



2.1 Fundamentos Básicos

Recordemos que uma aplicação (ou transformação) $T : V \rightarrow W$ entre espaços vetoriais é linear quando:

$$(a) \quad T(u + v) = T(u) + T(v), \quad u, v \in V.$$

$$(b) \quad T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \quad u \in V \text{ e } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Podemos condensar essas duas condições em uma só e afirmar que $T : V \rightarrow W$ é linear quando

$$T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot T(u) + T(v), \quad \lambda \in \mathbb{F}, \quad u, v \in V.$$

É oportuno ressaltar que se $T : V \rightarrow W$ é linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (os vetores nulos de V e W estão representados pelo mesmo símbolo $\mathbf{0}$). Assim, se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, a aplicação T **não é linear**.

EXEMPLO A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y) = (x, y, 1)$ não é linear, porque $T(0, 0) = (0, 0, 1)$ não é $\mathbf{0}$.

EXEMPLO A transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x, yz)$ não é linear, embora $T(0, 0, 0) = (0, 0)$. Se $u = (0, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 0)$, temos que

$$T(u + v) \neq Tu + Tv.$$

EXEMPLO A transformação $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(p) = 1 + p(0)$ não é linear, porque $T(\mathbf{0}) = 1 \neq \mathbf{0}$.

EXEMPLO As translações $T(x, y) = (x + a, y + b)$ não são lineares, exceto no caso em que a e b são ambos nulos.

EXEMPLO A projeção $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, no plano xy , definida por $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ é linear. Também é linear a projeção no eixo y dada por $P(x, y, z) = (0, y, 0)$.

TRANSFORMAÇÕES ELEMENTARES DO PLANO Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, além de descrever o tipo mais simples de dependência entre duas variáveis, goza de uma propriedade geométrica interessante: ela transforma retas em retas e circunferências em circunferências. Vejamos algumas transformações especiais.

1. CONTRAÇÕES & DILATAÇÕES Dado um número real positivo λ , as transformações $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $T(v) = \lambda v$, isto é, $T(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, recebem o nome de *contração* ou *dilatação*, conforme seja λ menor ou maior do que 1.

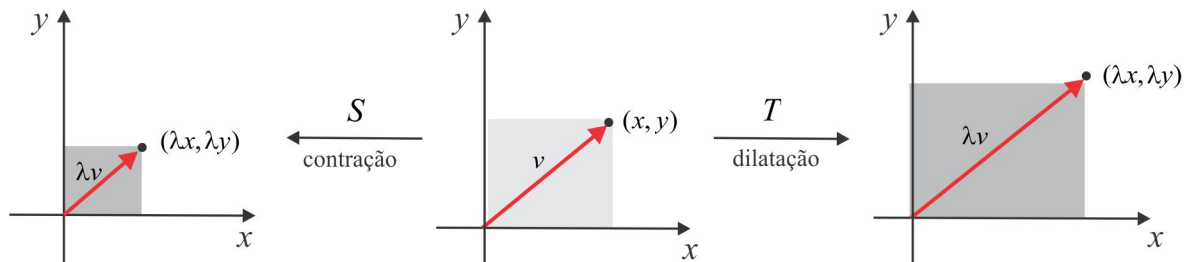


Figura 2.1: Contração & Dilatação

2. REFLEXÕES As transformações R_x, R_y e R_0 de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $R_x(x, y) = (x, -y)$, $R_y(x, y) = (-x, y)$ e $R_0(x, y) = (-x, -y)$, recebem os nomes de *reflexão no eixo x*, *reflexão no eixo y* e *reflexão na origem*, respectivamente. Veja a ilustração na Figura 2.2.

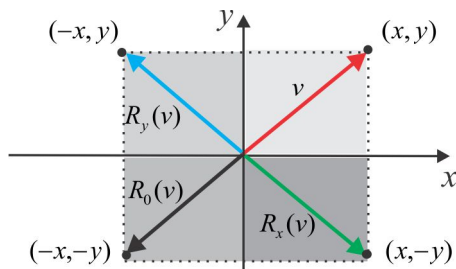


Figura 2.2: Reflexões.

3. ROTAÇÃO A transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

é conhecida por *rotação* de um ângulo θ . Veja a Seção 1.6.

4. CISALHAMENTOS Por *cisalhamento horizontal*, entendemos qualquer transformação $C_\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, do tipo $C_\lambda(x, y) = (x + \lambda y, y)$, sendo λ uma constante real. Na Figura 2.3 ilustramos um cisalhamento em que $\lambda > 1$. Como seria um *cisalhamento vertical*?

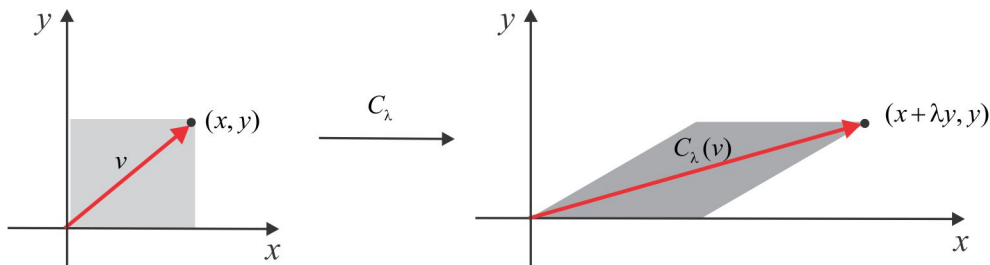


Figura 2.3: Cisalhamento Horizontal.

EXEMPLO Seja S o quadrado de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ e $C(0,1)$. Vamos encontrar a imagem de S pela transformação linear $T(x,y) = (x-y, x+2y)$. A imagem $T(S)$ é o quadrilátero ilustrado na Figura 2.4, de vértices

$$T(\mathbf{0}) = (0,0), \quad T(A) = (1,1), \quad T(B) = (0,3) \quad \text{e} \quad T(C) = (-1,2)$$

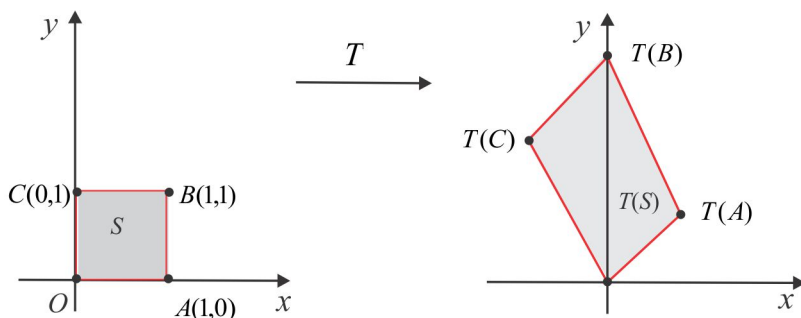


Figura 2.4: Imagem de um Quadrado.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Verifique quais das aplicações $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ abaixo são lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x,y) = (x-y, 0)$	(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x,y) = (x,y,x+y)$
(c) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = ax$	(d) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z,t) = (y-x, t-z)$
(e) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x) = (x, \cos x)$	(f) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x-1, y+z)$
(g) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(x) = (x, -x, x^2, 0)$	(h) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x,y,z) = (x, z-y)$

2. Seja A uma matriz quadrada 2×2 e defina $T_A : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ por $T_A(X) = AX$. É a aplicação T_A linear?

3. Mostre que a aplicação $T : \mathcal{M}_{3 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 3}$ definida por $T(X) = X^t$ é linear.

4. Construa duas matrizes A e B , de ordem 2×2 , tais que $\det(A) = \det(B) = 0$ e $\det(A + B) \neq 0$. A partir daí conclua que a aplicação $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $T(X) = \det(X)$, não é linear.

5. Verifique que as aplicações abaixo são lineares.

(a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{1 \times 2}$, $T(x) = \begin{bmatrix} x & ax \end{bmatrix}$.

(b) $T : \mathcal{M}_{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$, $T(A) = \text{tr}(A)$.

