = S(x+2y, x-z) = (x+2y, 2y+z, 2x-2z, 3x+4y-z)\,.$$

(c) A matriz $[S\circ T]_{\beta''}^{\beta'}$ coincide com o produto $[S]_{\beta''}^{\beta}\cdot[T]_{\beta}^{\beta'}$ encontrado em (b).

16. Recorde-se que um operador $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ será um isomorfismo se, e somente se, for injetor.

(a) Mostremos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. De fato:

$$T(x,y,z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ x-y=0 \\ x+z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Assim, T é injetor e, consequentemente um isomorfismo. A matriz de T é:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) A inversa é dada por $T^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{4}\cdot(x+y+2z, x-3y+2z, -x-y+2z)$ e temos:

$$\left[T^{-1}\right]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Se A é uma matriz $n\times n$ invertível, ao escalonar a matriz ampliada $[A, I_n]$ chegamos à matriz $\left[I_n, A^{-1}\right]$. No caso, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

17. Atividade de Sala de Aula.

2.4 AUTOVALOR & AUTOVETOR

1. Em cada caso, considere a matriz de T com relação às bases canônicas.

(a) Considerando a base canônica do $\mathbb{R}^2$, temos:

$$p(\lambda) = \det([T]-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, com auto-espaços correspondentes $V_{\lambda_1} = \left[(\sqrt{2},1)\right]$ e $V_{\lambda_2} = \left[(-\sqrt{2},1)\right]$.

(b) Neste caso, o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ e os autovalores são $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$. Os auto-espaços são:

$$V_{\lambda_1} = \left[\left(1,\sqrt{2}\right)\right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[\left(1,-\sqrt{2}\right)\right].$$

(c) Temos $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ e os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Os auto-espaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1,0,0)], \quad V_{\lambda_2} = [(1,1,0)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = [(1,1,1)].$$

(d) O polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda+1)\left(3-\lambda^2\right)$ e os autovalores são $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \sqrt{3}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{3}$. Os auto-espaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1,-2,-1)], \quad V_{\lambda_2} = \left[\left(1, \sqrt{3}-1, 1\right)\right], \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = \left[\left(1, 1-\sqrt{3}, 1\right)\right].$$

(e) O polinômio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)^4$ e $\lambda_1 = 1$ é o autovalor de ordem 4. O auto-espaço correspondentes é:

$$V_{\lambda_1} = [(0,0,0,1)]$$

e os auto-vetores são do tipo $v = (x,0,0,t)\,,\ x,t \in \mathbb{R}$.

(f) Temos $p(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)^3$ e os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Os auto-espaços são:

$$V_{\lambda_1} = [(0,0,0,1)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [(1,0,0,0),(0,0,1,0)] \qquad (\dim V_{\lambda_1} = 1 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 2).$$

(g) No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, consideramos a base canônica:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e encontramos $p(\lambda) = (1-\lambda)^3(\lambda+1)$. Os autovalores são, portanto, $\lambda = 1$, de ordem 3 e $\lambda = -1$. Os auto-espaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

(h) O único autovalor é $\lambda = 0$ e qualquer polinômio constante e não nulo é um vetor próprio associado. O auto-espaço é $V_\lambda = \mathbb{R}$.

(i) No espaço $\mathcal{P}_2$, consideramos a base canônica $\beta = \left\{1, x, x^2\right\}$ e encontramos $p(\lambda) = -\lambda^3$. O único autovalor é $\lambda = 0$ e $V_\lambda = \mathbb{R}$.

(j) Temos $T(1) = x,\ T(x) = 1$ e $T\left(x^2\right) = x^2$ e, portanto:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right)$, com raízes (autovalores) $\lambda_1 = 1$ (dupla) e $\lambda_2 = -1$. Os autovetores associados ao autovalor λ_1 são os polinômios do tipo $ax^2 + bx + b$, enquanto os autovetores associados ao autovalor λ_2 são os polinômios do tipo $bx - b$. Os auto-espaços são:

$$V_{\lambda_1} = \left[x+1, x^2\right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [x-1] \qquad (\dim V_{\lambda_1} = 2 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 1).$$

(k) Dado $p(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $T(p) = p(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$, de modo que:

$$T(1) = 1, \quad T(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad T\left(x^2\right) = x^2 + 2x + 1.$$

A matriz de T na base $\beta = \left\{1, x, x^2\right\}$ é, portanto:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)^3$. O autovalor é $\lambda = 1$, de multiplicidade 3 e os autovetores correspondentes são os polinômios $\mathrm{q}(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$. O autoespaço é o subespaço de dimensão $n = 1$, dado por:

$$V_{\lambda_1} = [1] = \mathbb{R}.$$

(l) Dado $v = ax^2 + bx + c$, temos que $T(v) = -6ax^2 - 2bx - 2a$ de onde segue que:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = -2 \quad \text{e} \quad T\left(x^2\right) = -6x^2 - 2.$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2$, com raízes (autovalores) $\lambda_1 = 0$ (dupla) e $\lambda_2 = -6$. Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[x, 1 + 3x^2\right].$$

Em outras palavras, V_{λ_1} é constituído pelos polinômios constantes, enquanto V_{λ_2} é o subespaço constituído pelos polinômios do tipo $3ax^2 + bx + a,\ a, b \in \mathbb{R}$.

