Introdução

Vamos analisar, do ponto de vista gráfico/algébrico, as funções elementares do cálculo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = ax \quad \text{e} \quad b(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \quad \text{e} \quad b \neq 0.$$

Embora gráfica e algebricamente elas sejam muito parecidas, seus gráficos são retas paralelas, como ilustrado na Figura 6.0, a função f possui propriedades algébricas especiais não atendidas pela função g, tais como: **(i)** $f(0) = 0$, **(ii)** $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ e **(iii)** $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e essas propriedades são válidas sejam quais forem os *vetores* x e y e seja qual for o valor atribuído ao escalar λ. De fato, **(i)** decorre de **(ii)**, com $\lambda = 0$, e temos:

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot x) &= a \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (ax) = \lambda f(x) \quad \text{e} \\ f(x + y) &= a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

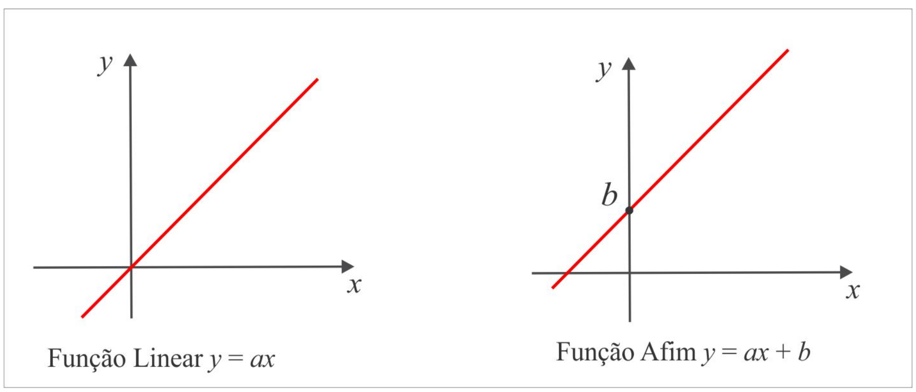

Figura 6.2: Linear×Afim

Como $b \neq 0$, vemos que a função g não goza de nenhuma das propriedades **(i)**, **(ii)** ou **(iii)**; a função f é conhecida por *Função Linear* e a função g por *Função Afim*.

Dados dois espaços vetoriais V e W, uma *aplicação* (ou *transformação*) $T : V \to W$ é uma regra que associa a cada vetor v do espaço V um único vetor $w = T(v)$ no espaço W. Os espaços V e W são, respectivamente, o domínio e o contradomínio da aplicação T; o vetor $w = T(v)$ é a imagem do vetor v pela aplicação T e o conjunto:

$$\operatorname{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$$

recebe o nome de *Conjunto Imagem* ou simplesmente *Imagem* de T, também representado por $T(V)$.

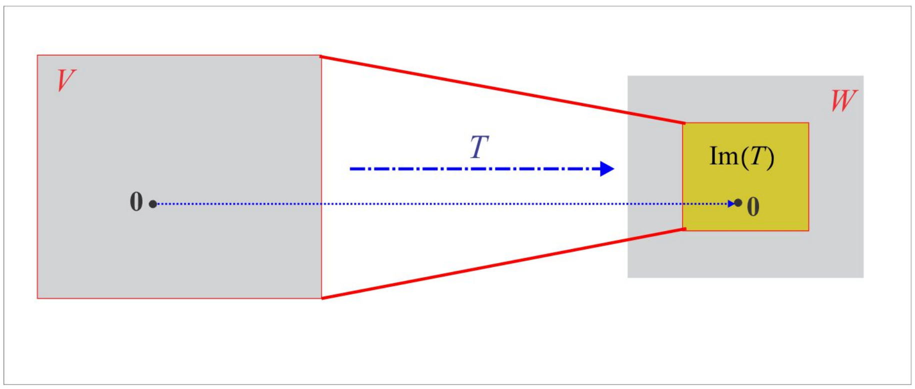

Figura 6.3: Aplicação Linear $T : V \to W$.

DEFINIÇÃO 6.0.1 *Uma aplicação $T : V \to W$ é dita **Linear** se:*

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v), \quad u, v \in V.$

(ii) $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \quad u \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

É oportuno ressaltar que se $T : V \to W$ é linear, então $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (os vetores nulos de V e W estão representados pelo mesmo símbolo $\mathbf{0}$). De fato, se T é linear, então por **(ii)**, temos:

$$T(\mathbf{0}) = T(0 \cdot \mathbf{0}) = 0 \cdot T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

e, consequentemente, se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, então a plicação T não é linear.

As condições **(i)** e **(ii)** que definem a linearidade de T podem ser compactadas em uma só e temos a equivalência:

$$T : V \to W \text{ é uma aplicação linear} \Leftrightarrow T(\lambda \cdot u + v) = \lambda \cdot T(u) + T(v), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad u, v \in V.$$

EXEMPLO 6.0.2 *A aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$*, definida por* $T(x, y) = (x, y, 1)$ *não é linear, porque*:

$$T(\mathbf{0}) = T(0,0) = (0,0,1) \neq \mathbf{0}.$$

EXEMPLO 6.0.3 *A aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$*, definida por* $T(x, y, z) = (x, yz)$ *não é linear, embora* $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$*. Se* $u = (0,0,1)$ *e* $v = (0,1,0)$*, temos que*:

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(0,1,1) = (0,1) \quad e \\ T(u) + T(v) &= T(0,0,1) + T(0,1,0) = (0,0). \end{aligned}$$

EXEMPLO 6.0.4 *A aplicação* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$*, definida por* $T(p) = 1 + p(0)$ *não é linear, porque* $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$.

EXEMPLO 6.0.5 *A aplicação* $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $T(p) = p'(1)$ *é linear. De fato, dados dois vetores* p *e* q *no espaço* $\mathbb{P}_3$ *e um escalar* λ*, usando regras de derivação, encontramos*:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot p + q) &= (\lambda \cdot p + q)'(1) = \lambda \cdot p'(1) + q'(1) \\ &= \lambda \cdot T(p) + T(q). \end{aligned}$$

Normalmente, as aplicações lineares $T : V \to \mathbb{F}$*, em que o contradomínio é o corpo* $\mathbb{F}$*, recebem o nome de* ***Funcionais Lineares****.*

EXEMPLO 6.0.6 *As translações* $T(x, y) = (x + a, y + b)$ *não são lineares, exceto se* $a = 0$ *e* $b = 0$*.*

EXEMPLO 6.0.7 *A projeção* $\pi_{xy} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, no plano* xOy*, dada por* $\pi_{xy}(x, y, z) = (x, y, 0)$ *é linear. Também são lineares as projeções* π_x *e* π_y *nos eixos* Ox *e* Oy*, respectivamente, dadas por*:

$$\pi_x(x, y, z) = (x, 0, 0) \quad e \quad \pi_y(x, y, z) = (0, y, 0).$$

6.1 Transformações Elementares do Plano $\mathbb{R}^2$

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, além de descrever o tipo mais simples de dependência entre duas variáveis, goza de uma propriedade geométrica interessante: ela transforma retas em retas, como será estabelecido no Lema 6.1.1. Vejamos algumas transformações especiais.

1. CONTRAÇÕES & DILATAÇÕES: Dado um número real positivo λ, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(v) = \lambda v$, isto é, $T(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$, recebe o nome de *contração* ou *dilatação*, conforme seja λ menor ou maior do que 1, como ilustrado na Figura 6.4.

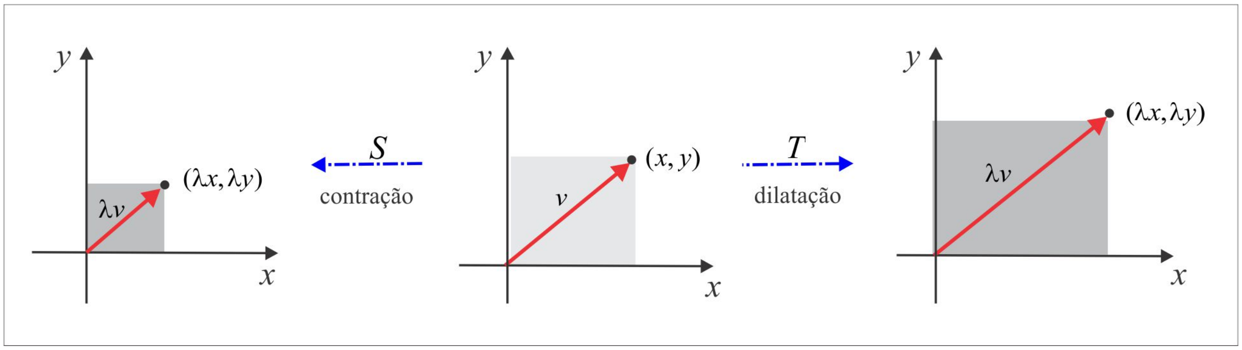

Figura 6.4: Contração & Dilatação.

2. REFLEXÕES: As transformações lineares R_x, R_y e R_0 de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definidas por:

$$R_x(x,y) = (x,-y)\,, \quad R_y(x,y) = (-x,y) \quad \text{e} \quad R_0(x,y) = (-x,-y)\,,$$

recebem os nomes de *reflexão no eixo x*, *reflexão no eixo y* e *reflexão na origem*, respectivamente, e estão ilustradas na Figura 6.5.

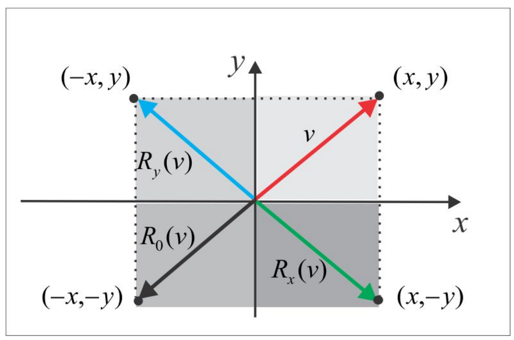

Figura 6.5: Reflexões.

3. ROTAÇÃO: A transformação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por:

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta, x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta)$$

é conhecida por *rotação* de um ângulo θ e com a notação matricial, temos:

$$R_\theta(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4. CISALHAMENTOS: Por *cisalhamento horizontal*, entendemos qualquer transformação linear $C_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, do tipo $C_\lambda(x, y) = (x + \lambda y, y)$, sendo λ uma constante real. Na Figura 6.6 ilustramos um cisalhamento em que $\lambda > 1$. Como seria um *cisalhamento vertical*?

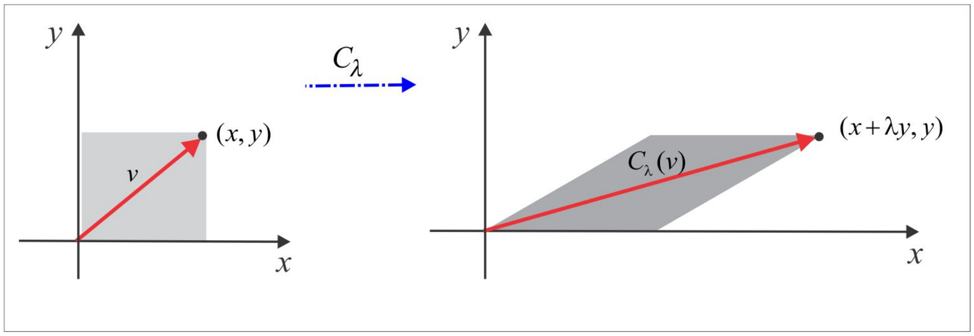

Figura 6.6: Cisalhamento Horizontal.

LEMA 6.1.1 *Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transforma retas em retas.*

Prova: Primeiro observamos que se $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear, existem escalares a, b, c e d, tais que:

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy) = (u, v)$$

e mostremos que a imagem da reta $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t, \quad t \in \mathbb{R}\}$ é uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ (plano uv). De fato, das relações:

$$u = ax + by \quad \text{e} \quad v = cx + dy$$

encontramos como imagem da reta S a reta S^*, dada por:

$$S^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = u_0 + \alpha_0 t,\ v = v_0 + \beta_0 t, \quad t \in \mathbb{R}\},$$

sendo $u_0 = ax_0 + by_0, \quad v_0 = cx_0 + dy_0, \quad \alpha_0 = a\alpha + b\beta \quad$ e $\quad \beta_0 = c\alpha + d\beta.$ ■

EXEMPLO 6.1.2 *Seja S o quadrado de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ e $C(0,1)$ e determinemos a imagem de S pela transformação linear $T(x, y) = (x - y, x + 2y)$. Considerando que T transforma retas em retas, vemos que a imagem $T(S)$ é o quadrilátero ilustrado na Figura 6.7, de vértices*

$$T(\mathbf{0}) = (0, 0), \quad T(A) = (1, 1), \quad T(B) = (0, 3) \quad e \quad T(C) = (-1, 2)$$

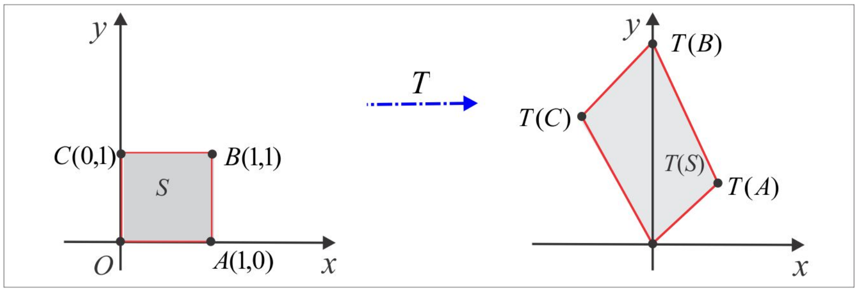

Figura 6.7: Imagem de um Quadrado.