(c) $T : \mathcal{M}_{2 \times 1} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$, $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$.

(d) $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y & z - t \end{bmatrix}$.

(e) $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{P}_2$, $T \begin{bmatrix} x & y \\ z & r \end{bmatrix} = (x - y)t^2 + zt + r$.

6. **FUNCAIONAIS LINEARES** As aplicações lineares $T : V \rightarrow \mathbb{F}$, em que o espaço de chegada é o corpo \mathbb{F} (em geral $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é o corpo dos números reais), são conhecidas na literatura como *funcionais lineares*. Verifique que os funcionais abaixo são lineares ou não.

(a) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(p) = \int_0^1 p(x) dx$.

(b) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(p) = p'(0)$.

7. Verifique se a transformação $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, definida por $T(p)(x) = x + xp(x)$ é linear. E se fosse $S : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, definida por $S(p)(x) = p(x) + x^2p'(x)$, seria S linear?

8. **O ESPAÇO DAS APLICAÇÕES LINEARES DE $\mathcal{L}(V, W)$** Representemos por $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto de todas as aplicações lineares $T : V \rightarrow W$, equipado da soma e do produto por escalar definidas de maneira natural por:

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v), \quad v \in V, \quad S, T \in \mathcal{L}(V, W).$$

$$(\lambda T)(v) = \lambda T(v), \quad v \in V, \quad T \in \mathcal{L}(V, W).$$

As aplicações lineares de $V \rightarrow V$ são denominadas *operadores lineares* (ou simplesmente *operadores*) de V e o espaço vetorial $\mathcal{L}(V, V)$ será indicado por $\mathcal{L}(V)$. Além da aplicação identicamente nula, a aplicação identidade $I(v) = v$ também pertence a $\mathcal{L}(V)$. Para concluir que $\mathcal{L}(V, W)$ é, de fato, um espaço vetorial, mostre que:

- (a) A aplicação identicamente nula um vetor de $\mathcal{L}(V, W)$
 - (b) Se T e S estão em $\mathcal{L}(V, W)$, mostre que $\lambda T + S \in \mathcal{L}(V, W)$, seja qual for o escalar λ .
9. **COMPOSIÇÃO DE APLICAÇÕES LINEARES** Sejam U, V e W três espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{F} e considere duas aplicações lineares $T : U \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow W$. Defina uma nova aplicação $S \circ T : U \rightarrow W$ por

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)), \quad u \in U.$$

Mostre que a aplicação $S \circ T$ é linear. Veja a ilustração gráfica da composição.

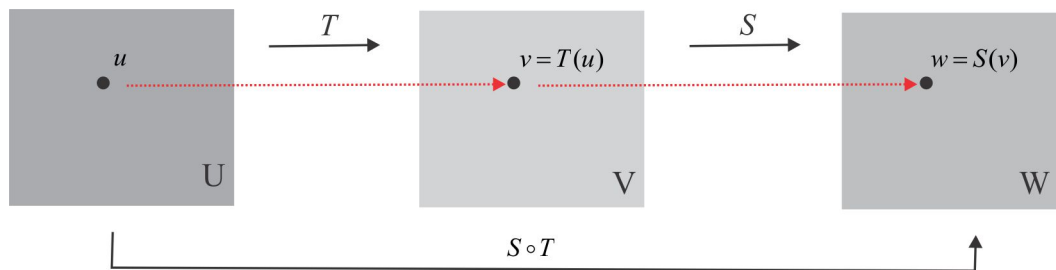


Figura 2.5: Composição de Aplicações Lineares.

10. **INVERTENDO UMA APLICAÇÃO LINEAR** Dado um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{F} (o corpo \mathbb{R} dos números reais, por exemplo), é simples verificar que a *aplicação identidade* $I(v) = v$ é linear, isto é, $I \in \mathcal{L}(V, V)$. Se T e S são aplicações lineares de $V \rightarrow V$ e $S \circ T = I$, isto é, a composição de S com T é a identidade de V , diremos que S é a inversa de T e anotamos $S = T^{-1}$. Determine a inversa da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - y, y)$.

REGRA PRÁTICA Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão n e considere

$$\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

uma base de V . Como veremos adiante, uma aplicação linear invertível $T : V \rightarrow W$ transforma a base β de V em uma base de W e podemos usar a base β para encontrar a transformação inversa $S = T^{-1}$. Se $w_k = T(v_k)$, então a inversa $S : W \rightarrow V$ é caracterizada por $S(w_k) = v_k$, isto é,

$$T(v_k) = w_k \quad \text{se, e somente se,} \quad S(w_k) = v_k$$

e dado $w \in W$, temos $w = y_1 \cdot T(v_1) + y_2 \cdot T(v_2) + \dots + y_n \cdot T(v_n)$ e, portanto,

$$S(w) = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \dots + y_n \cdot v_n.$$

11. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $T(1, 2) = (1, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.
12. Seja $V = \mathcal{M}_{n \times n}$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n . Fixada uma matriz A em V , decida sobre a linearidade das transformações:
- (a) $T(X) = A + X$ (b) $S(X) = AX - XA$.
13. Identifique e esboce o gráfico da imagem do retângulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ pela transformação $T(x, y) = (x - y, -x + 2y)$.
14. Sejam a, b, c e d números reais positivos e considere o operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Determine as duas raízes λ_1 e λ_2 da equação $\det[T - \lambda I_2] = 0$.
15. Identifique a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, que satisfaz a $T(x + 1) = x^2 - 1$ e $T(x - 1) = x^2 + x$.
16. Qual o operador $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ que satisfaz às condições $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$?
17. Encontre as transformações $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que:
- $$T(1, 1) = (3, 2, 1), \quad T(0, -2) = (0, 1, 0), \quad S(3, 2, 1) = (1, 1), \quad S(0, 0, 1) = (0, 0) \quad \text{e} \quad S(0, 1, 0) = (0, -2).$$
- Calcule $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$ e encontre $S \circ T$.
18. Encontre a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que representa uma rotação de $\pi/4$ rad, seguida de dilatação de $\sqrt{2}$.
19. Descreva a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão em torno da reta $y = x$.
20. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear, definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Mostre que:
- $$T^2 = 2 \cdot T, \quad T^3 = 4 \cdot T \quad \text{e} \quad T^4 = 8 \cdot T.$$
- Usando o processo indutivo, deduza que $T^n = 2^{n-1} \cdot T$.
21. Construa dois operadores lineares não nulos $S, T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que $T^2 = I$ e $S^2 = S$.

2.2 Núcleo e Imagem

A cada transformação linear $T : V \rightarrow W$, associamos os seguintes subespaços vetoriais:

► NÚCLEO OU KERNEL DE T Indicado por $\mathcal{N}(T)$ ou $\ker(T)$ o núcleo da transformação linear T é definido por:

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}\} \quad (\text{subespaço vetorial de } V)$$

► IMAGEM DE T Indicada por $\text{Im}(T)$ ou $T(V)$ a imagem da transformação linear T é definida por:

$$\text{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v), \text{ para algum } v \in V\} \quad (\text{subespaço vetorial de } W).$$

Na Figura 2.6 ilustramos geometricamente o núcleo e a imagem de uma aplicação linear $T : V \rightarrow W$.

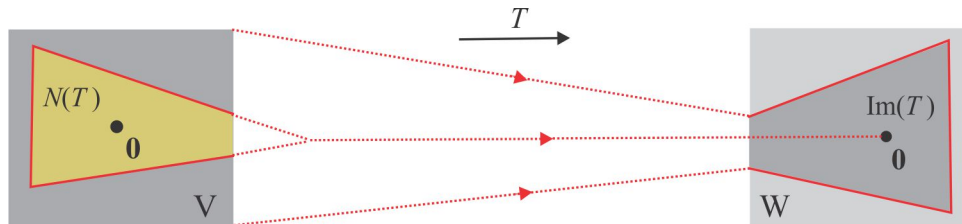


Figura 2.6: Núcleo & Imagem.