2. Recorde-se que T é injetor se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Se $\lambda = 0$ é um atovalor de T, existe $v \neq 0$, tal que $T(v) = 0 \cdot v = 0$ e daí resulta que $v \in \mathcal{N}(T)$ e, portanto, $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

3. As matrizes de T em relação às bases β e β' são, respectivamente:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e temos:

(a) Em relação à base β :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 .$$

(b) Em relação à base β' :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (1-\lambda)^2 .$$

4. Temos que $R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$ e, considerando $\theta = k\pi$, encontramos:

$$R_\theta(x,y) = \left((-1)^k x, (-1)^k y\right).$$

Com relação à base canônica, temos:

$$[R_\theta]_\beta = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é $p(\lambda) = \pm 1$, conforme seja k par ou ímpar.

5. Com os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, construímos a base de autovetores $\beta = \{(3,1), (-2,1)\}$ e teremos:

$$A = [T]_\beta = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $T(x,y) = (-6y, -x+y)$.

6. Sendo T um isomorfismo, qualquer autovalor λ é não nulo e existe $v \neq \mathbf{0}$, tal que:

$$T(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow v = T^{-1}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T^{-1}(v) \Leftrightarrow T^{-1}(v) = \tfrac{1}{\lambda} \cdot v.$$

7. Sejam v_1 e v_2 autovetores de um operador $T : V \to V$, associados, respectivamente, aos autovalores distintos λ_1 e λ_2. Considerando uma combinação linear nula

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = \mathbf{0} \qquad \text{(eq2\_1)}$$

mostra-se que $x = y = 0$. De fato, segue de (**??**) que:

$$\begin{aligned} x\lambda_1 \cdot v_1 + y\lambda_1 \cdot v_2 &= \mathbf{0} \quad \text{(I)} \\ x \cdot T(v_1) + y \cdot T(v_2) &= \mathbf{0} \quad \text{(II)} \end{aligned} \qquad \text{(eq2\_2)}$$

e subtraindo (I) de (II), encontramos $y = 0$. De forma similar, mostre que $x = 0$. (a equação (I) é obtida multiplicando (**??**) por λ_1 e a equação (II) é equivalente a $x\lambda_1 \cdot v_1 + y\lambda_2 \cdot v_2 = 0$).

2.5 OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS

1. Como ilustração faremos o ítem (d). Ressaltamos que o procedimento é o mesmo em todos os casos: encontramos os autovalores e uma base de autovetores.

   (d) Os autovalores do operador T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -3$, com autoespaços correspondentes:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}. \\ V_{\lambda_2} &= \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}. \\ V_{\lambda_3} &= \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Em relação à base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, de autovetores, o operador T é representado pela matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. A matriz de T é do tipo:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

   com polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$, com duas raízes distintas, e autovetores coorespondentes LI, exceto no caso em que $a = -c$ e $b = 0$, e, neste caso, matriz é diagonal.

3. Se $a \neq 1$, o operador T é diagonalizável. Por outro lado, S é diagonalizável apenas no caso em que $a = 0$.

2.6 EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Para verificar que T é linear, observe que

$$\begin{aligned} T\left(\lambda\left(u_1, v_1\right) + \left(u_2, v_2\right)\right) &= T\left(\lambda u_1 + u_2, \lambda v_1 + v_2\right) = \lambda u_1 + u_2 + \lambda v_1 + v_2 \\ &= \lambda\left(u_1 + v_1\right) + u_2 + v_2 = \lambda T\left(u_1, v_1\right) + T\left(u_2, v_2\right). \end{aligned}$$

Dado $u + v$ em $W_1 \oplus W_2$, então $T(u, v) = u + v$ e, portanto, T é sobrejetora. Por outro lado, se $(u, v) \in \ker(T)$, então $u + v = \mathbf{0}$ em $W_1 \oplus W_2$ e como $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, segue que $u = v = 0$. Assim, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e T é injetora.

2. Dado v em V, então $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$ e, considerando que $T(v_j) = S(v_j)$, obtemos:

$$\begin{aligned} S(v) &= x_1 \cdot S(v_1) + x_2 \cdot S(v_2) + \cdots + x_n \cdot S(v_n) \\ &= x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \cdots + x_n \cdot T(v_n) \\ &= T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = T(v). \end{aligned}$$

3. Sendo $T : V \to W$ um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$, e T^{-1} será um isomorfismo se, e somente se, for injetor. Ora,

$$T^{-1}(w_1) = T^{-1}(w_2) \Leftrightarrow T\left(T^{-1}(w_1)\right) = T\left(T^{-1}(w_2)\right) \Leftrightarrow w_1 = w_2.$$

Logo, T^{-1} é injetor e, portanto, um isomorfismo.