6.2 Operações com Aplicações Lineares

Com o objetivo de tornar o conjunto $\mathcal{L}(V,W)$ das aplicações lineares $T : V \to W$ um espaço vetorial é necessário definir em $\mathcal{L}(V,W)$ as operações soma de aplicações lineares e produto de uma aplicação linear por um escalar. Dadas duas aplicações lineares $T : V \to W$ e $S : V \to W$ e λ um escalar, definimos:

$$\begin{aligned} &\textbf{SOMA:} \qquad (T+S)(v) = T(v) + S(v) \\ &\textbf{PRODUTO:} \quad (\lambda \cdot T)(v) = \lambda \cdot T(v). \end{aligned} \tag{6.1}$$

É claro $\mathcal{L}(V,W)$ é fechado para essas operações, isto é, $T+S$ e $\lambda \cdot T$ estão em $\mathcal{L}(V,W)$ e as propriedades **(EV1)-(EV8)** são atendidas, onde o vetor nulo é a aplicação linear identicamente nula $\mathbf{0}(v) = \mathbf{0}$, $\forall\, v \in V$. Aqui ressaltamos duas situações:

(i) FUNCIONAIS LINEARES As aplicações lineares $T : V \to \mathbb{F}$, em que o espaço de chegada é o corpo $\mathbb{F}$ (em geral $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ é o corpo dos números reais), são conhecidas na literatura por *funcionais lineares*. Decorre das propriedades da derivação e integração que os funcionais abaixo são lineares.

(a) $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}, \quad T(p) = \displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$ e **(b)** $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}, \quad T(p) = p'(0)$.

(ii) OPERADORES LINEARES No caso em que $W = V$, o espaço $\mathcal{L}(V,V)$ é normalmente indicado por $\mathcal{L}(V)$ e seus vetores (que são as aplicações lineares $T : V \to V$) são normalmente conhecidos por *operadores* de V. Além do operador nulo, outro operador de V igualmente conhecido é a identidade $\mathrm{I} : V \to V$, dada por $\mathrm{I}(v) = v$.

Além das operações usuais (6.1), ressaltamos a importância da *composição* de aplicações lineares. Dados U, V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{F}$, sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ aplicações lineares, como ilustrado na Figura 6.8, e definimos uma nova aplicação $S \circ T : U \to W$ por:

$$(S \circ T)(u) = S(T(u)), \quad u \in U,$$

que jaz no espaço $\mathcal{L}(U,W)$, ou seja, é uma aplicação linear de $U \to W$. De fato, da linearidade das aplicações S e T, temos:

$$\begin{aligned}(S\circ T)(\lambda\cdot u+v) &= S(T(\lambda\cdot u+v)) = S(\lambda\cdot T(u)+T(v)) = S(\lambda\cdot T(u))+S(T(v))\\ &= \lambda\cdot S(T(u))+S(T(v)) = \lambda\cdot(S\circ T)(u)+(S\circ T)(v)\end{aligned}$$

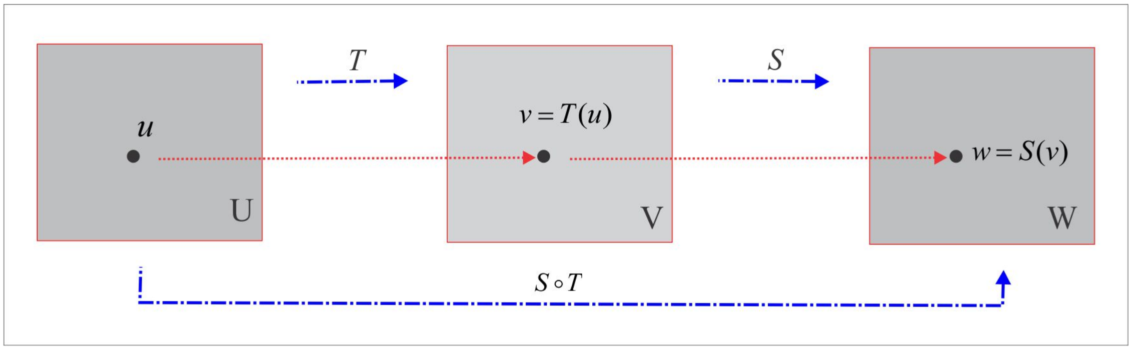

Figura 6.8: Composição de Aplicações Lineares.

EXEMPLO 6.2.1 *Se $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ e $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ são as aplicações lineares definidas por:*

$$T(x,y)=(x,y,x+2y) \quad e \quad S(x,y,z)=(2x,y-z),$$

a aplicação composta $S\circ T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é tal que:

$$S\circ T(x,y)=S(x,y,x+2y)=(2x,-x-y).$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.0

1. Verifique quais das aplicações $T:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ abaixo são lineares.
   (a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad T(x,y)=(x-y,0)$
   (b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad T(x,y)=(x,y,x+y)$
   (c) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad T(x)=ax$
   (d) $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2,\quad T(x,y,z,t)=(y-x,t-z)$
   (e) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad T(x)=(x,\cos x)$
   (f) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad T(x,y,z)=(x-1,y+z)$
   (g) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4,\quad T(x)=\left(x,-x,x^2,0\right)$
   (h) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad T(x,y,z)=(x,z-y)$

2. Seja A uma matriz quadrada 2×2 e defina $T_A:\mathcal{M}_{2\times 2}\to\mathcal{M}_{2\times 2}$ por $T_A(X)=AX$. É a aplicação T_A linear?

3. Mostre que a aplicação $T : \mathcal{M}_{3\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$ definida por $T(X) = X^t$ é linear.

4. Construa duas matrizes A e B, de ordem 2×2, tais que $\det(A) = \det(B) = 0$ e $\det(A+B) \neq 0$. A partir daí conclua que a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, definida por $T(X) = \det(X)$, não é linear.

5. Verifique que as aplicações abaixo são lineares.

   (a) $T : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{1\times 2}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} x & ax \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$

   (b) $T : \mathcal{M}_{3\times 3} \to \mathbb{R}, \quad T(A) = \operatorname{tr}(A).$

   (c) $T : \mathcal{M}_{2\times 1} \to \mathcal{M}_{2\times 2}, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$

   (d) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2, \quad T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & z-t \end{pmatrix}.$

   (e) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{P}_2, \quad T\begin{pmatrix} x & y \\ z & r \end{pmatrix} = (x-y)t^2 + zt + r.$

6. Verifique se a transformação $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$, definida por $T(p)(x) = x + xp(x)$ é linear. E a aplicação $S : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$, definida por $S(p)(x) = p(x) + x^2 p'(x)$, é linear?

7. Encontre a aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(1,2) = (1,1)$ e $T(0,1) = (1,0)$.

8. Seja $V = \mathcal{M}_{n\times n}$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n. Fixada uma matriz A em V, decida sobre a linearidade das transformações:

   (a) $T(X) = A + X$ **(b)** $S(X) = AX - XA$.

9. Identifique e esboce o gráfico da imagem do retângulo $R = [0,1] \times [1,2]$ pela aplicação $T(x,y) = (x-y, -x+2y)$.

10. Qual a aplicação linear $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ que satisfaz a: $T(x+1) = x^2 - 1$ e $T(x-1) = x^2 + x$?

11. Qual o operador $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ que satisfaz às condições $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$?

12. Encontre as aplicações $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tais que:

    $T(1,1) = (3,2,1)$, $T(0,-2) = (0,1,0)$, $S(3,2,1) = (1,1)$, $S(0,0,1) = (0,0)$ e $S(0,1,0) = (0,-2)$.

    Calcule $T(1,0)$ e $T(0,1)$ e encontre $S \circ T$.

13. Encontre a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma rotação de $\pi/4$ rad, seguida de uma dilatação de $\sqrt{2}$.

14. Descreva a transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa uma reflexão em torno da reta $y = x$.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação linear, definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$. Mostre que:

$$T^2 = 2 \cdot T, \quad T^3 = 4 \cdot T \quad \text{e} \quad T^4 = 8 \cdot T.$$

Usando o processo indutivo, deduza que $T^n = 2^{n-1} \cdot T$.

16. Construa dois operadores lineares não nulos $S,\ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tais que $T^2 = I$ e $S^2 = S$.

6.3 Núcleo, Imagem & Isomorfismo

A cada transformação linear $T : V \to W$, associamos os seguintes subconjuntos:

▶ NÚCLEO OU KERNEL DE T Indicado por $\mathcal{N}(T)$ ou $\ker(T)$ o núcleo da transformação linear T é definido por:

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V : T(v) = \mathbf{0}\} = \ker(T). \qquad \text{(subespaço vetorial de } V\text{)}$$

▶ IMAGEM DE T Indicada por $\operatorname{Im}(T)$ ou $T(V)$ a imagem da transformação linear T é definida por:

$$\operatorname{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v)\,,\ \text{para algum } v \in V\} = T(V). \qquad \text{(subespaço vetorial de } W\text{)}$$

Tendo em vista que $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, concluímos que o vetor nulo $\mathbf{0}$ de V jaz no subconjunto $\ker(T)$, enquanto o vetor nulo $\mathbf{0}$ de W jaz na imagem $\operatorname{Im}(T)$ e, portanto, $\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ são subconjuntos não vazios ($\ker(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ são subespaços vetoriais de V e W, respectivamente). Na Figura 6.9 ilustramos graficamente o núcleo e a imagem de uma aplicação linear $T : V \to W$.

LEMA 6.3.1 *Os subconjuntos* $\ker(T)$ *e* $\operatorname{Im}(T)$ *são subespaços vetoriais de* V *e* W*, respectivamente.*

Prova: Sejam u e v dois vetores de $\ker(T)$ e λ um escalar. Temos que $T(u) = T(v) = \mathbf{0}$, e assim:

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) = \lambda \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de onde resulta que $\ker(T)$ é um subespaço vetorial de V. Por outro lado, dados w_1 e w_2 em $\operatorname{Im}(T)$, existem v_1 e v_2 no espaço V, tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$ e pela linearidade de T deduzimos que:

$$\lambda \cdot w_1 + w_2 = \lambda \cdot T(v_1) + T(v_2) = T(\lambda \cdot v_1 + v_2) \tag{6.2}$$

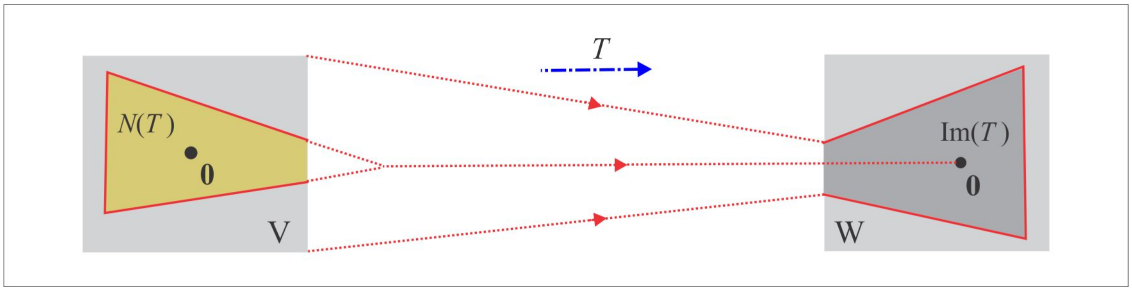

Figura 6.9: Núcleo & Imagem.

e a relação (6.2) nos diz que $\lambda \cdot w_1 + w_2$ jaz em $\operatorname{Im}(T)$. ■

LEMA 6.3.2 (Conjunto Gerador de $\operatorname{Im}(T)$) *Se $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador do espaço vetorial V, então $\mathcal{G}' = \{Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n\}$ é um conjunto gerador da imagem* $\operatorname{Im}(T)$.

Prova: Seja $w = Tv$, $v \in V$, um vetor genérico do subespaço $\operatorname{Im}(T)$. Como $\mathcal{G}$ gera o espaço V, existem excalares $x_1, x_2, \ldots x_n$, tais que:

$$v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_n \cdot v_n$$

e daí resulta:

$$w = Tv = x_1 \cdot Tv_1 + x_2 \cdot Tv_2 + \ldots + x_n \cdot Tv_n. \tag{6.3}$$

Como queríamos, vemos em (6.3) o vetor w escrito como combinação linear dos vetores de $\mathcal{G}'$. ■

É oportuno ressaltar que se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então o subespaço $\operatorname{Im}(T)$ é gerado pelos vetores $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$ e dentre esses geradores podemos extrair uma base de $\operatorname{Im}(T)$. Por outro lado, o núcleo de T pode ser visto, em muitos casos, como o espaço solução de um sistema linear homogêneo, cuja dimensão é igual ao grau de liberdade, e uma base do núcleo pode ser construída usando as variáveis livres do sistema.