É oportuno ressaltar que se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V , então o subespaço $\text{Im}(T)$ é gerado pelos vetores Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n e dentre esses geradores podemos extrair uma base de $\text{Im}(T)$. Por outro lado, o núcleo de T pode ser visto, em muitos casos, como o espaço solução de um sistema linear homogêneo, cuja dimensão é igual ao grau de liberdade, e uma base do núcleo pode ser construída usando as variáveis livres do sistema. Um resultado que relaciona as dimensões de V , $\mathcal{N}(T)$ e $\text{Im}(T)$ é o Teorema do Núcleo e da Imagem que apresentamos a seguir:

TEOREMA DO NÚCLEO E DA IMAGEM Sejam V e W dois espaços vetoriais dimensão finita e $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então:

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \text{Im}(T).$$

EXEMPLO Como ilustração, vamos encontrar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem do operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$. Inicialmente, observamos que

$$(x, y, z) \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (z, x - y, -z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{e} \quad x - y = 0.$$

Assim, o núcleo de T é o subespaço $\mathcal{N}(T) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, uma base $\mathcal{N}(T)$ é $\beta = \{(1, 1, 0)\}$ e $\dim \mathcal{N}(T) = 1$. Quanto à imagem, esta é gerada pelos vetores $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ e $T(\mathbf{e}_3)$, isto é,

$$\text{Im}(T) = [T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)] = [(0, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, -1)].$$

Escalonando a matriz geradora de $\text{Im}(T)$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de onde resulta que os vetores $w_1 = (1, 0, -1)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$ formam uma base de $\text{Im}(T)$ e, por conseguinte, $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. Temos que

$$w \in \text{Im}(T) \Leftrightarrow w = xw_1 + yw_2 \Leftrightarrow w = (x, y, -x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

e, sendo assim,

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x\}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo núcleo contém o vetor $(0, 2)$, e é tal que $T(-1, 1) = (1, 2, 0)$.
2. Em cada caso, encontre uma base do núcleo e da imagem da transformação linear.
 - (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - y, 0)$.
 - (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.
 - (c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x + y)$.
 - (d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y, z)$.
3. Seja $T_A : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$, definida por $T_A(X) = AX$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$. Determine bases de $\mathcal{N}(T_A)$ e de $\text{Im}(T_A)$.
4. Mostre que a transformação $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$, definida por $T(p(x)) = p(x) + x^2 p'(x)$ é linear e determine o núcleo e a imagem de T .

5. Repita o exercício precedente com o operador $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$, definido por $T(p(x)) = x^2 p''(x)$.
6. Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\text{Im}(T) = [(1, 2, 3), (4, 0, 5)]$. Uma tal transformação pode ser um isomorfismo? Por quê?
7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{N}(T) = [(1, 1, 0)]$. Uma tal transformação pode ser um isomorfismo? Por quê?
8. Se $T_1, T_2 : V \rightarrow V$ são operadores lineares, tais que $\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_2) = 0$, mostre que $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) = 0$.
9. Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow W$, use o Teorema do Núcleo e da Imagem e prove as seguintes afirmações:
- (a) Se $\dim V < \dim W$, então T não pode ser sobrejetora.
 - (b) Se $\dim V > \dim W$, então T não pode ser injetora.
 - (c) Se T é um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$.
10. Estabeleça um isomorfismo entre os seguintes pares de espaços vetoriais:
- (a) \mathbb{R}^2 e o subespaço $W = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$
 - (b) \mathbb{R}^3 e \mathcal{P}_2
 - (c) \mathbb{R}^4 e $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.
11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cujo núcleo seja a reta $y = 2x$.
12. Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear e v_1, v_2, \dots, v_n vetores LI de V . Se $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, mostre que Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n são LI.
13. Seja $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ o operador definido por
- $$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b)x + (b + c).$$
- (a) O operador T é injetor? É sobrejetor?
 - (b) Dê uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T .
 - (c) $p(x) = -4x^2 + 2x - 2$ pertence a $\mathcal{N}(T)$? E $q(x) = 2x + 1$ pertence a $\text{Im}(T)$?
14. Um operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem núcleo $\mathcal{N}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ e é tal que $T(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$. Encontre um tal operador.

15. Considere o operador derivação $\partial_1 : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$, definido por $\partial_1(p(x)) = p'(x)$. Determine o núcleo e a imagem do operador ∂_1 . Qual o núcleo do operador $\partial_2(p(x)) = p''(x)$?
16. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:
- (i) $T(1, -1) = (1, 2, 0)$ e (ii) $(1, 0) \in \mathcal{N}(T)$.
17. Mostre que $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^2)$ se, e somente se, T é invertível.
18. Prove ou apresente um contra-exemplo.
- (a) Se $T : V \rightarrow V$ é linear e não nulo, então $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2)$.
- (b) Se $T : V \rightarrow V$ é linear e não nulo, então $\mathcal{N}(T^2) \subset \mathcal{N}(T)$.
- (c) Se $T : V \rightarrow V$ é linear e não nulo, então $\text{Im}(T) \subset \text{Im}(T^2)$.
- (d) Se $T : V \rightarrow V$ é linear e não nulo, então $\text{Im}(T^2) \subset \text{Im}(T)$.
- (e) Se $T \neq \mathbf{0}$ e $T^2 = \mathbf{0}$, então $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

2.3 Representação Matricial

Nesta seção há dois problemas a serem tratados e os exemplos que seguem à formulação de cada um deles ilustram como resolvê-los.

► APLICAÇÃO LINEAR ASSOCIADA A UMA MATRIZ Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ são bases de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente, e $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem $n \times m$, encontrar a aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, determinada pela relação

$$[T(v)]_{\beta'} = A \cdot [v]_{\beta}. \quad (2.1)$$

onde $[v]_{\beta}$ e $[T(v)]_{\beta'}$ são as matrizes coordenadas de v e de $T(v)$ nas bases β e β' . Dado $v \in \mathbb{R}^m$, temos

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m, \quad \text{isto é,} \quad [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

e consideremos os escalares y_1, y_2, \dots, y_n , que satisfazem à relação (2.1), ou seja

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A aplicação linear T vem dada por $T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \dots + y_n w_n$.

EXEMPLO Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, 2)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente, e consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dado $v = (x, y)$ um vetor do \mathbb{R}^2 , temos que

$$v = x(1, 0) + y(0, 1) \Rightarrow [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e usando a relação (2.1), encontramos

$$[T(v)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x + 2y \\ x - 3y \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow y_1 \\ \leftarrow y_2 \\ \leftarrow y_3 \end{array}$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= x(1, 1, 0) + (x + 2y)(0, 1, -1) + (x - 3y)(1, 0, 2) \\ &= (2x - 3y, 2x + 2y, x - 8y) \end{aligned}$$

é a aplicação linear procurada.

EXEMPLO Se β e β' são as bases canônicas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente, então a transformação T que satisfaz (2.1) é dada por

$$T(x_1, x_2, \dots, x_m) = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \text{onde} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Seja $I : V \rightarrow V$ o operador identidade de V , isto é, $I(v) = v, \forall v$. Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V , determine a matriz $[I]_\beta$. Se β' é outra base de V , quem é $[I]_{\beta'}$?

2. Qual é a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, cuja representação matricial em relação às bases

canônicas é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação definida por $T(x, y, z) = (x - y + 2z, x - y - z)$ e considere as bases

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, -2, -1)\}.$$

Determine a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

4. Sejam $\beta = \{(0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$ e $\beta' = \{(-1, 0), (0, -1)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente, e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $T(x, y, z)$.

(b) Determine bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\text{Im}(T)$. É a transformação T injetora?

5. Em relação às bases ordenadas $\beta = \{t, 1\}$ e $\beta' = \{t^2, t - 1, t + 1\}$ de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , respectivamente, qual a matriz da transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, definida por $T(p(t)) = tp(t)$?