4. Sendo $T : V \to W$ um isomorfismo, então $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\operatorname{Im}(T) = W$ (T é injetor e sobrejetor). Logo,

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \operatorname{Im})T = 0 + \dim W = \dim W.$$

Por outro lado, dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, então $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ são LI. De fato:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \cdots + x_n \cdot T(v_n) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0. \end{aligned}$$

5. Dado que $P(x,y,z,t) = (x,y,0,0)$, temos:

   (a) $P^2(x,y,z,t) = P(P(x,y,z,t)) = P(x,y,0,0) = (x,y,0,0) = P(x,y,z,t)$.

   (b) Dado $v = (x,y,z,t)$ um vetor do $\mathbb{R}^4$, então:

   $$v = (x,y,z,t) = (x,y,0,0) + (0,0,z,t) = P(x,y,z,t) + (0,0,z,t) \in \operatorname{Im}(P) + \mathcal{N}(P).$$

   Considerando que $\operatorname{Im}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{\mathbf{0}\}$, deduzimos que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

   (c) Considere qualquer base do tipo $\beta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,\lambda,0), (0,0,0,\mu)\}$, com $\lambda\mu \neq 0$.

6. As matrizes $\left[T^{-1}\right]_{\beta}^{\beta'}$ e $[T]_{\beta'}^{\beta}$ são inversas uma da outra.

7. Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é do tipo $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ e a imagem da reta $L = \{(At+B, Ct+D),\ t \in \mathbb{R}\}$ é a reta de equações paramétricas:

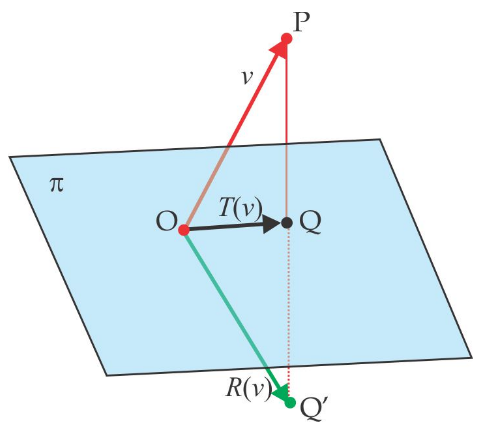
$$\begin{aligned} u &= (aA+bC)\,t + aB + bD \\ v &= (cA+dC)\,t + cB + dD. \end{aligned}$$

8. Atividade de Sala de Aula.

9. Atividade de Sala de Aula.

10. Atividade de Sala de Aula.

11. Na figura abaixo ilustramos os operadores T e R, onde Q é o ponto médio de PQ' e vemos que $T(P) = Q$ e $R(P) = Q'$.



(a) Um ponto genérico da reta r que passa por $P(x, y, z)$ e é perpendicular ao plano π é $X = (x + 3t, y + 2t, z + t)$ e no instante $t_0 = -\frac{1}{14}(3x + 2y + z)$ o ponto X estará sobre o plano π. Logo

$$T(x, y, z) = Q = \tfrac{1}{14}(5x - 6y - 3z, -6x + 10y - 2z, -3x - 2y - 13z).$$

Por outro lado, considerando que Q é o ponto médio de PQ', temos

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(P + Q'\right) \Rightarrow Q' = 2Q - P = \tfrac{1}{7}(-2x - 6y - 3z, -6x + 3y - 2z, -3x - 2y + 6z).$$

(b) É oportuno observar que se u é um vetor perpendicular ao plano π, então $R(u) = -u$ e que

$$T(v) = 0 \Leftrightarrow v \perp \pi \quad \text{e} \quad T(u) = u \Leftrightarrow u \in \pi.$$

A base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ deve ser tal que $T(v_1) = v_1,\ T(v_2) = 0$ e $T(v_3) = v_3$. Escolha v_1 e v_3 LI, ambos no plano π, e v_2 ortogonal ao plano.

12. Um tal operador possui autovalor $\lambda = a$, de multiplicidade n, e existe uma base β^* de V em relação a qual a matriz de T é diagonal, ou seja, $[T]_{\beta^*} = a \cdot I$. Se β é uma outra base de V, as matrizes $[T]_\beta$ e $[T]_{\beta^*}$ são equivalentes, isto é, existe uma matriz invertível P, such that $[T]_\beta = P^{-1} \cdot [T]_{\beta^*} \cdot P$ e, consequentemente:

$$[T]_\beta = P^{-1} \cdot [T]_{\beta^*} \cdot P = P^{-1} \cdot (a \cdot I) \cdot P = a\left(P^{-1} \cdot I \cdot P\right) = a \cdot I$$

FIM