EXEMPLO 6.3.3 *Uma aplicação linear com kernel nulo, isto é,* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, *transforma vetores LI em vetores LI. De fato, se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI e*

$$x_1 \cdot Tv_1 + x_2 \cdot Tv_2 + \ldots + x_n \cdot Tv_n = \mathbf{0}$$

então $T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2, \ldots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0}$ e daí resulta

$$x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2, \ldots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} \tag{6.4}$$

já que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. *Como $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são LI, segue de (6.4) que* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

EXEMPLO 6.3.4 *Seja a transformação linear* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$*, dada por*:

$$T(x,y,z)=(x-z,0,y,x+y-z).$$

Vamos encontrar uma base de $\ker(T)$*, outra de* $\operatorname{Im}(T)$ *e, por fim, comprovar a relação*:

$$\dim\mathbb{R}^3=\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T).$$

(i) Explorando $\ker(T)$: Dado um vetor $v=(x,y,z)$ do núcleo de T, temos:

$$T(v)=\mathbf{0}\Leftrightarrow x-z=0,\ y=0,\ \text{e}\ x+y-z=0\Leftrightarrow y=0\ \text{e}\ x=z.$$

Logo, $\ker(T)=\{(x,0,x):x\in\mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B}=\{(1,0,1)\}$ é uma base de $\ker(T)$. **(dim ker(T) = 1)**

(ii) Explorando $\operatorname{Im}(T)$: Seja $w=(x-z,0,y,x+y-z)$ um vetor genérico de $\operatorname{Im}(T)$. Temos:

$$\begin{aligned} w &= (x-z,0,y,x+y-z)=(x,0,0,x)+(0,0,y,y)+(-z,0,0,-z)\\ &= x\cdot(1,0,0,1)+y\cdot(0,0,1,1)+z\cdot(-1,0,0,-1)\end{aligned}$$

Logo, $\operatorname{Im}(T)=\big[(1,0,0,1),(0,0,1,1),(-1,0,0,-1)\big]$ e uma base de $\operatorname{Im}(T)$ pode ser extraída do conjunto gerador de duas maneiras:

(a) Eliminando a dependência linear dos geradores: O vetor $w_3=(-1,0,0,-1)$ é um múltiplo escalar do vetor $w_1=(1,0,0,1)$ e pode ser sacado do conjunto gerador, restando os geradores LI $w_1=(1,0,0,1)$ e $w_2=(0,0,1,1)$, que formam a base $\mathcal{B}'=\{w_1,w_2\}$ de $\operatorname{Im}(T)$. **(dim Im(T) = 2)**

(b) Por escalonamento da matriz geradora: Escalonando a matriz A cujas colunas são os geradores $w_1,\ w_2$ e w_3, encontramos:

$$A_{\mathcal{E}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

onde destacamos as colunas-pivô $j_1=1$ e $j_2=2$ (primeira e segunda colunas) e isto nos conduz à base $\{w_1,w_2\}$. **(dim Im(T) = 2)**

Por fim, temos

$$3=\dim\mathbb{R}^3=1+2=\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T).$$

EXEMPLO 6.3.5 *Seja* $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 3}$ *a aplicação linear definida por:*

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z-t & 0 \end{pmatrix}$$

e identifiquemos os subespaços $\ker(T)$ *e* $\operatorname{Im}(T)$.

Solução: Um vetor (matriz) A jaz no núcleo de T se, e só se, $T(A) = \mathbf{0}$.

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z-t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0,\ y = 0 \quad \text{e} \quad z = t.$$

Logo, o núcleo de T é constituído das matrizes $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & z \end{pmatrix}$ e temos $\dim\ker(T) = 1$. A imagem de T é o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}$ constituído das matrizes B do tipo:

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & z-t & 0 \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e do conjnuto gerador $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ extraímos, por eliminação da dependência linear, a base:

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Logo, $\dim\operatorname{Im}(T) = 3$ e, mais uma vez, comprovamos a relação:

$$\dim\mathcal{M}_{2\times 2} = \dim\mathcal{N}(T) + \dim\operatorname{Im}(T). \qquad (\mathbf{4 = 1 + 3})$$

O seguinte resultado, que relaciona as dimensões do domínio V, do núcleo $\mathcal{N}(T)$ e da imagem $\operatorname{Im}(T)$ de uma transformação linear $T : V \to W$, é conhecido por *Teorema do Núcleo e da Imagem* e se constitui em um dos mais importantes resultados de álgebra linear em dimensão finita.

TEOREMA 6.3.6 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Se* $T : V \to W$ *é uma transformação linear entre espaços vetoriais* V *e* W*, de dimensão finita, então:*

$$\boxed{\dim V = \dim\mathcal{N}(T) + \dim\operatorname{Im}(T).}$$

Demonstração: No caso em que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, combinando o Lema 6.3.2 com o Exemplo 6.3.3 resulta que $\mathcal{B}' = \{Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e o teorema está demonstrado, neste caso. Suponhamos $\ker(T) \neq \{\mathbf{0}\}$ e seja $\mathcal{B}'' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de $\ker(T)$, a qual é completada a uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ do espaço V, e mostremos que $\mathcal{B}''' = \{Tv_{k+1}, \ldots, Tv_n\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$. De fato, é claro que $\mathcal{B}'''$ é um conjunto LI e dado $w \in \mathrm{Im}(T)$, então:

$$w = \underbrace{T\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot v_i\right)}_{=\,\mathbf{0}} + T\left(\sum_{j=k+1}^{n} x_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} x_j \cdot T(v_j). \tag{6.5}$$

Resulta de (6.5) que $\mathcal{B}'''$ é um conjunto gerador de $\mathrm{Im}(T)$, constituído de vetores LI, sendo, por conseguinte uma base de $\mathrm{Im}(T)$. Para concluir, resta-nos observar que:

$$\dim V = n = k + (n-k) = \dim\ker(T) + \dim\mathrm{Im}(T). \qquad \blacksquare$$

EXEMPLO Como ilustração, vamos encontrar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem do operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (z, x-y, -z)$. Inicialmente, observamos que:

$$(x, y, z) \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow (z, x-y, -z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{e} \quad x - y = 0$$

e, portanto, o núcleo de T é o subespaço $\mathcal{N}(T) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Uma base $\mathcal{N}(T)$ é $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0)\}$ e $\dim\mathcal{N}(T) = 1$. Quanto à imagem, esta é gerada pelos vetores $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ e $T(\mathbf{e}_3)$, isto é,

$$\mathrm{Im}(T) = \big[\,(0, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 0, -1)\,\big].$$

e escalonando a matriz geradora de $\mathrm{Im}(T)$, encontramos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de onde extraímos a base $\mathcal{B}' = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ de $\mathrm{Im}(T)$ e $\dim\mathrm{Im}(T) = 2$. Por fim, notamos que

$$w \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow w = x \cdot (1, 0, -1) + y \cdot (0, 1, 0) \Leftrightarrow w = (x, y, -x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

e, sendo assim, $\mathrm{Im}(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x\right\}$.

6.3.1 Conceito & Ações de um Isomorfismo

Uma aplicação linear $T : V \to W$ diz-se *Injetora* ou *Injetiva* quando:

$$T(u) = T(v) \Leftrightarrow u = v$$

e isto indica que vetores distintos de V têm imagens distintas em W. O núcleo de T pode ser usado para determinar a injetividade, como mostra o seguinte resultado.

LEMA 6.3.7 *A transformação $T : V \to W$ é injetora se, e somente se,* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Prova: Suponhamos que T seja injetora e seja v um vetor do núcleo de T. Temos:

$$T(v) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0})$$

e da injetividade resulta $v = \mathbf{0}$. Reciprocamente, se $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e $T(u) = T(v)$, então:

$$T(u - v) = 0 \Leftrightarrow u - v \in \ker(T) \Leftrightarrow u = v$$

e daí segue a injetividade de T. ■

EXEMPLO 6.3.8 *Para comprovar que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y) = (x - y, 2x + y, x - 4y)$, é injetora, basta notar que*:

$$\begin{aligned} v &= (x, y) \in \ker(T) \Leftrightarrow T(x, y) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (x - y, 2x + y, x - 4y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Logo, $\ker(T) = 0$ *e do Lema 6.3.7 segue a injetividade de T.*

No caso em que $\operatorname{Im}(T) = W$ a aplicação linear $T : V \to W$ é dita *Sobrejetora* ou *Sobrejetiva.* Dito de outra forma, $T : V \to W$ é sobrejetora quando todo vetor w de W for imagem de algum vetor v de V, isto é, $T(v) = w$. No caso em que $W \neq \{\mathbf{0}\}$, isto ocorre se, e somente se, $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim W$.

EXEMPLO 6.3.9 *A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + z)$ é sobrejetora. De fato, dado $w = (a, b)$ um vetor do $\mathbb{R}^2 = W$, então os vetores $v = (x, x - a, b - x)$, $x \in \mathbb{R}$, satisfazem á equação vetorial $w = T(v)$.*

Imaginemos uma aplicação linear $T : V \to W$, com a seguinte propriedade: dado um vetor w no espaço W, existe no espaço V **um único vetor v**,, tal que $T(v) = w$. Uma tal aplicação é, ao mesmo tempo, injetora e sobrejetora e, por essa razão, denominada *Isomorfismo* e os espaços vetoriais V e W ditos *isomorfos* e anota-se $V \approx W$.

Uma aplicação linear $T : V \to W$ entre dois espaços vetoriais V e W é um isomorfismo se, e só se: dado $w \in W$, existe um único $v \in V$, tal que $T(v) = w$. Se V e W têm dimensão finita a aplicação $T : V \to W$ é um isomorfismo se, e só se, $\dim\ker(T) = 0$ e $\dim\mathrm{Im}(T) = \dim W$.

EXEMPLO 6.3.10 *A aplicação linear* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por* $T(x, y) = (x + 2y, 3x - 4y)$ *é um isomorfismo. De fato*:

(i) T **é injetora:** *Se* $T(x, y) = (0, 0)$, *então* $(x + 2y, 3x - 4y) = (0, 0)$ *e daí resulta* $x = 0$ *e* $y = 0$, *ou seja* $\ker T = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) T **é sobrejetora:** *Do Teorema 6.3.6, resulta que* $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim\ker(T) = 2$ *e, portanto* $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$.

TEOREMA 6.3.11 *Um isomorfismo* $T : V \to W$ *entre espaços vetoriais de dimensão finita transforma uma base de* V *em uma base de* W.

Demonstração: Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, vimos no Lema 6.3.2 que os vetores $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ geram o espaço $W = \mathrm{Im}(T)$ e resta-nos provar que eles são LI. Da combinação linear nula $x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \ldots + x_n \cdot T(v_n) = \mathbf{0}$, decorrem os seguintes fatos:

$$\begin{aligned}
&T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0} && \text{(por linearidade de } T\text{)}\\
&x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} && \text{(por injetividade de } T\text{)}\\
&x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 && \text{(pela independência linear de } v_1, \ldots, v_n\text{)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

TEOREMA 6.3.12 *Dois espaços vetoriais de dimensão finita* V *e* W *são isomorfos se, e somente se,* $\dim V = \dim W$.

Prova: Se $T : V \to W$ é um isomorfismo e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, segue do Teorema 6.3.11 que $\mathcal{B}' = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de W e, portanto, $\dim W = \dim V = n$. Reciprocamente, suponhamos $\dim V = \dim W$ e sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases de V e W, respectivamente. A aplicação linear $T : V \to W$, definida por:

$$T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot w_j,$$

é um isomorfismo. De fato, dado $v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$, com $T(v) = \mathbf{0}$, então:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot w_j = \mathbf{0} \tag{6.6}$$

e de (6.6) resulta que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ e, assim, $v = \mathbf{0}$. Logo, T é injetora e como $\dim V = \dim W$, segue do Teorema 6.3.6 que T é sobrejetora. ■

EXEMPLO 6.3.13 *Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{P}_n$ não são isomorfos, porque têm dimensões diferentes. O espaço $V = \mathbb{R}^2$ é isomorfo ao subespaço W do $\mathbb{R}^3$, dado por $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$, porque* $\dim V = \dim W = 2$.

EXEMPLO 6.3.14 *A aplicação $T : \mathbb{R}^4 \to M_{2\times 2}$, definida por:*

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

estabelece um isomorfismo entre $\mathbb{R}^4$ e o espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais 2×2.

COROLÁRIO 6.3.15 *Um isomorfismo $T : V \to W$ é uma aplicação linear invertível, isto é, existe uma aplicação linear $S : W \to V$, tal que:*

$$S \circ T = I_V \quad e \quad T \circ S = I_W$$

onde $I_V : V \to V$ e $I_W : W \to W$ são os operadores identidade: $I_V(v) = v$ e $I_W(w) = w$.