6. Sejam $\beta = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta' = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respectivamente, e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $T(x, y)$.

(b) Encontre uma base β'' do \mathbb{R}^3 , tal que

$$[T]_{\beta''}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Seja $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear, definida por

$$T \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = (x + z, y + t)$$

e seja β a base canônica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$.

(a) Determine $[T]_{\beta'}^{\beta}$, onde $\beta' = \{(1, -1), (1, 2)\}$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$ é tal que

$$[S]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determine, caso exista, um vetor v , tal que $Sv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear, cuja matriz em relação à base canônica β é

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, caso exista, vetores u e v tais que $Tu = u$ e $Tv = -v$.

(b) Determine $\dim \mathcal{N}(T)$ e $\dim \text{Im}(T)$.

(c) T é um isomorfismo? Se for, encontre $T^{-1}(x, y)$ e a matriz $[T^{-1}]_{\beta}$.

9. Seja $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear definido por

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x) dx.$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas.

10. Seja $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ o operador linear definido por $T(p(x)) = (1-x)p'(x)$. Determine a matriz de T em relação à base canônica de \mathcal{P}_1 .
11. **SOBRE A MATRIZ DA APLICAÇÃO COMPOSTA** Dadas as aplicações lineares $T : \{V, \beta\} \rightarrow \{W, \beta'\}$ e $S : \{W, \beta'\} \rightarrow \{U, \beta''\}$ a matriz da aplicação composta $S \circ T : \{V, \beta\} \rightarrow \{U, \beta''\}$ pode ser determinada pela regra:

$$[S \circ T]_{\beta''}^{\beta} = [S]_{\beta''}^{\beta'} \bullet [T]_{\beta'}^{\beta}.$$

Quando $T : \{V, \beta\} \rightarrow \{W, \beta'\}$ for um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$ e a matriz da aplicação inversa $T^{-1} : \{W, \beta'\} \rightarrow \{V, \beta\}$ será dada por

$$[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'} = ([T]_{\beta'}^{\beta})^{-1}.$$

Mostre que o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x - y, y, y + z)$ é um isomorfismo e encontre as matrizes $[T]_{\beta}$ e $[T^{-1}]_{\beta}$, em relação à base canônica β .

12. Sejam T_1 e T_2 operadores do \mathbb{R}^3 , com representação matricial

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre o operador T , sabendo que $T_1 = T_2 \circ T$.

13. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e sejam T_A e T_B as transformações canônicas definidas pelas matrizes A e B , respectivamente. Encontre bases dos subespaços

$$\mathcal{N}(T_A), \mathcal{N}(T_B), \mathcal{N}(T_B \circ T_A), \text{Im}(T_A), \text{Im}(T_B) \text{ e } \text{Im}(T_B \circ T_A).$$

14. Em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 , respectivamente, considere as bases

$$\beta = \{(1, 0, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (-1, 2, 0, 1)\}$$

e seja A a matriz 3×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $[T(v)]_{\beta} = A[v]_{\beta'}$. Essa é a transformação associada à matriz A e às bases β e β' . Quando β e β' são as bases canônicas, teremos:

$$T(v) = A \cdot v, \quad \text{isto é,} \quad T(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}.$$

15. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ as transformações lineares definidas por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, x - z) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (x, x - y, 2y, 2x + y).$$

e considere as bases

$$\beta = \{(1, 0), (1, 1)\} \quad (\text{base do } \mathbb{R}^2)$$

$$\beta' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, -1)\} \quad (\text{base do } \mathbb{R}^3)$$

$$\beta'' = \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0)\} \quad (\text{base do } \mathbb{R}^4)$$

(a) Encontre as matrizes $[T]_{\beta}^{\beta'}$ e $[S]_{\beta''}^{\beta}$ e calcule o produto $[S]_{\beta''}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta'}$.

(b) Determine $(S \circ T)(x, y, z)$.

(c) Encontre a matriz $[S \circ T]_{\beta''}^{\beta'}$.

16. Sejam $\beta = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 1)\}$ e $\beta' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bases do \mathbb{R}^3 e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x - y, x + z).$$

(a) Mostre que T é um isomorfismo e encontre a matriz $[T]_{\beta'}^{\beta}$.

(b) Encontre a transformação inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e a matriz $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'}$.

(c) Escalone a matriz ampliada $\left[[T]_{\beta'}^{\beta}, I_3 \right]$.

17. Considere as seguintes bases do espaço \mathbb{R}^3 :

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por: $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$. Verifique diretamente que a matriz S , de mudança da base β para a base β' , satisfaz a relação:

$$[T]_{\beta} = S^{-1} \cdot [T]_{\beta'} \cdot S. \tag{eq2.1}$$

A relação (??) estabelece a equivalência entre as matrizes $[T]_{\beta}$ e $[T]_{\beta'}$ e a matriz S recebe o nome de matriz de *similaridade*.

2.4 Autovalor & Autovetor

UM BREVE COMENTÁRIO Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow V$, um problema típico de álgebra linear consiste em encontrar um escalar λ e um vetor v , tais que $T(v) = \lambda v$. É claro que $v = \mathbf{0}$ satisfaz à equação $T(v) = \lambda v$, seja qual for o escalar λ , e o problema torna-se interessante quando o vetor procurado v for não nulo. Um tal escalar λ denomina-se *autovalor* (ou *valor característico*) da transformação T e o vetor não nulo v um *autovetor* (ou *vetor característico*) de T , associado ao autovalor λ . Se v é um autovetor de T , associado ao autovalor λ , então qualquer múltiplo escalar de v também o é; se λ é um autovalor de T , representamos por V_{λ} o subespaço vetorial de V constituído pelos vetores v , tais que $T(v) = \lambda v$. Esse subespaço recebe o nome de *auto-espaço* associado a λ . O auto-espaço V_{λ} é constituído dos autovetores associados ao autovalor λ , mais o vetor nulo.

Dada uma base β de V , se representarmos por A a matriz de T na base β , os autovalores de T são as soluções λ da equação matricial $A[v]_{\beta} = \lambda[v]_{\beta}$, isto é, as soluções da equação $(A - \lambda I)[v]_{\beta} = \mathbf{0}$. No caso em que $V = \mathbb{R}^n$, esta equação nos conduz a um sistema linear homogêneo, o qual terá solução não nula quando $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, quando λ for uma raiz do polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, denominado *polinômio característico* de T .

EXEMPLO Se $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base de V , contendo apenas autovetores de T , então a matriz $[T]_{\beta}$ é uma matriz diagonal. Para comprovar esse fato, basta observar que

$$T(v_j) = \lambda_j v_j = \mathbf{0} \cdot v_1 + \mathbf{0} \cdot v_2 + \dots + \mathbf{0} \cdot v_{j-1} + \lambda_j \cdot v_j + \mathbf{0} \cdot v_{j+1} + \dots + \mathbf{0} \cdot v_n.$$

e os escalares destacados formam a j -ésima coluna da matriz.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, determine o polinômio característico do operador, seus autovalores e autovetores correspondentes. Por fim, encontre uma base dos auto-espacos associados.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2y, x).$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, 2x + y).$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z).$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y, x - y + z, 2x + y - z).$

(e) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t).$

(f) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z, t) = (2x + y, 2y, 2z, 3t).$

(g) $T : \mathcal{M}_{2 \times 2} \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}, \quad T(A) = A^t. \quad (A^t \text{ é transposta de } A)$

(h) $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1, \quad T(ax + b) = 2ax - b.$

(i) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad T(p(x)) = p'(x).$

(j) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b.$

(k) $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2, \quad T(p(x)) = p(x + 1).$

(l) $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3, \quad T(p(x)) = (1 - x^2)p''(x) - 2xp'(x).$

2. Mostre que um operador $T : V \rightarrow V$, com um autovalor nulo, não pode ser injetor.
3. No espaço \mathbb{R}^2 , considere as bases $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta' = \{(-1, 0), (1, 2)\}$. Determine o polinômio característico do operador $T(x, y) = (x, x + y)$, usando as matrizes $[T]_\beta$ e $[T]_{\beta'}$.
4. Seja $R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ o operador de rotação. Se $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, mostre que os autovalores de R_θ são $\lambda = \pm 1$.
5. Identifique o operador de \mathbb{R}^2 , com autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, e respectivos autovetores $v_1 = (3, 1)$ e $v_2 = (-2, 1)$.
6. Se T é um isomorfismo, com autovalor λ , mostre que $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor do operador inverso T^{-1} .
7. Mostre que autovetores (não nulos) associados a autovalores distintos são LI.