Prova: Com as bases $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ de V e W, respectivamente, definimos a aplicação linear $S : W \to V$, tal que $S(w_j) = v_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. A aplicação S assim definida é a inversa de T. ■

► **INVERTENDO UMA APLICAÇÃO LINEAR** Sejam V e W dois espaços vetoriais de dimensão n e consideremos $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Como sabemos, uma aplicação linear invertível $T : V \to W$ transforma a base $\mathcal{B}$ de V em uma base de W e podemos usar a base $\mathcal{B}$ para encontrar a transformação inversa $S = T^{-1}$. Se $w_k = T(v_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, então a inversa $S : W \to V$ é caracterizada por $S(w_k) = v_k$, isto é:

$$T(v_k) = w_k \Leftrightarrow S(w_k) = v_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

e dado $w \in W$, temos $w = y_1 \cdot T(v_1) + y_2 \cdot T(v_2) + \cdots + y_n \cdot T(v_n)$ e, portanto:

$$\boxed{S(w) = y_1 \cdot v_1 + y_2 \cdot v_2 + \cdots + y_n \cdot v_n}$$

Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$ (por exemplo, o corpo $\mathbb{R}$), é simples verificar qua a *aplicação identidade* $I(v) = v$ é linear e se T e S são aplicações lineares de $V \to V$, tais que $S \circ T = I$, diremos que S é a inversa de T e anotamos $S = T^{-1}$. Por exemplo, a inversa da aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x - y, y)$ é a aplicação $S(x, y) = (x + y, y)$.

EXEMPLO 6.3.16 *Vamos encontrar o operador inverso de* $T(x,y,z) = (x+y, x, y+2z)$ *usando a base canônica* $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ *do* $\mathbb{R}^3$*. Considerando*

$$w_1 = T(\mathbf{e}_1) = (1,1,0), \quad w_2 = T(\mathbf{e}_2) = (1,0,1) \quad e \quad w_3 = T(\mathbf{e}_3) = (0,0,2)$$

e notando que:

$$w = (x,y,z) = y \cdot w_1 + (x-y) \cdot w_2 + \tfrac{1}{2}(-x+y+z) \cdot w_3$$

obtemos o operador inverso $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, dado por*:

$$S(x,y,z) = y \cdot \mathbf{e}_1 + (x-y) \cdot \mathbf{e}_2 + \tfrac{1}{2}(-x+y+z) \cdot \mathbf{e}_3 = \left(y, x-y, \tfrac{1}{2}(-x+y+z)\right)$$

► CONSEQUÊNCIAS Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Temos os seguintes resultados:

(I) Se $\dim V = \dim W$, então:

$$T \quad \text{é injetora} \Leftrightarrow T \quad \text{é sobrejetora.}$$

Prova: Sabemos que T é injetora se, e só se, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e segue do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6 que:

$$\dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \dim W = \dim \operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(T) = W.$$

(II) Se $\dim V > \dim W$, então T não pode ser injetora e muito menos um isomorfismo.

Prova: Do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6, segue que:

$$\dim \ker(T) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(T) \geq \dim V - \dim W > 0$$

e sendo $\dim \ker(T) > 0$, a aplicação T não pode ser injetora.

(III) Se $\dim V < \dim W$, então T não pode ser sobrejetora e muito menos um isomorfismo.

Prova: Do Teorema do Núcleo e da Imagem 6.3.6, segue que:

$$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim V - \dim \ker(T) \leq \dim V < \dim W$$

e sendo $\dim \operatorname{Im}(T) < \dim W$, a aplicação T não pode ser sobrejetora.

EXEMPLO 6.3.17 *Seja* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ *a aplicação linear definida por*:

$$T(p) = p + x^2 p''. \qquad (p'' = \frac{d^2 p}{dx^2})$$

(i) *A aplicação* T *é linear. De fato, dados dois vetores (polinômios)* p *e* q *no espaço* $\mathbb{P}_2$ *e um escalar* λ, *temos*:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot p + q) &= \lambda \cdot p + q + x^2 (\lambda \cdot p + q)'' = \lambda \cdot p + q + x^2 \left(\lambda p'' + q''\right) \\ &= \lambda \cdot \left(p + x^2 p''\right) + \left(q + x^2 q''\right) = \lambda \cdot T(p) + T(q) \end{aligned}$$

(ii) *Para identificar a imagem da aplicação* T, *notamos que* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ *jaz na imagem de* T *se, e só se,* $a_3 = 0$. *De fato*:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 &= T\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + x^2 (2b_2) \\ &= b_0 + b_1 x + 3b_2 x^2 \end{aligned}$$

e igualando os coeficientes, encontramos: $a_3 = 0$, $a_2 = 3b_2$, $a_1 = b_1$ *e* $a_0 = b_0$. *Logo,* $\operatorname{Im}(T) = \mathbb{P}_2$ *e* $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$.

(iii) *Qual a dimensão do núcleo de* T? *Como consequência do Teorema do Núcleo e da Imagem* 6.3.6, *deduzimos que*:

$$\dim \ker(T) = \dim \mathbb{P}_2 - \dim \operatorname{Im}(T) = 0.$$

(iv) *A aplicação* T *é injetora, porque* $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$, *mas, não é um isomorfismo, porque não é sobrejetora* $(\dim \operatorname{Im}(T) < \dim W)$.

EXEMPLO 6.3.18 (Usando o Núcleo e a Imagem) *Certo operador* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é tal que*:

$$\ker(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} \quad e \quad T(0,0,1) = (1,0,-1).$$

Para identificar um tal operador seguimos o seguinte roteiro:

Etapa I *Encontrar uma base* $\mathcal{B}$ *do núcleo de* T:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (0,1,-1)\} = \{v_1, v_2\}.$$

Etapa II *Acrescentar à base* $\mathcal{B}$ *do núcleo o vetor* $v_3 = (0,0,1)$, *de imagem conhecida, como sugere a Figura* 6.10, *para chegar à base* $\mathcal{B}'$ *do domínio* $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}' = \{(1,0,-1), (0,1,-1), (0,0,1)\} = \{v_1, v_2, v_3\}.$$

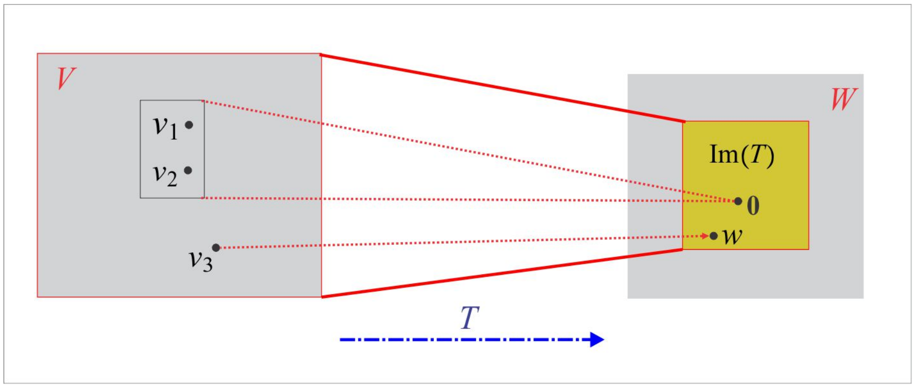

Figura 6.10: Construindo Aplicação Linear.

Expressando o vetor $v = (x, y, z)$ *na base* $\mathcal{B}$, *encontramos*:

$$v = (x, y, z) = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + (x + y + x) \cdot v_3 \tag{6.7}$$

e de (6.7) *resulta*:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= x \cdot T(v_1) + y \cdot T(v_2) + (x + y + z) \cdot T(v_3) \\ &= x \cdot \mathbf{0} + y \cdot \mathbf{0} + (x + y + z) \cdot (1, 0, -1) = (x + y + z, 0, -x, -y, -z) . \end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.1

1. Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cujo núcleo contém o vetor $(0, 2)$, e é tal que $T(-1, 1) = (1, 2, 0)$.

2. Em cada caso, encontre uma base do núcleo e da imagem da transformação linear.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y) = (2x - y, 0)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y) = (x + y, x + y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x, y, z) = (x + 2y, z)$.

3. Seja $T_A : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$, definida por $T_A(X) = A \cdot X$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Determine uma base de $\mathcal{N}(T_A)$ e outra de $\mathrm{Im}(T_A)$.

4. Encontre o núcleo e a imagem do operador $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, definido por $T(p(x)) = x^2 p''(x)$.

5. Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathrm{Im}(T) = \left[(1,2,3),(4,0,5)\right]$. Uma tal transformação pode ser um isomorfismo? Por quê?

6. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{N}(T) = \left[(1,1,0)\right]$. Uma tal transformação pode ser um isomorfismo? Por quê?

7. Se $T_1, T_2 : V \to V$ são operadores lineares, tais que $\dim \mathcal{N}(T_1) = \dim \mathcal{N}(T_2) = 0$, mostre que $\dim \mathcal{N}(T_1 \circ T_2) = 0$.

8. Estabeleça um isomorfismo entre os seguintes pares de espaços vetoriais:

   (a) $\mathbb{R}^2$ e o subespaço $W = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3\right\}$ **(b)** $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{P}_2$ (c) $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

9. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, cujo núcleo seja a reta $y = 2x$.

10. Seja $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ o operador definido por

$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a + 2b)\,x + (b + c).$$

   (a) O operador T é injetor? É sobrejetor?

   (b) Dê uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de T.

   (c) $p(x) = -4x^2 + 2x - 2$ pertence a $\mathcal{N}(T)$? E $q(x) = 2x + 1$ pertence a $\mathrm{Im}(T)$?

11. Um operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tem núcleo $\mathcal{N}(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$ e é tal que $T(0,0,1) = (1,1,1)$. Encontre um tal operador.

12. Considere o *operador derivação* $\partial_1 : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$, definido por $\partial_1(p(x)) = p'(x)$. Determine o núcleo e a imagem do operador ∂_1. Qual o núcleo do operador $\partial_2(p(x)) = p''(x)$?

13. Encontre uma transformação lnear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:

   (i) $T(1,-1) = (1,2,0)$ e **(ii)** $(1,0) \in \mathcal{N}(T)$.

14. Mostre que um operador $T : V \to V$ é invertível se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}\left(T^2\right)$.

15. No espaço $\mathbb{P}_\infty$ de todos os polinômios com coeficientes reais, mostre que a aplicação linear $T : \mathbb{P}_\infty \to \mathbb{P}_\infty$ definida por:
$$T(p) = \int_0^t p(s)\, ds$$
é injetora mas não é sobrejetora.

16. Prove ou apresente um contra-exemplo. Em cada caso, $T : V \to V$ é um operador linear não nulo.

(a) $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T^2)$.

(b) $\mathcal{N}(T^2) \subset \mathcal{N}(T)$.

(c) $\operatorname{Im}(T) \subset \operatorname{Im}(T^2)$.

(d) $\operatorname{Im}(T^2) \subset \operatorname{Im}(T)$.

(e) Se $T^2 = \mathbf{0}$, então $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

6.4 Representação Matricial

Nesta seção há dois problemas a serem investigados e os exemplos que seguem à formulação de cada um deles ilustram como resolvê-los.

► APLICAÇÃO LINEAR ASSOCIADA A UMA MATRIZ Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ são bases de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, respectivamente, e $A = (a_{ij})$ é uma matriz de ordem $n \times m$, encontrar a aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, determinada pela relação

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}}. \tag{6.8}$$

onde $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[T(v)]_{\mathcal{B}'}$ são as matrizes coordenadas de v e de $T(v)$ nas bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, temos

$$v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_mv_m, \quad \text{isto é,} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

e consideremos os escalares $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que satisfazem à relação (6.8), ou seja

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

A aplicação linear T procurada é definida por $T(v) = y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots + y_n w_n$.

EXEMPLO 6.4.1 *Sejam* $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$ *e* $\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (0,1,-1), (1,0,2)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$*, respectivamente, e consideremos a matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dado $v = (x, y)$ *um vetor do* $\mathbb{R}^2$*, temos que:*

$$v = x(1,0) + y(0,1) \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e usando a relação (6.8), encontramos

$$\left[T(v)\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+2y \\ x-3y \end{pmatrix} \begin{matrix} \longleftarrow & y_1 \\ \longleftarrow & y_2 \\ \longleftarrow & y_3 \end{matrix}$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= x(1,1,0) + (x+2y)(0,1,-1) + (x-3y)(1,0,2) \\ &= (2x-3y, 2x+2y, x-8y) \end{aligned}$$

é a aplicação linear procurada.

EXEMPLO 6.4.2 *Se* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *são as bases canônicas de* $\mathbb{R}^m$ *e* $\mathbb{R}^n$*, respectivamente, então a transformação* $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *que satisfaz (6.8) é dada por:*

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \qquad \textit{onde} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Por exemplo, com relação às bases canônicas a aplicação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *associada à matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

é precisamente

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x = y + 2z, -2x + y + 3z + t, y + 2z - t).$$

► **MATRIZ ASSOCIADA A UMA APLICAÇÃO LINEAR** Dada uma aplicação linear $T : V \to W$ entre espaços vetoriais de dimensão finita, sejam $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases de V e W, respectivamente. Associada à aplicação linear T consideramos a $n \times m$ matriz $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$, cuja j-ésima coluna é $[T(v_j)]_{\mathcal{B}'}$; a matriz $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ é construída da seguinte forma: escrevemos cada vetor $T(v_j)$ como combinação linear da base $\mathcal{B}'$ e formamos a j-ésima coluna da matriz.

$$\begin{aligned}
&T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{n1}w_n \\
&T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{n2}w_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&T(v_m) = a_{1m}w_1 + a_{2m}w_2 + \cdots + a_{nm}w_n
\end{aligned}$$

Assim, a matriz associada à aplicação T é:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & v & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

No caso em que $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, a matriz $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ será indicada simplesmente por $[T]_{\mathcal{B}}$.