8. Sejam λ e μ dois autovalores distintos do operador $T : V \rightarrow V$. Mostre que $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$.
9. Se λ é um autovalor do operador $T : V \rightarrow V$, mostre que λ^2 é um autovalor do operador T^2 .
10. **SUBESPAÇO INVARIANTE** Dado um operador $T : V \rightarrow V$, diremos que um subespaço W de V é *invariante* pelo operador T ou é *T-invariante*, quando $T(W) \subset W$. Se λ é um autovalor do operador T , mostre que o auto-espaço V_λ é invariante por T .

2.5 Operadores Diagonalizáveis

Por *diagonalizar* um operador $T : V \rightarrow V$, entendemos *associá-lo* a uma matriz diagonal. Isso consiste em encontrar, caso exista, uma base de V em relação à qual a matriz de T é diagonal. Uma tal base de V deve ser constituída de autovetores de T .

REGRA DE DIAGONALIZAÇÃO Suponhamos $\dim V = n$ e que $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sejam os autovalores distintos do operador $T : V \rightarrow V$. Se V_{λ_j} são os auto-espaços correspondentes e

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \dots + \dim V_{\lambda_r} = n$$

então o operador T é diagonalizável e se β_j é uma base do auto-espaço V_{λ_j} , então

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_r$$

é uma base de V que diagonaliza T , isto é, a matriz $[T]_\beta$ é diagonal. Na diagonal principal da matriz $[T]_\beta$ figuram os autovalores de T e o número de vezes que cada autovalor aparece na diagonal corresponde à sua multiplicidade como raiz do polinômio característico.

EXEMPLO Um operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que possui dois autovalores distintos é diagonalizável. Neste caso, os dois autoespaços têm dimensão igual a 1. De forma mais geral, se $\dim V = n$ e o operador $T : V \rightarrow V$ possui n autovalores distintos, um tal operador T é diagonalizável.

EXEMPLO Seja T o operador do \mathbb{R}^3 , definido por $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ (de multiplicidade 2) e $\lambda_2 = -1$, que são as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(-1 - \lambda)$, e os auto-espaços correspondentes são:

$$V_3 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_{-1} = \{(4z, -5z, 4z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Vemos que $\dim V_3 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$ e, portanto, T é diagonalizável. Em relação à base de autovetores $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (4, -5, 4)\}$ a matriz de T é

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\beta_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ e $\beta_2 = \{(4, -5, 4)\}$ são bases dos auto-espços V_3 e V_{-1} , respectivamente.

EXEMPLO Seja T o operador do \mathbb{R}^3 , definido por $T(x, y, z) = (4x + 2y, -x + y, y + 2z)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, que são as raízes do polinômio característico

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12,$$

e os auto-espços correspondentes são:

$$V_2 = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad V_3 = \{(-2y, y, y) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Vemos que $\dim V_2 + \dim V_3 = 1 + 1 \neq \dim \mathbb{R}^3$ e, portanto, T não é diagonalizável.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso, encontre uma base de V que diagonaliza o operador $T : V \rightarrow V$.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x, x - y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, -2y, z)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (-2x, x - y, 4x + 3y)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, -2x + 2y, 12x - 3z)$.

2. Se a matriz do operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ em relação à base canônica é simétrica, mostre que T é diagonalizável.

3. Determine, caso exista algum, os valores de a que tornam os operadores $T(x, y) = (x + y, ay)$ e $S(x, y) = (x + ay, y)$ diagonalizáveis.

2.6 Questões de Revisão

1. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetoriais de V , tais que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Mostre que $T(u, v) = u + v$ define um isomorfismo de $W_1 \times W_2$ sobre $W_1 \oplus W_2$.
2. Se duas transformações lineares $S, T : V \rightarrow W$ são iguais nos vetores v_1, v_2, \dots, v_n de uma base de V , mostre que $S(v) = T(v)$, $\forall v \in V$.
3. Se $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo, mostre que a aplicação inversa $T^{-1} : W \rightarrow V$ também o é.
4. Se $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo linear, mostre que $\dim V = \dim W$ e T transforma uma base de V em uma base de W .
5. Seja $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ o operador definido por $P(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$. Mostre que:

(a) $P^2 = P \quad (P^2 = P \circ P)$.

(b) $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

(c) Encontre uma base β do \mathbb{R}^4 , tal que

$$[P]_{\beta} = \begin{pmatrix} [I_2] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

6. Dado um isomorfismo $T : V \rightarrow V$, com $\dim V < \infty$, qual a relação entre as matrizes $[T]_{\beta'}^{\beta}$ e $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'}$?
7. Mostre que um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transforma retas em retas.
8. Qual a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pelo operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por $T(x, y) = (ax + by, bx + ay)$, sendo $a \neq b$.
9. Encontre a expressão do operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que representa uma rotação de $\pi/3$ rad em torno da reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $v = (1, 1, 0)$.
10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador que representa uma reflexão através da reta $y = 3x$. Encontre $T(x, y)$ e uma base β do \mathbb{R}^2 , tal que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Sejam T e R os operadores do \mathbb{R}^3 que representam, respectivamente, a projeção e a reflexão no plano $\pi : 3x + 2y + z = 0$.

(a) Encontre $T(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$.

(b) Encontre bases β e β' do \mathbb{R}^3 , tais que

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [R]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(tais bases devem conter dois vetores v_1 e v_2 do plano e um vetor v_3 ortogonal ao plano π)

12. Se $p(\lambda) = (\lambda - a)^n$ é o polinômio característico de um operador diagonalizável $T : V \rightarrow V$, com $\dim V = n$, mostre que $[T]_{\beta} = aI$, seja qual for a base β de V .

13. Repita o Exercício 2.4A(k), com o operador $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$, dado por $T(p(x)) = p(x + 1)$. Considere a base $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

2.1 FUNDAMENTOS BÁSICOS

1. São lineares as aplicações (a), (b), (c), (d) e (h). Nos casos (e) e (f), temos $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ e, portanto, T não é linear. Para verificar que a aplicação (g) não é linear, basta observar que $T(-1) \neq -T(1)$.

2. Sim. Usando as propriedades do produto matricial, temos

$$T_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda T_A(X) + T_B(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Usando as propriedades da transposição de matrizes, temos:

$$T(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)^t = \lambda X^t + Y^t = \lambda T(X) + T(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2 \times 3}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $\det A = \det B = 0$ e $\det(A + B) = \det I_2 = 1$. Para essas matrizes, temos $T(A + B) \neq T(A) + T(B)$ e isso mostra que T não é linear.

5. Vejamos o ítem (c), como ilustração. Sejam $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ dois vetores em $\mathcal{M}_{2 \times 1}$ e seja λ um escalar. Temos:

$$T(\lambda \cdot u + v) = Tu = T \begin{pmatrix} \lambda x + z \\ \lambda y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + z & 0 \\ 0 & \lambda y + t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ \lambda \cdot T(u) + T(v).$$

6. Em (a), usamos a linearidade da integral e obtemos

$$T(\lambda p + q) = \int_0^1 (\lambda p(x) + q(x)) dx = \lambda \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx = \lambda T(p) + T(q).$$

Em (b), usamos a linearidade da derivada. Temos

$$T(\lambda p + q) = [\lambda p(x) + q(x)]' = \lambda p'(x) + q'(x) = \lambda T(p) + T(q),$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathcal{P}_2$.

7. A transformação T não é linear, porque $T(\mathbf{0})$ é o vetor (polinômio) não nulo $p(x) = x$. No caso da aplicação S , dados p e q no espaço \mathcal{P}_1 e um escalar λ , temos:

$$S(\lambda \cdot p + q)(x) = (\lambda \cdot p + q)(x) + x^2(\lambda \cdot p + q)'(x) \\ = \lambda \cdot (p(x) + x^2 p'(x)) + q(x) + x^2 q'(x) = [\lambda \cdot S(p) + S(q)](x).$$

Logo, $S(\lambda \cdot p + q) = \lambda \cdot S(p) + S(q)$ e, portanto S é linear.

8. Atividade de Sala de Aula.

9. Atividade de Sala de Aula.

10. Atividade de Sala de Aula.

19 $T(x, y) = (y, x)$

20 O caso geral $T^n = 2^{n-1} \cdot T$ é deduzido de forma indutiva. Como ilustração, vejamos o caso $n = 2$. Temos:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x + y, x - y) = T(2x, 2y) = 2 \cdot T(x, y).$$

21 $T(x, y) = (y, x)$ e $S(x, y) = \frac{1}{2}(x - y, y - x)$.

2.2 NÚCLEO & IMAGEM

1. Considere a base $\beta = \{(0, 2), (-1, 1)\}$ do \mathbb{R}^2 e observe que $(x, y) = \frac{1}{2}(y - x)(0, 2) + x(-1, 1)$, de modo que:

$$T(x, y) = \frac{1}{2}(y - x) \cdot T(0, 2) + x \cdot T(-1, 1) = x \cdot (1, 2, 0) = (x, 2x, 0).$$

2. Em cada caso, identifique o núcleo e a imagem da aplicação linear.

(a) $\mathcal{N}(T) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ e uma base do núcleo é $\beta = \{(1, 2)\}$. A imagem do operador T é o eixo x e uma base de $\text{Im}(T)$ é $\beta' = \{(1, 0)\}$.

(b) $\beta = \{(-2, 1, 1)\}$ é uma base do núcleo de T . O subespaço $\text{Im}(T)$ é consiste dos vetores da forma:

$$(x + 2y, y - z, x + 2z) = x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (0, -1, 2)$$

e $\beta' = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$.

3. O núcleo de T é constituído da matrizes da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ e uma base de $\mathcal{N}(T)$ é:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Acrescentando à base β os vetores $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtemos uma base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ e o conjunto $\beta' = \{T(X_3), T(X_4)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$.

4. $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_2$.

2.2B

(a)

2.2G Considere a base $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ do \mathbb{R}^3 e defina o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por:

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, 3), \quad T(0, 1, 0) = (4, 0, 5) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Um tal operador não pode ser um isomorfismo, porque $\dim \text{Im}(T) = 2$.

2.3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

1. Em qualquer base β do espaço V a matriz $[T]_\beta$ é a matriz identidade $n \times n$.
2. Um vetor (polinômio) genérico de \mathcal{P}_1 é $p(t) = a + bt$ e a aplicação é $T(a + bt) = a + bt$.
3. A matriz de $[T]_\beta^{\beta'}$ é:

$$[T]_\beta^{\beta'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. **(a)** $T(x, y, z) = (-2y + z, -x + y)$.
- (b)** Considerando $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 1)$, então a imagem de T é gerada pelos vetores $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$. Como $T(v_1) = (-1, 1)$ é combinação linear $T(v_2)$ e $T(v_3)$, estes dois últimos LI, segue que $\{T(v_2), T(v_3)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$. O núcleo de T tem dimensão 1 e $\mathcal{N}(T) = [(1, 1, 2)]$.

5. Considerando as bases ordenadas β e β' , encontramos:

$$[T]_{\beta'}^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. O ponto de partida é a relação $[T]_\beta = [T]_\beta^{\beta'} [v]_{\beta'}$.

(a) $T(x, y) = \frac{1}{2}(x - y, x - y, 4x + 2y)$.

- (b)** Considere a base $\beta'' = \{w_1, w_2, w_3\}$, sendo

$$w_1 = T(1, -1) = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad w_3 = T(0, 2) = (-1, -1, 2)$$

e escolha w_2 LI com w_1 e w_3 . Por exemplo, $w_2 = (0, 0, 1)$.

7. **(a)** A matriz $[T]_\beta^{\beta'}$ é a matriz 2×4

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(b) Dado $v = (x, y)$, temos que $[v]_{\beta'} = \frac{1}{3}(2x - y, x + y)$ e, portanto:

$$[Sv]_{\beta} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 3y \\ x - 2y \\ 2x - y \\ x + y \end{bmatrix} \Leftrightarrow Sv = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x - 3y & x - 2y \\ 2x - y & x + y \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$Sv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

e, como o sistema não tem solução, um tal vetor v não existe.

8. A aplicação T é dada por $T(x, y) = (-x - 2y, y)$.

(a) Os vetores do tipo $u = (-3x, x)$ satisfazem a $Tu = u$, enquanto os vetores $v = (x, 0)$ satisfazem a $Tv = -v$.

(b) Temos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, de modo que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. On the other hand,

$$\dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathcal{N}(T) = 2.$$

(c) Sendo T injetora e sobrejetora, concluímos que T é um isomorfismo. Se $T^{-1}(x, y) = (a, b)$, então:

$$(x, y) = T(a, b) = (-a - 2b, b)$$

e daí resulta que $a = -x - 2y$ e $b = y$. Logo, $T^{-1}(x, y) = (-x - 2y, y)$. Com a notação matricial,

temos:

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. As bases canônicas de \mathcal{P}_3 e \mathbb{R} são, respectivamente:

$$\beta = \{1, t, t^2, t^3\} \quad \text{e} \quad \beta' = \{1\}$$

e um cálculo direto nos conduz a:

$$T(1) = 1, \quad T(t) = 1/2, \quad T(t^2) = 1/3 \quad \text{e} \quad T(t^3) = 1/4.$$

Assim,

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

10. A base canônica de \mathcal{P}_1 é $\beta = \{1, t\}$ e temos que

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \quad \text{e} \quad T(t) = 1 - t = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t$$

e, portanto,

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Um operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ será um isomorfismo se, e somente se, for injetor. (veja as dimensões).

Temos que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) = (0, 0, 0) &\Leftrightarrow (x - y, y, y + z) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{N}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e T é um isomorfismo. As matrizes de T e T^{-1} na base canônica β são:

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T^{-1}]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde observamos que $[T]_{\beta} \cdot [T^{-1}]_{\beta} = I_{3 \times 3}$.

12. Desde que $T_1 = T_2 \circ T$, então $T = T_2^{-1} \circ T_1$ e o operador T é representado, com relação à base canônica, pela matriz $A \cdot [T_1]$, onde a matriz A é a inversa da matriz $[T_2]$. Assim,

$$[T] = [T_2]^{-1} \cdot [T_1].$$

13. As aplicações T_A e T_B são dadas por:

$$T_A(x, y) = (y, 2y, y) \quad \text{e} \quad T_B(x, y, z) = (0, x + 2y + z, -x)$$

e, portanto, $T_B \circ T_A(x, y) = (0, 6y, -y)$. Temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T_A) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \beta &= \{(1, 0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_A) &= 1. \\ \mathcal{N}(T_B) &= \{(0, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \beta &= \{(0, 1, -2)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) &= 1. \\ \mathcal{N}(T_B \circ T_A) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \beta &= \{(1, 0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B \circ T_A) &= 1. \end{aligned}$$

As colunas da matriz que representa a aplicação linear geram a imagem de tal aplicação. Observando as matrizes das aplicações T_A , T_B e $T_B \circ T_A$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \text{Im}(T_A) &= [(1, 2, 1)] & \text{Base: } \beta &= \{(1, 2, 1)\}, & \dim \text{Im}(T_A) &= 1. \\ \text{Im}(T_B) &= \{(0, y, -2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \beta &= \{(0, 1, 0), (0, 1, -1)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) &= 2. \\ \text{Im}(T_B \circ T_A) &= \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base: } \beta &= \{(0, 6, -1)\}, & \dim \text{Im}(T_B \circ T_A) &= 1. \end{aligned}$$