6.4.1 Matriz da Aplicação Composta

Sejam $T : U \to V$ e $S : V \to W$ duas aplicações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita e fixemos as bases:

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}. \qquad \text{(Base de } U\text{)}$$

$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}. \qquad \text{(Base de } V\text{)}$$

$$\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}. \qquad \text{(Base de } W\text{)}$$

A aplicação composta $S \circ T$ é dada por $S \circ T(v) = S(T(v))$ e considerando as representações:

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j \quad \text{e} \quad S(v_j) = \sum_{l=1}^{n} b_{jl} w_l, \quad i = 1, 2, \ldots, k \text{ e } j = 1, 2, \ldots, m,$$

encontramos:

$$S \circ T(u_i) = S\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} S(v_j) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jl} w_l$$

e daí resulta a representação matricial da aplicação composta:

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}. \tag{6.9}$$

EXEMPLO 6.4.3 *Sejam T e S os operadores do $\mathbb{R}^3$, com representação matricial:*

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad [S] = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e identifiquemos o operador T^*, sabendo que $T = S \circ T^*$.

Solução: Atividade de Sala de Aula

No caso em que $T : U \to V$ é um isomorfismo, com inversa $S : V \to U$, consideramos (6.9), com $\mathcal{B} = \mathcal{B}''$ e $S \circ T = I_U$, e obtemos:

$$[I_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}. \tag{6.10}$$

Por fim, notando que $[I_U]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ é a matriz identidade I_k, deduzimos de (6.10) a relação:

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \left([T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}. \tag{6.11}$$

Em (6.10) temos um produto matricial enquento o lado direito de (6.11) indica uma inversão de matrizes.

EXEMPLO 6.4.4 *O operador $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definido por $T(x,y,z)=(x-y,y,y+z)$, é um isomorfismo e em relação à base canônica $\mathcal{B}$ temos:*

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad e\quad \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

onde observamos que $[T]_{\mathcal{B}}\cdot\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}}=I_{3\times3}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.2

1. Seja $I:V\to V$ o *operador identidade* de V, isto é, $I(v)=v,\ \forall v$. Se $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é uma base de V, determine a matriz $\left[I\right]_{\mathcal{B}}$. Se $\mathcal{B}'$ é outra base de V, quem é $\left[I\right]_{\mathcal{B}'}$?

2. Qual é a aplicação linear $T:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$, cuja representação matricial em relação às bases canônicas é $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$?

3. Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $T(x,y,z)=(x-y+2z,x-y-z)$ e considere as bases
$$\mathcal{B}=\{(1,0),(0,1)\}\quad\text{e}\quad\mathcal{B}'=\{(1,1,0),(1,1,1),(1,-2,-1)\}.$$
Determine a matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

4. Sejam $\mathcal{B}=\{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ e $\mathcal{B}'=\{(-1,0),(0,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, tal que
$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$
   (a) Determine $T(x,y,z)$.

   (b) Determine bases para $\mathcal{N}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$. É a transformação T injetora?

5. Em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}=\{t,1\}$ e $\mathcal{B}'=\left\{t^2,t-1,t+1\right\}$ de $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$, respectivamente, qual a matriz da transformação linear $T:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$, definida por $T(p(t))=tp(t)$?

6. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine $T(x,y)$.

(b) Encontre uma base $\mathcal{B}''$ do $\mathbb{R}^3$, tal que

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear, definida por

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x+z, y+t)$$

e seja $\mathcal{B}$ a base canônica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(a) Determine $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$, onde $\mathcal{B}' = \{(1,-1),(1,2)\}$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ é tal que

$$[S]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determine, caso exista, um vetor v, tal que $S(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear, cuja matriz em relação à base canônica $\mathcal{B}$ é

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine, caso exista, vetores u e v tais que $Tu = u$ e $Tv = -v$.

(b) Determine $\dim \mathcal{N}(T)$ e $\dim \operatorname{Im}(T)$.

(c) T é um isomorfismo? Se for, encontre $T^{-1}(x,y)$ e a matriz $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}$.

9. Seja $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ o funcional linear definido por

$$T(p(x)) = \int_0^1 p(x)\,dx.$$

Determine a matriz de T em relação às bases canônicas.

10. Seja $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ o operador linear definido por $T(p(x)) = (1-x)\,p'(x)$. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{P}_1$.

11. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e sejam T_A e T_B as transformações canônicas definidas pelas matrizes A e B, respectivamente. Encontre bases dos subespaços

$$\mathcal{N}(T_A)\,,\ \mathcal{N}(T_B)\,,\ \mathcal{N}(T_B \circ T_A)\,,\ \mathrm{Im}(T_A)\,,\ \mathrm{Im}(T_B) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(T_B \circ T_A)\,.$$

12. Em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente, considere as bases

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0)\,,(-1,0,1)\,,(1,1,0)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1,0,0,1)\,,(-1,0,1,0)\,,(1,1,0,0)\,,(-1,2,0,1)\}$$

e seja A a matriz 3×4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, tal que $[T(v)]_{\mathcal{B}} = A\,[v]_{\mathcal{B}'}$. Essa é a transformação associada à matriz A e às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$. Quando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são as bases canônicas, teremos:

$$T(v) = A \cdot v, \quad \text{isto é,} \quad T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

13. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ as transformações lineares definidas por

$$T(x,y,z) = (x+2y, x-z) \quad \text{e} \quad S(x,y) = (x, x-y, 2y, 2x+y)\,.$$

e considere as bases

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{(1,0),(1,1)\} && (\text{base do } \mathbb{R}^2) \\ \mathcal{B}' &= \{(1,0,0),(1,1,1),(0,1,-1)\} && (\text{base do } \mathbb{R}^3) \\ \mathcal{B}'' &= \{(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0),(1,-1,0,0)\} && (\text{base do } \mathbb{R}^4) \end{aligned}$$

(a) Encontre as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}$ e calcule o produto $[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

(b) Determine $(S \circ T)(x,y,z)$.

(c) Encontre a matriz $[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$.

14. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(-1,0,1),(-1,1,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ bases do $\mathbb{R}^3$ e considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$T(x,y,z) = (x+y-2z, x-y, x+z).$$

(a) Mostre que T é um isomorfismo e encontre a matriz $[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

(b) Encontre a transformação inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a matriz $[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

(c) Escalone a matriz ampliada $\left[[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}, I_3\right]$.

15. Considere as seguintes bases do espaço $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$$

e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador definido por: $T(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$. Verifique diretamente que a matriz M, de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$, satisfaz a relação:

$$[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}'} \cdot M. \qquad (6.12)$$

A relação (6.12) estabelece a equivalência entre as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{B}'}$ e a matriz M recebe o nome de matriz de *similaridade*.

16. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador definido por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, com a, b, c e d números reais positivos. Se A é a matriz de T em relação à base canônica encontre as raízes da equação $\det[A - \lambda I_2] = 0$.

6.5 Autovalor, Autovetor & Autoespaço

Dado um operador linear $T : V \to V$, um problema típico de álgebra linear consiste em encontrar um escalar λ e um vetor v, tais que $T(v) = \lambda v$. É claro que $v = \mathbf{0}$ satisfaz à equação $T(v) = \lambda v$, seja qual for o escalar λ, e o problema torna-se interessante quando o vetor procurado v for não nulo. Um tal escalar λ denomina-se *autovalor* (ou *valor característico*) do operador T e o vetor não nulo v um *autovetor* (ou *vetor característico*) de T, associado ao autovalor λ. Se v é um autovetor de T, associado ao autovalor λ, então qualquer múltiplo escalar de v também o é; se λ é um autovalor de T, representamos por V_λ o subespaço vetorial de V constituído pelos vetores v, tais que $T(v) = \lambda v$. Esse subespaço recebe o nome de *autoespaço* associado a λ. O auto-espaço V_λ é constituídos dos autovetores associados ao autovalor λ, mais o vetor nulo.

Dada uma base $\mathcal{B}$ de V, se representarmos por A a matriz de T na base $\mathcal{B}$, os autovalores de T são as soluções λ da equação matricial $A \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}}$, isto é, as soluções da equação $(A - \lambda I) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}$. No caso em que $V = \mathbb{R}^n$, esta equação nos conduz a um sistema linear homogêneo, o qual terá solução não nula quando $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, quando λ for uma raiz do polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, denominado *polinômio característico* de T.

EXEMPLO 6.5.1 *Determinemos os autovalores e autovetores do operador* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dado por:*

$$T(x, y) = (x + y, x + 2y).$$

Solução: Considerando $\mathcal{B}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$, encontramos o polinômio característico de T:

$$p(\lambda) = \det\left(\left[T\right] - \lambda \cdot I_2\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

com raízes $\lambda = \frac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$ que são os autovalores de operador T.

LEMA 6.5.2 *Autovetores associados a autovalores distintos são LI.*

Prova: Sejam u e v dois autovetores do operador T, associados, respectivamente, aos autovalores distintos λ e μ, isto é, $T(u) = \lambda \cdot u$ e $T(v) = \mu \cdot v$. Dada uma combinação linear nula:

$$x \cdot u + y \cdot v = \mathbf{0} \tag{6.13}$$

temos:

$$(T - \lambda I)(x \cdot u + y \cdot v) = \mathbf{0} \tag{6.14}$$

e de (6.14) resulta:

$$\begin{aligned} x\cdot(T(u)-\lambda\cdot u)+y(\mu\cdot v-\lambda\cdot v) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow y(\mu-\lambda)\cdot v=\mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow y=0 \end{aligned}$$

e retornando a (6.9) com $y=0$, encontramos $x=0$. ■

LEMA 6.5.3 *Se λ é um autovalor do operador $T:V\to V$, então o subconjunto V_λ de V, dado por:*

$$V_\lambda=\{v\in V: T(v)=\lambda\cdot v\}$$

é um subespaçço vetorial de V, conhecido por **AUTOESPAÇO** *de V associado ao autovalor λ.*

Prova: Dados u e v em V_λ e um escalar x, mostremos que $x\cdot u+v$ pertence a V_λ. De fato, da linearidade do operador T, temos:

$$T(x\cdot u+v)=x\cdot T(u)+T(v)=x\cdot(\lambda u)+\lambda v=\lambda\cdot(x\cdot u+v)$$

e daí resulta que $x\cdot u+v$ jaz V_λ, provando que V_λ é um subespaço vetorial de V. ■

LEMA 6.5.4 *Se $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ é uma base de V, contendo apenas autovetores de T, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal. Para comprovar este fato, basta observar que para cada $j=1,2,\ldots,n$, temos:*

$$T(v_j)=\lambda_j v_j=\boxed{0}\cdot v_1+\boxed{0}\cdot v_2+\cdots+\boxed{0}\cdot v_{j-1}+\boxed{\lambda_j}\cdot v_j+\boxed{0}\cdot v_{j+1}+\cdots+\boxed{0}\cdot v_n.$$

e os escalares destacados formam a j-ésima coluna da matriz $[T]_{\mathcal{B}}$, isto é:

$$[T]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6.5.1 O Polinômio Característico

Dada uma matriz quadrada A, de ordem $n \times n$, seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear associado à matriz A, com respeito à base canônica do $\mathbb{R}^n$, isto é:

$$T_A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é um vetor do $\mathbb{R}^n$, tal que $T_A(v) = \lambda \cdot v$, então:

$$\begin{aligned} T_A(v) &= \lambda \cdot v \Leftrightarrow A \cdot v - \lambda \cdot v = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I) \cdot v = \mathbf{0} \end{aligned}$$

e a equação matricial $(A - \lambda I) \cdot v = \mathbf{0}$ terá uma solução não nula v se, e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. O polinômio $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é conhecido por **POLINÔMIO CARACTERÍSTICO** da matriz A (ou do operador T_A) e suas raízes são precisamente os autovalores do operador T_A (ou da matriz A). É oportuno ressaltar que se $\mathcal{B}'$ é outra base do $\mathbb{R}^n$, demonstra-se (veja o Exercício 15) que existe uma matriz invertível M, tal que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}'} \cdot M,$$

de modo que:

$$[T]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I = M^{-1} \cdot \left([T]_{\mathcal{B}'} - \lambda \cdot I\right).M$$

e, portanto:

$$\det\left([T]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I\right) = \det\left([T]_{\mathcal{B}'} - \lambda \cdot I\right).$$

Isto mostra que o polinômio característico $p(\lambda)$ não depende da base escolhida.

EXEMPLO 6.5.5 *Associado à matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

temos o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, dado por:*

$$T_A(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 2y \\ -x + y \\ y + 2z \end{pmatrix}$$

com polinômio característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right).$$

Oa autovalores da matriz A (ou do operador T_A) são as raízes do polinômio característico: $\lambda_1 = 2$, de multiplicidade $k = 2$, e $\lambda_2 = 3$.

O Autoespaço V_{λ_1} *Um vetor $v = (x, y, z)$ jaz no autoespaço V_{λ_1} se, e só se, $A \cdot v = 2 \cdot v$, isto é:*

$$4x + 2y = 2x, \quad -x + y = 2y \quad e \quad y + 2z = 2z \tag{6.15}$$

e de (6.15) resulta $x = 0$ e $y = 0$. Logo, $V_{\lambda_1} = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ ou $V_{\lambda_1} = \left[\,(0,0,1)\,\right]$.

O Autoespaço V_{λ_2} *Um vetor $v = (x, y, z)$ jaz no autoespaço V_{λ_2} se, e só se, $A \cdot v = 3 \cdot v$, isto é:*

$$4x + 2y = 3x, \quad -x + y = 3y \quad e \quad y + 2z = 3z \tag{6.16}$$

e de (6.16) resulta $x = 2z$ e $y = z$. Logo, $V_{\lambda_2} = \{(2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ ou $V_{\lambda 2} = \left[\,(2,1,1)\,\right]$.

OBSERVAÇÃO 6.5.6 *Se v é um autovetor de certo operador $T : V \to V$, associado ao autovalor λ, e $\mathcal{B}$ é uma base de V, então:*

$$\begin{aligned} T(v) &= \lambda \cdot v \Leftrightarrow \left[T(v)\right]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} \\ &\Leftrightarrow \left[T\right]_{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \left(\left[T\right]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I\right)[v]_{\mathcal{B}} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{6.17}$$

e a última equação em (6.17) terá uma solução não nula v se, e somente se, $\det\left(\left[T\right]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I\right) = 0$. A este determinante, o qual não depende da escolha da base $\mathcal{B}$, damos o nome de **POLINÔMIO CARACTERÍSTICO** *do operador T.*

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.3

1. Em cada caso, determine o polinômio característico do operador, seus autovalores e autovetores correspondentes. Por fim, encontre uma base dos autoespaços associados.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (2y, x)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = (x + y, 2x + y)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 3z)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (x + y, x - y + z, 2x + y - z)$.

(e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z, t) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + t)$.

(f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad T(x, y, z, t) = (2x + y, 2y, 2z, 3t)$.

(g) $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}, \quad T(A) = A^t$. **($A^t$ é a transposta de A)**

(h) $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1, \quad T(ax + b) = 2ax - b$.

(i) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad T(p(x)) = p'(x)$.

(j) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad T\left(ax^2 + bx + c\right) = ax^2 + cx + b$.

(k) $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2, \quad T(p(x)) = p(x + 1)$.

(l) $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3, \quad T(p(x)) = \left(1 - x^2\right) p''(x) - 2xp'(x)$.

2. Mostre que um operador $T : V \to V$, com um autovalor nulo, não pode ser injetor.

3. No espaço $\mathbb{R}^2$, considere as bases $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(-1, 0), (1, 2)\}$. Determine o polinômio característico do operador $T(x, y) = (x, x + y)$, usando as matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{B}'}$.

4. Seja $R_\theta(x, y) = (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$ o operador de rotação. Se $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, mostre que os autovalores de R_θ são $\lambda = \pm 1$.

5. Identifique o operador de $\mathbb{R}^2$, com autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, e respectivos autovetores $v_1 = (3, 1)$ e $v_2 = (-2, 1)$.

6. Se T é um isomorfismo, com autovalor λ, mostre que $\dfrac{1}{\lambda}$ é um autovalor do operador inverso T^{-1}.

7. Se λ e μ são autovalores distintos do operador $T : V \to V$, mostre que $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$.

8. Se λ é um autovalor do operador $T : V \to V$, mostre que λ^2 é um autovalor do operador T^2.

9. **SUBESPAÇO INVARIANTE** Dado um operador $T : V \to V$, diremos que um subespaço W de V é *invariante* pelo operador T ou é T-*invariante*, quando $T(W) \subset W$. Se λ é um autovalor do operador T, mostre que o autoespaço V_λ é invariante por T.

6.6 Operadores Diagonalizáveis

Um problema importante de Álgebra Linear consiste em encontrar, caso seja possível, uma base do espaço vetorial V em relação à qual a matriz de certo operador $T : V \to V$ seja diagonal. Isto significa *diagonalizar* o operador $T : V \to V$. Como ficou estabelecido no Lema 6.5.4 uma base de V constituída de autovetores diagonaliza o operador T.

REGRA DE DIAGONALIZAÇÃO Suponhamos $\dim V = n$ e que $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sejam os autovalores distintos do operador $T : V \to V$. Se V_{λ_j} são os autoespaços correspondentes e

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} = n$$

então o operador T é diagonalizável e se $\mathcal{B}_j$ é uma base do autoespaço $V_{\lambda_j},\ j = 1, 2, 3, \ldots, k$, então:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$$

é uma base de V que diagonaliza T, isto é, a matriz $\left[T\right]_{\mathcal{B}}$ é diagonal. Na diagonal principal da matriz $\left[T\right]_{\mathcal{B}}$ figuram os autovalores de T e o número de vezes que cada autovalor aparece na diagonal corresponde à sua multiplicidade como raiz do polinômio característico.

EXEMPLO 6.6.1 *Um operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que possui dois autovalores distintos é diagonalizável. Neste caso, os dois autoespaços têm dimensão igual a 1. De forma mais geral, se $\dim V = n$ e o operador $T : V \to V$ possui n autovalores distintos, um tal operador T é diagonalizável.*

EXEMPLO 6.6.2 *Seja T o operador do $\mathbb{R}^3$, definido por $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ (de multiplicidade 2) e $\lambda_2 = -1$, que são as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (-1 - \lambda)$, e os autoespaços correspondentes são:*

$$V_3 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad e \quad V_{-1} = \{(4z, -5z, 4z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Considerando as bases $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ e $\mathcal{B}'' = \{(4, -5, 4)\}$ dos autoespaços V_3 e V_{-1}, respectivamente, vemos que $\dim V_3 + \dim V_{-1} = 2 + 1 = \dim \mathbb{R}^3$ e, portanto, T é diagonalizável; a base de autovetores $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (4, -5, 4)\} = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ diagonaliza T e temos:

$$\left[T\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO 6.6.3 *Seja T o operador do $\mathbb{R}^3$, definido por $T(x,x,z) = (4x+2y, -x+y, y+2z)$. Os autovalores de T são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, que são as raízes do polinômio característico*

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12,$$

e os autoespaços correspondentes são:

$$V_2 = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \quad e \quad V_3 = \{(-2y,y,y) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Vemos que $\dim V_2 + \dim V_3 = 1 + 1 \neq \dim \mathbb{R}^3$ *e, portanto, T não é diagonalizável.*

EXEMPLO 6.6.4 *O operador derivação $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, dado por $T(p) = p'$ tem polinômio caracterísitco $p(\lambda) = -\lambda^3$ e, portanto, o único autovalor de T é $\lambda = 0$. O autoespaço V_0 correspondente é constituídos dos polinômios constantes e tem dimensão $n = 1$. O operador T não é diagonalizável.*

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.4

1. Em cada caso, encontre uma base de V que diagonaliza o operador $T : V \to V$.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T(x,y) = (2x, x-y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (x+y, -2y, z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (-2x, x-y, 4x+3y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T(x,y,z) = (x, -2x+2y, 12x-3z)$.

2. Se a matriz do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em relação à base canônica é simétrica, mostre que T é diagonalizável.

3. Determine, caso exista algum, os valores de a que tornam os operadores $T(x,y) = (x+y, ay)$ e $S(x,y) = (x+ay, y)$ diagonalizáveis.

6.7 Questões de Revisão

1. Sejam W_1 e W_2 subespaços vetorias de V, tais que $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Mostre que $T(u,v) = u + v$ define um isomorfismo de $W_1 \times W_2$ sobre $W_1 \oplus W_2$.

2. Se duas transformações lineares $S, T : V \to W$ são iguais nos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de uma base de V, mostre que $S(v) = T(v)$, $\forall v \in V$.

3. Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, mostre que a aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ também o é.

4. Se $T : V \to W$ é um isomorfismo linear, mostre que $\dim V = \dim W$ e T transforma uma base de V em uma base de W.

5. Seja $P : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador definido por $P(x,y,z,t) = (x,y,0,0)$. Mostre que:

   (a) $P^2 = P \qquad (P^2 = P \circ P)$.

   (b) $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

   (c) Encontre uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^4$, tal que

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [I_2] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \end{pmatrix}_{4\times 4}.$$

6. Se $\dim V < \infty$ e $T : V \to V$ é um isomorfismo, qual a relação entre as matrizes $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ e $[T^{-1}]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$?

7. Identifique a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, pelo operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dado por $T(x,y) = (ax + by, bx + ay)$, sendo $|a| \neq |b|$.

8. Encontre a expressão do operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que representa uma rotação de $\pi/3\,\text{rad}$ em torno da reta que passa pela origem e tem a direção do vetor $v = (1,1,0)$.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador que representa uma reflexão através da reta $y = 3x$. Encontre $T(x,y)$ e uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbb{R}^2$, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. Se $p(\lambda) = (\lambda - a)^n$ é o polinômio característico de um operador diagonalizável $T : V \to V$, com $\dim V = n$, mostre que $[T]_{\mathcal{B}} = aI$, seja qual for a base $\mathcal{B}$ de V.

11. Sejam T e R os operadores do $\mathbb{R}^3$ que representam, respectivamente, a projeção e a reflexão no plano $\pi : 3x + 2y + z = 0$.

(a) Encontre $T(x, y, z)$ e $R(x, y, z)$.

(b) Encontre bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ do $\mathbb{R}^3$, tais que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [R]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(tais bases devem conter dois vetores v_1 e v_2 do plano e um vetor v_3 ortogonal ao plano π)

12. Encontre os autovalores do operador $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$, dado por $T(p(x)) = p(x+1)$, e os correspondentes autoespaços. O operador T é diagonalizável?

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.0

1. São lineares as aplicações (a), (b), (c), (d) e (h). Nos casos (e) e (f), temos $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$ e, portanto, T não é linear. Para verificar que a aplicação (g) não é linear, basta observar que $T(-1) \neq -T(1)$.

2. Sim. Usando as propriedades do produto matricial, temos

$$T_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda T_A(X) + T_B(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. Usando as propriedades da transposição de matrizes, temos:

$$T(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)^t = \lambda X^t + Y^t = \lambda T(X) + T(Y), \quad X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 3}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, então $\det A = \det B = 0$ e $\det(A + B) = \det I_2 = 1$. Para essas matrizes, temos $T(A + B) \neq T(A) + T(B)$ e isso mostra que T não é linear.

5. Vejamos o ítem (c), como ilustração. Sejam $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ dois vetrores em $\mathcal{M}_{2\times 1}$ e seja λ um escalar. Temos:

$$\begin{aligned} T(\lambda \cdot u + v) &= T\begin{pmatrix} \lambda x + z \\ \lambda y + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + z & 0 \\ 0 & \lambda y + t \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot T(u) + T(v). \end{aligned}$$

6. A transformação T não é linear, porque $T(\mathbf{0})$ é o vetor (polinômio) não nulo $p(x) = x$. No caso da aplicação S, dados p e q no espaço $\mathbb{P}_1$ e um escalar λ,temos:

$$\begin{aligned} S(\lambda \cdot p + q)(x) &= (\lambda \cdot p + q)(x) + x^2 (\lambda \cdot p + q)'(x) \\ &= \lambda \cdot \big(p(x) + x^2 p'(x)\big) + q(x) + x^2 q'(x) = [\lambda \cdot S(p) + S(q)](x). \end{aligned}$$

Logo, $S(\lambda \cdot p + q) = \lambda \cdot S(p) + S(q)$ e, portanto S é linear.

7. Atividade de Sala de Aula.

17 Temos: $T(x,y) = \frac{1}{2}(6x, 5x - y, 2x)$ e $S(x,y,z) = \frac{1}{3}(x, 5x - y, 3x)$. Assim,$(S \circ T)(x,y) = (x,y)$.

19 $T(x,y) = (y,x)$

20 O caso geral $T^n = 2^{n-1} \cdot T$ é deduzido de forma indutiva. Como ilustração, vejamos o caso $n = 2$. Temos:

$$T^2(x,y) = T(T(x,y)) = T(x+y, x-y) = T(2x, 2y) = 2 \cdot T(x,y).$$

21 $T(x,y) = (y,x)$ e $S(x,y) = \frac{1}{2}(x - y, y - x)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.1

1. Considere a base $\mathcal{B} = \{(0,2), (-1,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$ e observe que $(x,y) = \frac{1}{2}(y-x)(0,2) + x(-1,1)$, de modo que:

$$T(x,y) = \frac{1}{2}(y-x) \cdot T(0,2) + x \cdot T(-1,1) = x \cdot (1,2,0) = (x, 2x, 0).$$

2. Em cada caso, identifique o núcleo e a imagem da aplicação linear.

   (a) $\mathcal{N}(T) = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ e uma base do núcleo é $\mathcal{B} = \{(1,2)\}$. A imagem do operador T é o eixo x e uma base de $\mathrm{Im}(T)$ é $\mathcal{B}' = \{(1,0)\}$.

   (b) $\mathcal{B} = \{(-2,1,1)\}$ é uma base do núcleo de T. O subespaço $\mathrm{Im}(T)$ é consiste dos vetores da forma:

$$(x + 2y, y - z, x + 2z) = x \cdot (1,0,1) + y \cdot (2,1,0) + z \cdot (0,-1,2)$$

   e $\mathcal{B}' = \{(1,0,1), (0,-1,2)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

3. O núcleo de T é constituído da matrizes da forma $\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$ e uma base de $\mathcal{N}(T)$ é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Acrescentando à base $\mathcal{B}$ os vetores $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtemos uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e o conjunto $\mathcal{B}' = \{T(X_3), T(x_4)\}$ é uma base de $\operatorname{Im}(T)$.