14. Dado $v = (x, y, z, t)$ do \mathbb{R}^4 , um cálculo direto nos dá

$$[v]_{\beta'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

e, por conseguinte,

$$[T(v)]_{\beta} = A \cdot [v]_{\beta'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z + 2t \\ 4x + 8z + 4t \\ x + 3y - 3z - t \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(v) &= \frac{1}{4} \cdot (2x + 2y + 2z + 2t)(1, 0, 0) + (4x + 8z + 4t)(-1, 0, 1) + (x + 3y - 3z - t)(1, 1, 0) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (-x - 3y - z - t, x + 3y - 3z - t, 4x + 8z + 4t). \end{aligned}$$

15. Ponto de partida: $T(x, y, z) = (x + 2y, x - z)$ e $S(x, y) = (x, x - y, 2y, 2x + y)$.

(a) Temos:

$$T(1, 0, 0) = (1, 1) = 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1),$$

$$T(1, 1, 1) = (3, 0) = 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1),$$

$$T(0, 1, -1) = (2, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1) \quad \text{e}$$

$$S(1, 0) = (1, 1, 0, 2) = 2 \cdot (1, 0, 0, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1, 1) + (-2) \cdot (0, 0, 1, 0) + (-1) \cdot (1, -1, 0, 0),$$

$$S(1, 1) = (1, 0, 2, 3) = 1 \cdot (1, 0, 0, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1, 1) + (-1) \cdot (0, 0, 1, 0) + 0 \cdot (1, -1, 0, 0).$$

Logo:

$$[T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_{\beta''}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto:

$$[S]_{\beta''}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) A aplicação composta $S \circ T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ vem dada por:

$$[S \circ T](x, y, z) = S(T(x, y, z)) = S(x + 2y, x - z) = (x + 2y, 2y + z, 2x - 2z, 3x + 4y - z).$$

(c) A matriz $[S \circ T]_{\beta''}^{\beta'}$ coincide com o produto $[S]_{\beta''}^{\beta} \cdot [T]_{\beta}^{\beta'}$ encontrado em (b).

16. Recorde-se que um operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ será um isomorfismo se, e somente se, for injetor.

(a) Mostremos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. De fato:

$$T(x, y, z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Assim, T é injetor e, conseqüentemente um isomorfismo. A matriz de T é:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) A inversa é dada por $T^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{4} \cdot (x + y + 2z, x - 3y + 2z, -x - y + 2z)$ e temos:

$$[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, ao escalonar a matriz ampliada $[A, I_n]$ chegamos à matriz $[I_n, A^{-1}]$. No caso, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

17. Atividade de Sala de Aula.

2.4 AUTOVALOR & AUTOVETOR

1. Em cada caso, considere a matriz de T com relação às bases canônicas.

(a) Considerando a base canônica do \mathbb{R}^2 , temos:

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, com auto-espacos correspondentes $V_{\lambda_1} = [(\sqrt{2}, 1)]$ e $V_{\lambda_2} = [(-\sqrt{2}, 1)]$.

(b) Neste caso, o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ e os autovalores são $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Os auto-espacos são:

$$V_{\lambda_1} = [(1, \sqrt{2})] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [(1, -\sqrt{2})].$$

(c) Temos $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ e os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Os auto-espacos correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1, 0, 0)], \quad V_{\lambda_2} = [(1, 1, 0)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = [(1, 1, 1)].$$

- (d) O polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda + 1)(3 - \lambda^2)$ e os autovalores são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{3}$. Os auto-espacos correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1, -2, -1)], \quad V_{\lambda_2} = \left[\left(1, \sqrt{3} - 1, 1 \right) \right], \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = \left[\left(1, 1 - \sqrt{3}, 1 \right) \right].$$

- O polinômio característico é $p(\lambda) = (1 - \lambda)^4$ e $\lambda_1 = 1$ é o autovalor de ordem 4. O auto-espaco correspondente é:

$$V_{\lambda_1} = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)]$$

e os auto-vetores são do tipo $v = (x, 0, 0, t)$, $x, t \in \mathbb{R}$.

- (f) Temos $p(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)^3$ e os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Os auto-espacos são:

$$V_{\lambda_1} = [(0, 0, 0, 1)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)] \quad (\dim V_{\lambda_1} = 1 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 2).$$

- (g) No espaco $\mathcal{M}_{2 \times 2}$, consideramos a base canônica:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- e encontramos $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3(\lambda + 1)$. Os autovalores são, portanto, $\lambda = 1$, de ordem 3 e $\lambda = -1$. Os auto-espacos correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

- (h) O único autovalor é $\lambda = 0$ e qualquer polinômio constante e não nulo é um vetor próprio associado. O auto-espaco é $V_\lambda = \mathbb{R}$.

- (i) No espaco \mathcal{P}_2 , consideramos a base canônica $\beta = \{1, x, x^2\}$ e encontramos $p(\lambda) = -\lambda^3$. O único autovalor é $\lambda = 0$ e $V_\lambda = \mathbb{R}$.

- (j) Temos $T(1) = x$, $T(x) = 1$ e $T(x^2) = x^2$ e, portanto:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$, com raízes (autovalores) $\lambda_1 = 1$ (dupla) e $\lambda_2 = -1$. Os autovetores associados ao autovalor λ_1 são os polinômios do tipo $ax^2 + bx + b$, enquanto os autovetores associados ao autovalor λ_2 são os polinômios do tipo $bx - b$. Os auto-espços são:

$$V_{\lambda_1} = [x + 1, x^2] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [x - 1] \quad (\dim V_{\lambda_1} = 2 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 1).$$

(k) Dado $p(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $T(p) = p(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$, de modo que:

$$T(1) = 1, \quad T(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad T(x^2) = x^2 + 2x + 1.$$

A matriz de T na base $\beta = \{1, x, x^2\}$ é, portanto:

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3$. O autovalor é $\lambda = 1$, de multiplicidade 3 e os autovetores correspondentes são os polinômios $q(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$. O autoespaço é o subespaço de dimensão $n = 1$, dado por:

$$V_{\lambda_1} = [1] = \mathbb{R}.$$

(l) Dado $v = ax^2 + bx + c$, temos que $T(v) = -6ax^2 - 2bx - 2a$ de onde segue que:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = -2 \quad \text{e} \quad T(x^2) = -6x^2 - 2.$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2$, com raízes (autovalores) $\lambda_1 = 0$ (dupla) e $\lambda_2 = -6$. Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [x, 1 + 3x^2].$$

Em outras palavras, V_{λ_1} é constituído pelos polinômios constantes, enquanto V_{λ_2} é o subespaço constituído pelos polinômios do tipo $3ax^2 + bx + a$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Recorde-se que T é injetor se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Se $\lambda = 0$ é um autovalor de T , existe $v \neq 0$, tal que $T(v) = 0 \cdot v = 0$ e daí resulta que $v \in \mathcal{N}(T)$ e, portanto, $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

3. As matrizes de T em relação às bases β e β' são, respectivamente:

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e temos:

(a) Em relação à base β :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2.$$

(b) Em relação à base β' :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (1 - \lambda)^2.$$

4. Temos que $R_{\theta}(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ e, considerando $\theta = k\pi$, encontramos:

$$R_{\theta}(x, y) = \left((-1)^k x, (-1)^k y \right).$$

Com relação à base canônica, temos:

$$[R_{\theta}]_{\beta} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é $p(\lambda) = \pm 1$, conforme seja k par ou ímpar.

5. Com os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, construímos a base de autovetores $\beta = \{(3, 1), (-2, 1)\}$ e teremos:

$$A = [T]_{\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $T(x, y) = (-6y, -x + y)$.