4. Um vetor $p(x) = ax^2 + bx + c$ jaz no núcleo de T se, e somente se, $x^2 p'' = \mathbf{0}$, isto é, $a = 0$. Logo, $\ker(T) = \mathbb{P}_1$. A imagem de T é constituída dos vetores $q = ax^2$ e tem como base o conjunto $\mathcal{B} = \{x^2\}$.

5. Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e defina o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por:

$$T(1,0,0) = (1,2,3), \quad T(1,0,0) = (4,0,5) \quad \text{e} \quad T(1,0,0) = (0,0,0).$$

Um tal operador não pode ser um isomorfismo, porque $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$. Para que a imagem seja preservada, o vetor $T(1,0,0)$ dever ser combinação linear de v_1 e v_2 e, por simplicidade, escolhemos $T(0,0,1) = \mathbf{0}$.

6. Seja $B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ a base do $\mathbb{R}^3$, construída por completamento da base do núcleo do operador T. e defina:

$$T(1,1,0) = (0,0,0), \quad T(0,1,0) = (0,1,0) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (0,0,1).$$

Dessa forma, construímos o operador $T(x,y,z) = (0, -x+y, z)$, com núcleo gerado pelo vetor $(1,1,0)$. Um tal operador não é injetor e muito menos um isomorfismo.

7. Basta notar que $v \in \mathcal{N}(T_2 \circ T_1) \Leftrightarrow T(v) \in \mathcal{N}(T_2)$.

8. Os isomorfismos são estabelecidos de forma natural.

(a) $T(x,y) = (x,y,0)$; $\quad \mathbb{R}^2 \approx W$.

(b) $T(x,y,z) = x + yt + zt^2$; $\quad \mathbb{R}^3 \approx \mathbb{P}_2$.

(c) $T(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$; $\quad \mathbb{R}^4 \approx \mathcal{M}_{2\times 2}$.

9. Adicionando o vetor $v = (1,0)$ á base $\mathcal{B} = \{(1,2)\}$ do núcleo, chegamos à base $\mathcal{B}' = \{(1,0),(1,2)\}$ do $\mathbb{R}^2$. A aplicação linear a ser construída depende da escolha do vetor v e considerando $T(1,0) = (2,2,0)$, encontramos:
$$(x,y) = \frac{2x-y}{2}\cdot(1,0) + \frac{y}{2}\cdot(1,2) \Rightarrow T(x,y) = (2x-y, 2x-y, 0).$$
10. O núcleo de T é o subespaço de $\mathbb{P}_2$ gerado pelo vetor $p = 2x^2 - x + 1$. A imagem de T é o subespaço gerado por $\{1, x\}$, isto é, o espaço $\mathbb{P}_1$. É claro que T não é injetor nem sobrejetor.
11. Adicionando o vetor $v = (1,0,0)$ á base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ do núcleo, chegamos à base $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e notando que:
$$(x,y,z) = (x+y+z)\cdot(1,0,0) + (-y-z)\cdot(1,0,-1) + y\cdot(0,1,-1)$$
encontramos $T(x,y,z) = (x+y+z)\cdot(1,1,1)$.
12. $\mathcal{N}(\partial_1)$ é o subespaço $\mathbb{P}_0$ dos polinômios constantes e a imagem $\operatorname{Im}(\partial_1)$ é constituída dos polinômios $p(x)$, tais que $p(0) = 0$. Para o operador ∂_2, temos:
$$\mathcal{N}(\partial_2) = \mathbb{P}_1 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(\partial_2) = \{p \in \mathbb{P}_n : p(0) = p'(0) = 0\}.$$
13. Considerando a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,-1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, obtemos:
$$\begin{aligned} (x,y) &= (x+y)\cdot(1,0) + (-y)\cdot(1,-1) \quad \text{e} \\ T(x,y) &= (-y, 2y, 0). \end{aligned}$$
14. Basta notar que $v \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow T(v) \in \mathcal{N}(T)$.
15. O polinômio $q(t) \equiv 1$ jaz em $\mathbb{P}_\infty$, mas não pertence a $\operatorname{Im}(T)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.2

1. Em qualquer base $\mathcal{B}$ do espaço V a matriz $[I]_{\mathcal{B}}$ é a matriz identidade $n \times n$.
2. Um vetor (polinômio) genérico de $\mathbb{P}_1$ é $p(t) = a + bt$ e a aplicação é $T(a+bt) = a + bt$.
3. A matriz de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ é:
$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. **(a)** $T(x,y,z) = (-2y+z, -x+y)$.

   (b) Considerando $v_1 = (0,1,1)$, $v_2 = (1,0,0)$ e $v_3 = (1,0,1)$, então a imagem de T é gerada pelos vetores $T(v_1)$, $T(v_2)$ e $T(v_3)$. Como $T(v_1) = (-1,1)$ é combinação linear $T(v_2)$ e $T(v_3)$, estes dois últimos LI, segue que $\{T(v_2), T(v_3)\}$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$. O núcleo de T tem dimensão 1 e $\mathcal{N}(T) = [(1,1,2)]$.

5. Considerando as bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, encontramos:

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. O ponto de partida é a relação $[T]_{\mathcal{B}} = [T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$.

   (a) $T(x,y) = \frac{1}{2}(x-y, x-y, 4x+2y)$.

   (b) Considere a base $\mathcal{B}'' = \{w_1, w_2, w_3\}$, sendo

$$w_1 = T(1,-1) = (1,1,1) \quad \text{e} \quad w_3 = T(0,2) = (-1,-1,2)$$

   e escolha w_2 LI com w_1 e w_3. Por exemplo, $w_2 = (0,0,1)$.

7. **(a)** A matriz $[T]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$ é a matriz 2×4

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

   (b) Dado $v = (x,y)$, temos que $[v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{3}(2x-y, x+y)$ e, portanto:

$$[Sv]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x-3y \\ x-2y \\ 2x-y \\ x+y \end{bmatrix} \Leftrightarrow Sv = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 5x-3y & x-2y \\ 2x-y & x+y \end{bmatrix}.$$

   Logo,

$$Sv = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 5x-3y=3 \\ x-2y=0 \\ 2x-y=0 \\ x+y=3 \end{array} \right.$$

   e, como o sistema não tem solução, um tal vetor v não existe.

8. A aplicação T é dada por $T(x,y) = (-x-2y, y)$.

   (a) Os vetores do tipo $u = (x, -x)$ satisfazem a $Tu = u$, enquanto os vetores $v = (x, 0)$ satisfazem a $Tv = -v$.

   (b) Temos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$, de modo que $\dim \mathcal{N}(T) = 0$. On the other hand,

   $$\dim \operatorname{Im}(T) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \mathcal{N}(T) = 2.$$

   (c) Sendo T injetora e sobrejetora, concluímos que T é um isomorfismo. Se $T^{-1}(x,y) = (a,b)$, então:

   $$(x,y) = T(a,b) = (-a-2b, b)$$

   e daí resulta que $a = -x-2y$ e $b = y$. Logo, $T^{-1}(x,y) = (-x-2y, y)$. Com a notação matricial, temos:

   $$\left[T^{-1}\right] = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. As bases canônicas de $\mathbb{P}_3$ e $\mathbb{R}$ são, respectivamente:

   $$\mathcal{B} = \left\{1, t, t^2, t^3\right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \{1\}$$

   e um cálculo direto nos conduz a:

   $$T(1) = 1,\ T(t) = 1/2,\ T\left(t^2\right) = 1/3 \quad \text{e} \quad T\left(t^3\right) = 1/4.$$

   Assim,

   $$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

10. A base canônica de $\mathbb{P}_1$ é $\mathcal{B} = \{1, t\}$ e temos que

    $$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t \quad \text{e} \quad T(t) = 1 - t = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot t$$

    e, portanto,

    $$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. As aplicações T_A e T_B são dadas por:

$$T_A(x,y) = (y, 2y, y) \quad \text{e} \quad T_B(x,y,z) = (0, x+2y+z, -x)$$

e, portanto, $T_B \circ T_A(x,y) = (0, 6y, -y)$. Temos:

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{N}(T_A) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \mathcal{B} = \{(1,0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_A) = 1. \\
\mathcal{N}(T_B) = \{(0,y,-2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \mathcal{B} = \{(0,1,-2)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) = 1. \\
\mathcal{N}(T_B \circ T_A) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \mathcal{B} = \{(1,0)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B \circ T_A) = 1.
\end{array}$$

As colunas da matriz que representa a aplicação linear geram a imagem de tal aplicação. Observando as matrizes das aplicações T_A, T_B e $T_B \circ T_A$, deduzimos que

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Im}(T_A) = [(1,2,1)] & \text{Base:} \quad \mathcal{B} = \{(1,2,1)\}, & \dim \mathrm{Im}(T_A) = 1. \\
\mathrm{Im}(T_B) = \{(0,y,-2y) : y \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \mathcal{B} = \{(0,1,0),(0,1,-1)\}, & \dim \mathcal{N}(T_B) = 2. \\
\mathrm{Im}(T_B \circ T_A) = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} & \text{Base:} \quad \mathcal{B} = \{(0,6,-1)\}, & \dim \mathrm{Im}(T_B \circ T_A) = 1.
\end{array}$$

12. Dado $v = (x,y,z,t)$ do $\mathbb{R}^4$, um cálculo direto nos dá

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

e, por conseguinte,

$$[T(v)]_{\mathcal{B}} = A \cdot [v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y + z + 3t \\ 4z \\ 2x + 2y + 2z - 2t \\ -x + y - z + t \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2x + 2y + 2z + 2t \\ 4x + 8z + 4t \\ x + 3y - 3z - t \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T(v) &= \tfrac{1}{4} \cdot (2x + 2y + 2z + 2t)(1,0,0) + (4x + 8z + 4t)(-1,0,1) + (x + 3y - 3z - t)(1,1,0) \\
&= \tfrac{1}{4} \cdot (-x - 3y - z - t, x + 3y - 3z - t, 4x + 8z + 4t).
\end{aligned}$$

13. Ponto de partida: $T(x,y,z) = (x + 2y, x - z)$ e $S(x,y) = (x, x - y, 2y, 2x + y)$.

(a) Temos:

$$\begin{aligned} T(1,0,0) &= (1,1) = 0\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1)\,, \\ T(1,1,1) &= (3,0) = 3\cdot(1,0) + 0\cdot(1,1)\,, \\ T(0,1,-1) &= (2,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(1,1) \quad \text{e} \\ S(1,0) &= (1,1,0,2) = 2\cdot(1,0,0,0) + 2\cdot(0,0,1,1) + (-2)\cdot(0,0,1,0) + (-1)\cdot(1,-1,0,0)\,, \\ S(1,1) &= (1,0,2,3) = 1\cdot(1,0,0,0) + 2\cdot(0,0,1,1) + (-1)\cdot(0,0,1,0) + 0\cdot(1,-1,0,0)\,. \end{aligned}$$

Logo:

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto:

$$[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) A aplicação composta $S \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ vem dada por:

$$[S \circ T](x,y,z) = S(T(x,y,z)) = S(x+2y, x-z) = (x+2y, 2y+z, 2x-2z, 3x+4y-z)\,.$$

(c) A matriz $[S \circ T]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ coincide com o produto $[S]_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}} \cdot [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ encontrado em (b).

14. Recorde-se que um operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ será um isomorfismo se, e somente se, for injetor.

(a) Mostremos que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. De fato:

$$T(x,y,z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x+y-2z=0 \\ x-y=0 \\ x+z=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Assim, T é injetor e, consequentemente um isomorfismo. A matriz de T é:

$$[T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) A inversa é dada por $T^{-1}(x,y,z) = \frac{1}{4} \cdot (x+y+2z, x-3y+2z, -x-y+2z)$ e temos:

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, ao escalonar a matriz ampliada $[A, I_n]$ chegamos à matriz $[I_n, A^{-1}]$. No caso, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -3/4 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

15. Um cálculo direto nos dá:

$$M = [T]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e temos:

$$M^{-1}[T]_{\mathcal{B}'}M = [T]_{\mathcal{B}}.$$

16. $\lambda = \frac{1}{2}\left[a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right]$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.3

1. Em cada caso, considere a matriz de T com relação às bases canônicas.

(a) Considerando a base canônica do $\mathbb{R}^2$, temos:

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2.$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, com autoespaços correspondentes $V_{\lambda_1} = [(\sqrt{2}, 1)]$ e $V_{\lambda_2} = [(-\sqrt{2}, 1)]$.

(b) Neste caso, o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$ e os autovalores são $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = \left[\left(1, \sqrt{2}\right)\right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[\left(1, -\sqrt{2}\right)\right].$$

(c) Temos $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ e os autovalores são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Os auto-espaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1,0,0)], \quad V_{\lambda_2} = [(1,1,0)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = [(1,1,1)].$$

(d) O polinômio característico é $p(\lambda) = (\lambda + 1)\left(3 - \lambda^2\right)$ e os autovalores são $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$ e $\lambda_3 = -\sqrt{3}$. Os autoespaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = [(1,-2,-1)], \quad V_{\lambda_2} = \left[\left(1, \sqrt{3} - 1, 1\right)\right], \quad \text{e} \quad V_{\lambda_3} = \left[\left(1, 1 - \sqrt{3}, 1\right)\right].$$

(e) O polinômio característico é $p(\lambda) = (1 - \lambda)^4$ e $\lambda_1 = 1$ é o autovalor de ordem 4. O auto-espaço correspondentes é:

$$V_{\lambda_1} = [(0,0,0,1)]$$

e os auto-vetores são do tipo $v = (x, 0, 0, t)$, $x, t \in \mathbb{R}$.

(f) Temos $p(\lambda) = (3 - \lambda)(2 - \lambda)^3$ e os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = [(0,0,0,1)] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [(1,0,0,0), (0,0,1,0)] \qquad (\dim V_{\lambda_1} = 1 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 2).$$

(g) No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, consideramos a base canônica:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e encontramos $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3 (\lambda + 1)$. Os autovalores são, portanto, $\lambda = 1$, de ordem 3 e $\lambda = -1$. Os auto-espaços correspondentes são:

$$V_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

(h) O único autovalor é $\lambda = 0$ e qualquer polinômio constante e não nulo é um vetor próprio associado. O autoespaço é $V_\lambda = \mathbb{R}$.

(i) No espaço $\mathbb{P}_2$, consideramos a base canônica $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2\right\}$ e encontramos $p(\lambda) = -\lambda^3$. O único autovalor é $\lambda = 0$ e $V_\lambda = \mathbb{R}$.

(j) Temos $T(1) = x$, $T(x) = 1$ e $T\left(x^2\right) = x^2$ e, portanto:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 1\right)$, com raízes (autovalores) $\lambda_1 = 1$ (dupla) e $\lambda_2 = -1$. Os autovetores associados ao autovalor λ_1 são os polinômios do tipo $ax^2 + bx + b$, enquanto os autovetores associados ao autovalor λ_2 são os polinômios do tipo $bx - b$. Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = \left[x+1, x^2\right] \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = [x-1] \qquad (\dim V_{\lambda_1} = 2 \quad \text{e} \quad \dim V_{\lambda_2} = 1).$$

(k) Dado $p(x) = ax^2 + bx + c$, temos que $T(p) = p(x+1) = ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$, de modo que:

$$T(1) = 1, \quad T(x) = x+1 \quad \text{e} \quad T\left(x^2\right) = x^2 + 2x + 1.$$

A matriz de T na base $\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2\right\}$ é, portanto:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é $p(\lambda) = (1-\lambda)^3$. O autovalor é $\lambda = 1$, de multiplicidade 3 e os autovetores correspondentes são os polinômios $\mathrm{q}(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$. O autoespaço é o subespaço de dimensão $n = 1$, dado por:

$$V_{\lambda_1} = [1] = \mathbb{R}.$$

(l) Dado $v = ax^2 + bx + c$, temos que $T(v) = -6ax^2 - 2bx - 2a$ de onde segue que:

$$T(1) = 0, \quad T(x) = -2 \quad \text{e} \quad T\left(x^2\right) = -6x^2 - 2.$$

O polinômio característico é $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2$, com raízes (autovalores) $\lambda_1 = 0$ (dupla) e $\lambda_2 = -6$. Os autoespaços são:

$$V_{\lambda_1} = \mathbb{R} \quad \text{e} \quad V_{\lambda_2} = \left[x, 1 + 3x^2\right].$$

Em outras palavras, V_{λ_1} é constituído pelos polinômios constantes, enquanto V_{λ_2} é o subespaço constituído pelos polinômios do tipo $3ax^2 + bx + a,\ a, b \in \mathbb{R}$.

2. Recorde-se que T é injetor se, e somente se, $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Se $\lambda = 0$ é um atovalor de T, existe $v \neq 0$, tal que $T(v) = 0 \cdot v = 0$ e daí resulta que $v \in \mathcal{N}(T)$ e, portanto, $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$.

3. As matrizes de T em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são, respectivamente:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [T]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

e temos:

(a) Em relação à base $\mathcal{B}$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 .$$

(b) Em relação à base $\mathcal{B}'$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1/2-\lambda & 1/2 \\ -1/2 & 3/2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (1-\lambda)^2 .$$

4. Temos que $R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$ e, considerando $\theta = k\pi$, encontramos:

$$R_\theta(x,y) = \left((-1)^k x, (-1)^k y\right).$$

Com relação à base canônica, temos:

$$[R_\theta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

e o polinômio característico é $p(\lambda) = \pm 1$, conforme seja k par ou ímpar.

5. Com os autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, construímos a base de autovetores $\mathcal{B} = \{(3,1),(-2,1)\}$ e teremos:

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $T(x,y) = (-6y, -x+y)$.

6. Sendo T um isomorfismo, qualquer autovalor λ é não nulo e existe $v \neq \mathbf{0}$, tal que:

$$T(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow v = T^{-1}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot T^{-1}(v) \Leftrightarrow T^{-1}(v) = \tfrac{1}{\lambda} \cdot v.$$

7. Basta observar que $T(v) = \lambda \cdot v = \mu \cdot v$ e daí resulta $(\lambda - \mu) \cdot v = 0$ e como $\lambda \neq \mu$, segue $v = \mathbf{0}$.

8. Existe $v \neq \mathbf{0}$, tal que $T(v) = \lambda \cdot v$ e, assim, $T^2(v) = T(T(v)) = \lambda^2 \cdot v$.

9. Basta notar que se $v \in V_\lambda$, então $T(v) = \lambda \cdot v \in V_\lambda$. ($V_\lambda$ é um subespaço vetorial!)

ESCREVENDO PARA APRENDER 6.4

1. Como ilustração faremos o ítem (d). Ressaltamos que o procedimento é o mesmo em todos os casos: encontramos os autovalores e uma base de autovetores.

   (d) Os autovalores do operador T são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -3$, com autoespaços correspondentes:

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \{(x, 2x, 3x) : x \in \mathbb{R}\}. \\ V_{\lambda_2} &= \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}. \\ V_{\lambda_3} &= \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Em relação à base $\mathcal{B} = \{(1,2,3), (0,1,0), (0,1,0)\}$, de autovetores, o operador T é representado pela matriz diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2. A matriz de T é do tipo:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

   com polinômio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$, com duas raízes distintas, e autovetores coorespondentes LI, exceto no caso em que $a = -c$ e $b = 0$, e, neste caso, matriz é diagonal.

3. Se $a \neq 1$, o operador T é diagonalizável. Por outro lado, S é diagonalizável apenas no caso em que $a = 0$.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. Para verificar que T é linear, observe que

$$\begin{aligned} T(\lambda(u_1, v_1) + (u_2, v_2)) &= T(\lambda u_1 + u_2, \lambda v_1 + v_2) = \lambda u_1 + u_2 + \lambda v_1 + v_2 \\ &= \lambda(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 = \lambda T(u_1, v_1) + T(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Dado $u+v$ em $W_1 \oplus W_2$, então $T(u,v) = u+v$ e, portanto, T é sobrejetora. Por outro lado, se $(u,v) \in \ker(T)$, então $u+v = \mathbf{0}$ em $W_1 \oplus W_2$ e como $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, segue que $u = v = 0$. Assim, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ e T é injetora.

2. Dado v em V, então $v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n$ e, considerando que $T(v_j) = S(v_j)$, obtemos:

$$\begin{aligned} S(v) &= x_1 \cdot S(v_1) + x_2 \cdot S(v_2) + \cdots + x_n \cdot S(v_n) \\ &= x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \cdots + x_n \cdot T(v_n) \\ &= T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = T(v). \end{aligned}$$

3. Sendo $T : V \to W$ um isomorfismo, então $\dim V = \dim W$, e T^{-1} será um isomorfismo se, e somente se, for injetor. Ora,

$$T^{-1}(w_1) = T^{-1}(w_2) \Leftrightarrow T\left(T^{-1}(w_1)\right) = T\left(T^{-1}(w_2)\right) \Leftrightarrow w_1 = w_2.$$

Logo, T^{-1} é injetor e, portanto, um isomorfismo.

4. Sendo $T : V \to W$ um isomorfismo, então $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\operatorname{Im}(T) = W$ (T é injetor e sobrejetor). Logo,

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \operatorname{Im})T = 0 + \dim W = \dim W.$$

Por outro lado, dada uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, então $T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)$ são LI. De fato:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot T(v_1) + x_2 \cdot T(v_2) + \cdots + x_n \cdot T(v_n) &= \mathbf{0} \Leftrightarrow T(x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n) = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0. \end{aligned}$$

5. Dado que $P(x,y,z,t) = (x,y,0,0)$, temos:

(a) $P^2(x,y,z,t) = P(P(x,y,z,t)) = P(x,y,0,0) = (x,y,0,0) = P(x,y,z,t)$.

(b) Dado $v = (x,y,z,t)$ um vetor do $\mathbb{R}^4$, então:

$$v = (x,y,z,t) = (x,y,0,0) + (0,0,z,t) = P(x,y,z,t) + (0,0,z,t) \in \operatorname{Im}(P) + \mathcal{N}(P).$$

Considerando que $\operatorname{Im}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{\mathbf{0}\}$, deduzimos que $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$.

(c) Considere uma base do tipo $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,\lambda,0), (0,0,0,\mu)\}$, com $\lambda\mu \neq 0$.

6. As matrizes $\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ e $\left[T\right]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ são inversas uma da outra.

7. A elipse do plano $\mathbb{R}^2_{uv}$ descrita por: $Au^2 - 4abuv + Av^2 = a^2\left(a^2 - b^2\right)$, com $A = a^2 + b^2$.

8. Atividade de Sala de Aula.

9. Atividade de Sala de Aula.

10. Um tal operador possui autovalor $\lambda = a$, de multiplicidade n, e existe uma base $\mathcal{B}'$ de V em relação a qual a matriz de T é diagonal, ou seja, $\left[T\right]_{\mathcal{B}'} = a \cdot I$. Se $\mathcal{B}$ é uma outra base de V, as matrizes $\left[T\right]_{\mathcal{B}}$ e $\left[T\right]_{\mathcal{B}'}$ são equivalentes, isto é, existe uma matriz invertível M, such that $\left[T\right]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot \left[T\right]_{\mathcal{B}'} \cdot M$ e, consequentemente:

$$\left[T\right]_{\mathcal{B}} = M^{-1} \cdot \left[T\right]_{\mathcal{B}'} \cdot M = M^{-1} \cdot (a \cdot I) \cdot M = a\left(M^{-1} \cdot I \cdot M\right) = a \cdot I.$$

11. Na Figura 6.11 ilustramos os operadores T e R, onde Q é o ponto médio de PQ', e vemos que $T(P) = Q$ e $R(P) = Q'$.

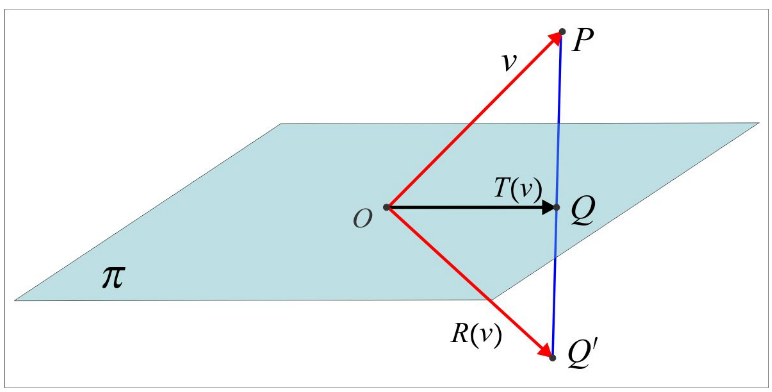

Figura 6.11: Ilustração do Exercício 11.

(a) Um ponto genérico da reta r que passa por $P(x, y, z)$ e é perpendicular ao plano π é $X = (x + 3t, y + 2t, z + t)$ e no instante $t_0 = -\frac{1}{14}(3x + 2y + z)$ o ponto X estará sobre o plano π. Logo

$$T(x, y, z) = Q = \tfrac{1}{14}(5x - 6y - 3z, -6x + 10y - 2z, -3x - 2y - 13z).$$

Por outro lado, considerando que Q é o ponto médio de PQ', temos

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(P + Q'\right) \Rightarrow Q' = 2Q - P = \tfrac{1}{7}(-2x - 6y - 3z, -6x + 3y - 2z, -3x - 2y + 6z).$$

(b) É oportuno observar que se u é um vetor perpendicular ao plano π, então $R(u) = -u$ e que

$$T(v) = 0 \Leftrightarrow v \perp \pi \quad \text{e} \quad T(u) = u \Leftrightarrow u \in \pi.$$

A base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ deve ser tal que $T(v_1) = v_1,\ T(v_2) = 0$ e $T(v_3) = v_3$. Escolha v_1 e v_3 LI, ambos no plano π, e v_2 ortogonal ao plano.

Resposta 6.1(15) Seja $T(x, y) = (0, x)$

Temos:

1) $T^2 = 0$

2) $\ker(T) = \{x = 0\} = eixoOy$

3) $\operatorname{Im}(T)$ é o eixo Oy

4) $\operatorname{Im}\left(T^2\right) = \{0\}$

5) $T^2 = 0$ e $\ker(T) \neq \{0\}$