6. Sendo T um isomorfismo, qualquer autovalor λ é não nulo e existe $v \neq \mathbf{0}$, tal que:

$$T(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow v = T^{-1}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T^{-1}(v) \Leftrightarrow T^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} \cdot v.$$

7. Sejam v_1 e v_2 autovetores de um operador $T : V \rightarrow V$, associados, respectivamente, aos autovalores distintos λ_1 e λ_2 . Considerando uma combinação linear nula

$$x \cdot v_1 + y \cdot v_2 = \mathbf{0} \quad (\text{eq2_1})$$

mostra-se que $x = y = 0$. De fato, segue de (??) que:

$$x\lambda_1 \cdot v_1 + y\lambda_1 \cdot v_2 = \mathbf{0} \quad (\text{I})$$

$$x \cdot T(v_1) + y \cdot T(v_2) = \mathbf{0} \quad (\text{II})$$

e subtraindo (I) de (II), encontramos $y = 0$. De forma similar, mostre que $x = 0$. (a equação (I) é obtida multiplicando (??) por λ_1 e a equação (II) é equivalente a $x\lambda_1 \cdot v_1 + y\lambda_2 \cdot v_2 = 0$).

2.5 OPERADORES DIAGONALIZÁVEIS

1. Como ilustração faremos o item (d). Ressaltamos que o procedimento é o mesmo em todos os casos: encontramos os autovalores e uma base de autovetores.

(a) Os autovalores do operador T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -3$, com autoespaços correspondentes:

$$V_{\lambda_1} = \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

$$V_{\lambda_2} = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

$$V_{\lambda_3} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Em relação à base $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (0, 1, 0)\}$, de autovetores, o operador T é representado pela matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. A matriz de T é do tipo:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

com polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2$, com duas raízes distintas, e autovetores corespondentes LI, exceto no caso em que $a = c$ e $b = 0$, e, neste caso, matriz é diagonal.

3. Se $a \neq 1$, o operador T é diagonalizável. Por outro lado, S é diagonalizável apenas no caso em que $a = 0$.

2.6 EXERCÍCIOS ADICIONAIS

1. Para verificar que T é linear, observe que

$$\begin{aligned} T(\lambda(u_1, v_1) + (u_2, v_2)) &= T(\lambda u_1 + u_2, \lambda v_1 + v_2) = \lambda u_1 + u_2 + \lambda v_1 + v_2 \\ &= \lambda(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 = \lambda T(u_1, v_1) + T(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Dado $u + v$ em $W_1 \oplus W_2$, então $T(u, v) = u + v$ e, portanto, T é sobrejetora. Por outro lado, se $(u, v) \in \ker(T)$, então $u + v = \mathbf{0}$ em $W_1 \oplus W_2$ e como $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, segue que $u = v = \mathbf{0}$. Assim, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e T é injetora.

2. Dado v em V , então $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n$ e, considerando que $T(v_j) = S(v_j)$, obtemos:

$$\begin{aligned} S(v) &= x_1 \cdot S(v_1) + x_2 \cdot S(v_2) + \dots + x_n \cdot S(v_n) \\ &= x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \dots + x_n \cdot T(v_n) \\ &= T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n) = T(v). \end{aligned}$$

3. Sendo $T : V \rightarrow W$ um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$, e T^{-1} será um isomorfismo se, e somente se, for injetor. Ora,

$$T^{-1}(w_1) = T^{-1}(w_2) \Leftrightarrow T(T^{-1}(w_1)) = T(T^{-1}(w_2)) \Leftrightarrow w_1 = w_2.$$

Logo, T^{-1} é injetor e, portanto, um isomorfismo.

4. Sendo $T : V \rightarrow W$ um isomorfismo, então $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\text{Im}(T) = W$ (T é injetor e sobrejetor).

Logo,

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \text{Im}(T) = 0 + \dim W = \dim W.$$

Por outro lado, dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, então $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ são LI. De fato:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \dots + x_n \cdot T(v_n) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0. \end{aligned}$$

5. Dado que $P(x, y, z, t) = (x, y, 0, 0)$, temos:

(a) $P^2(x, y, z, t) = P(P(x, y, z, t)) = P(x, y, 0, 0) = (x, y, 0, 0) = P(x, y, z, t)$.

(b) Dado $v = (x, y, z, t)$ um vetor do \mathbb{R}^4 , então:

$$v = (x, y, z, t) = (x, y, 0, 0) + (0, 0, z, t) = P(x, y, z, t) + (0, 0, z, t) \in \text{Im}(P) + \mathcal{N}(P).$$

Considerando que $\text{Im}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{\mathbf{0}\}$, deduzimos que $\mathbb{R}^4 = \text{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

(c) Considere qualquer base do tipo $\beta = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, \lambda, 0), (0, 0, 0, \mu)\}$, com $\lambda\mu \neq 0$.

6. As matrizes $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta'}$ e $[T]_{\beta'}^{\beta}$ são inversas uma da outra.

7. Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é do tipo $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ e a imagem da reta $L = \{(At + B, Ct + D), t \in \mathbb{R}\}$ é a reta de equações paramétricas:

$$u = (aA + bC)t + aB + bD$$

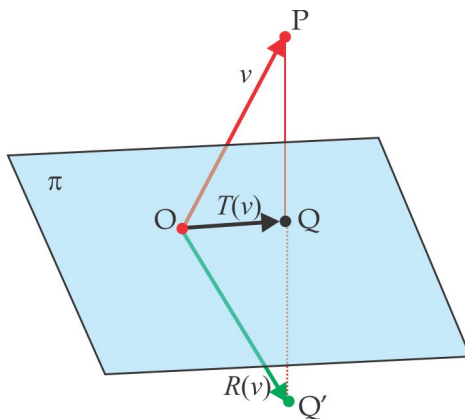
$$v = (cA + dC)t + cB + dD.$$

8. Atividade de Sala de Aula.

9. Atividade de Sala de Aula.

10. Atividade de Sala de Aula.

11. Na figura abaixo ilustramos os operadores T e R , onde Q é o ponto médio de PQ' e vemos que $T(P) = Q$ e $R(P) = Q'$.



- (a) Um ponto genérico da reta r que passa por $P(x, y, z)$ e é perpendicular ao plano π é $X = (x + 3t, y + 2t, z + t)$ e no instante $t_0 = -\frac{1}{14}(3x + 2y + z)$ o ponto X estará sobre o plano π .

Logo

$$T(x, y, z) = Q = \frac{1}{14}(5x - 6y - 3z, -6x + 10y - 2z, -3x - 2y - 13z).$$

Por outro lado, considerando que Q é o ponto médio de PQ' , temos

$$Q = \frac{1}{2}(P + Q') \Rightarrow Q' = 2Q - P = \frac{1}{7}(-2x - 6y - 3z, -6x + 3y - 2z, -3x - 2y + 6z).$$

- (b) É oportuno observar que se u é um vetor perpendicular ao plano π , então $R(u) = -u$ e que

$$T(v) = 0 \Leftrightarrow v \perp \pi \quad \text{e} \quad T(u) = u \Leftrightarrow u \in \pi.$$

A base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ deve ser tal que $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = 0$ e $T(v_3) = v_3$. Escolha v_1 e v_3 LI, ambos no plano π , e v_2 ortogonal ao plano.

12. Um tal operador possui autovalor $\lambda = a$, de multiplicidade n , e existe uma base β^* de V em relação a qual a matriz de T é diagonal, ou seja, $[T]_{\beta^*} = a \cdot I$. Se β é uma outra base de V , as matrizes $[T]_{\beta}$ e $[T]_{\beta^*}$ são equivalentes, isto é, existe uma matriz invertível P , such that $[T]_{\beta} = P^{-1} \cdot [T]_{\beta^*} \cdot P$ e, conseqüentemente:

$$[T]_{\beta} = P^{-1} \cdot [T]_{\beta^*} \cdot P = P^{-1} \cdot (a \cdot I) \cdot P = a (P^{-1} \cdot I \cdot P) = a \cdot I$$